

# Metoda Elementów Skończonych

dr inż. Sławomir Koczubiej, dr inż. Paweł Stąpór

Politechnika Świętokrzyska  
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego  
Katedra Informatyki i Matematyki Stosowanej

(16 października 2017)

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony

## Metody komputerowe

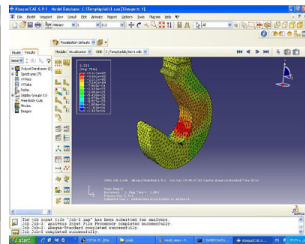
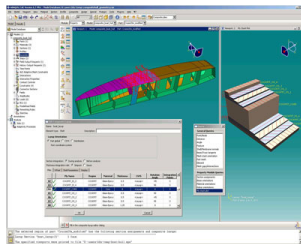
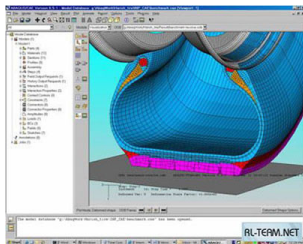
Metoda komputerowa to proces analizy zagadnienia z wykorzystaniem przybliżonych metod obliczeniowych, zaimplementowanych jako programy komputerowe. Metody rozwiązań przybliżonych, wykorzystywane min. w mechanice, mechanice płynów, elektrodynamice, termodynamice.

W formułowaniu tych metod korzysta się w dużym stopniu z zaawansowanego aparatu matematycznego (metody wariacyjne, analiza funkcjonalna) co pozwala rozwiązywać skomplikowane zagadnienia i dowodzić zbieżności ich rozwiązania. Wśród metod komputerowych można wymienić **metodę elementów skończonych** (MES), **metodę elementów brzegowych** (MEB), **uogólnioną metodę różnic skończonych** (UMRS) czy **bezelementową metodę Galerkina** (BMG).

Metoda komputerowa najczęściej wiązana jest z pakietami **CAE** (*Computer Aided Engineering*). Są to programy wykorzystujące zaawansowane **metody komputerowe**, umożliwiające modelowanie szeregu zjawisk fizycznych, zachodzących w układach o zróżnicowanym stopniu złożoności – począwszy od prostych brył, skończywszy na kompletnych zespołach części.

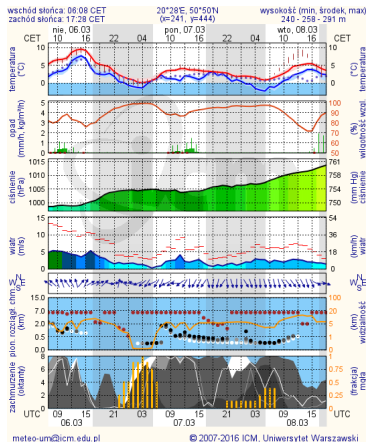
Programy te umożliwiają symulację kinematyki lub dynamiki układu, analizę przepływu ciepła i masy, naprężeń i innych cech projektowanego wyrobu. Pozwala to na znaczne przyspieszenie procesu projektowania i przede wszystkim na obniżenie kosztów projektowania. Do tej grupy oprogramowania należą m. in. **Abaqus, ADINA, ANSYS, NX Nastran, FEMAP.**

Termin metoda komputerowa często jest używana jako nazwa procesu projektowania lub analizy konstrukcji z wykorzystaniem programowania typu CAD/CAM/CAE.



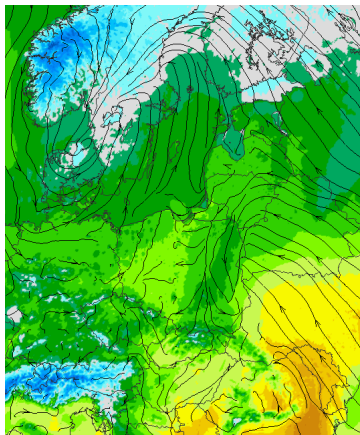
Poza projektowaniem, metody komputerowe mają zastosowanie w:

- inżynierii lądowej,
- biomechanice,
- naukach medycznych,
- elektronice,
- nanotechnologii.



## Symulacje komputerowe:

- zastępują i wspomagają badania eksperymentalne (na modelach materialnych),
- zastępują i wspomagają metody analityczne (ale nie zastępują modelowania).







Symulacja komputerowa obliczeń składa się z czterech etapów. W etapie pierwszym ma miejsce **idealizacja** obiektu rzeczywistego poprzez przyjęcie uzasadnionych założeń upraszczających oraz wyspecyfikowanie zmiennych najlepiej opisujących obiekt (*model fizyczny*). Założenia dotyczą przede wszystkim geometrii obiektu, materiału którego jest wykonany, obciążeń i przyszłych warunków użytkowania (warunków środowiskowych i okresu planowanej eksploatacji obiektu). Na tej podstawie budowany jest *model matematyczny* obiektu.

Drugim etapem jest **dyskretyzacja**, przetwarzająca ciągły model matematyczny, na ogół w postaci układów równań różniczkowych, lub pewnego funkcjonału, w model numeryczny w formie układów równań algebraicznych.

Trzecim etapem symulacji komputerowej jest **rozwiązanie**, czyli napisanie stosownego programu komputerowego, przetestowanie i wykonanie obliczeń.

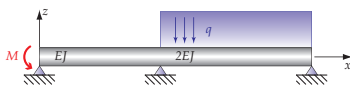
I w końcu najważniejszy — czwarty etap, jakim jest **weryfikacja** wyników obliczeń. Możliwości popełnienia błędów jest wiele, mogą one wystąpić na każdym z trzech pierwszych etapów. W rezultacie poprawiania tych błędów powinniśmy w końcu otrzymać rozwiązanie optymalne.

## Proces modelowania

### Konstrukcja rzeczywista



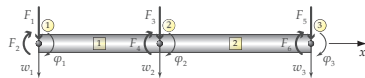
### Model fizyczny



### Model matematyczny

$$\begin{aligned} \Pi &= 1/2 \int_0^L E(x)A(x)(u'(x))^2 dx - \int_0^L q(x)u(x) dx + \Sigma F_i Q_i \\ 0 &< x < L \\ u(x=0) &= 0 \\ N(x=L) &= EA(du/dx) \end{aligned}$$

### Model numeryczny



Celem **procesu modelowania** jest otrzymanie modelu, ujmującego najistotniejsze właściwości konstrukcji i jej zachowanie pod działaniem obciążeń, i dostosowanego do narzędzi obliczeniowych.

**Modelem matematycznym** mogą być odpowiednio sformułowane **problemy brzegowe** (lub początkowo brzegowe) dla równań różniczkowych (zwyczajnych lub cząstkowych) lub pewne **funkcjonały** podlegające minimalizacji.

Pierwszy przypadek to **sformułowanie lokalne** (SL), drugi natomiast to **sformułowanie globalne** problemu (SG). W budowie komputerowej metody analizy konstrukcji preferowane jest sformułowanie globalne.

Trudność jednakże polega na tym, że nie wszystkie problemy, a tylko tzw. problemy samosprężone możemy równoważnie opisać w sformułowaniu lokalnym lub globalnym. Przykładem problemu samosprężonego jest **liniowy problem teorii sprężystości** (LPTS) opisany 15. równaniami różniczkowo-algebraicznymi ze stosownymi warunkami brzegowymi lub pewnym funkcyjonałem.

Funkcyjonałem w LPTS będzie funkcyjonał **całkowitej energii potencjalnej** układu.

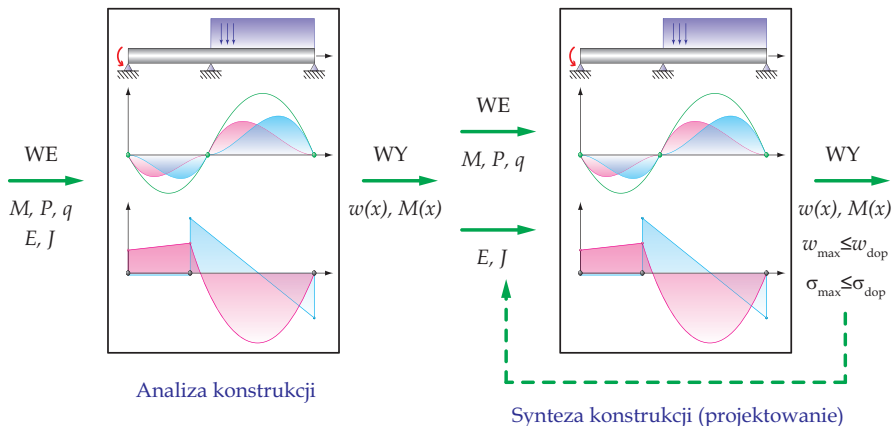
Jeśli rozważany problem w sformułowaniu lokalnym nie jest problemem samosprzężonym, można budować równanie całkowe wykorzystując metody **wariacyjne** (SW).

Metody wariacyjne pozwalają na szukanie rozwiązania równania różniczkowego budując ważne równania całkowe, które w naturalny sposób tworzą bazę dla otrzymania rozwiązań przybliżonych. Podstawowym modelem będzie sformułowanie lokalne w postaci równania różniczkowego.

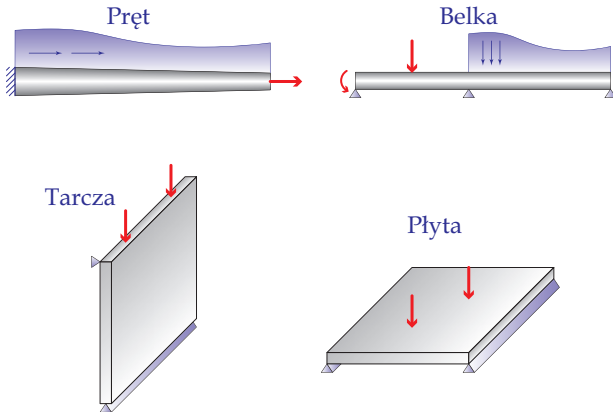
Wśród metod wariacyjnych możemy wyróżnić **metodę Rayleigha-Ritza**, lub **metody residuów ważonych** np. **kollokacji**, **najmniejszych kwadratów**, **Bubnowa-Galerkina**.

Metody komputerowe z matematycznego punktu widzenia są pewnymi procedurami rozwiązań, dostosowanymi do możliwości obliczeniowych, jakie powstały wraz z rozwojem komputerów i technik informatycznych.

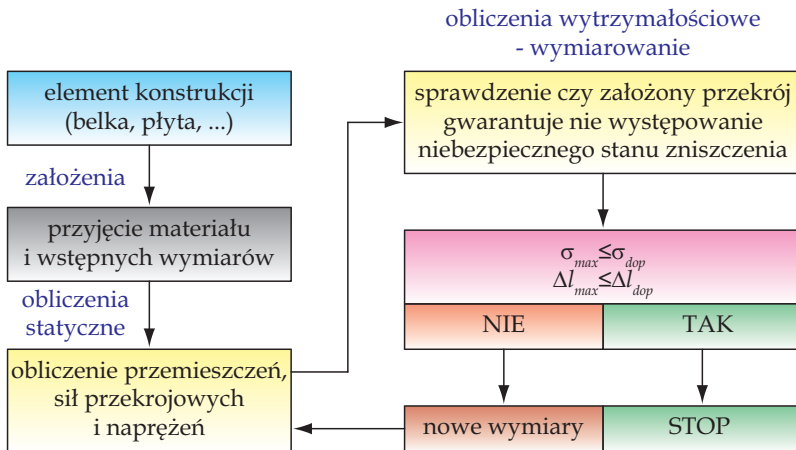
## Analiza i synteza konstrukcji



## Elementy konstrukcji



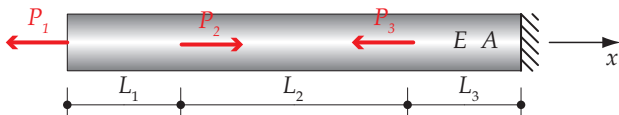
## Algorytm projektowania





## Przykład projektowania

Zaprojektować pręt o stałym przekroju poprzecznym.



Mamy następujące dane:

- $L_1 = 0,5 \text{ m}$ ,
- $L_2 = 1 \text{ m}$ ,
- $L_3 = 0,5 \text{ m}$ ,
- $P_1 = 20 \text{ kN}$ ,
- $P_2 = -5 \text{ kN}$ ,
- $P_3 = 10 \text{ kN}$ .

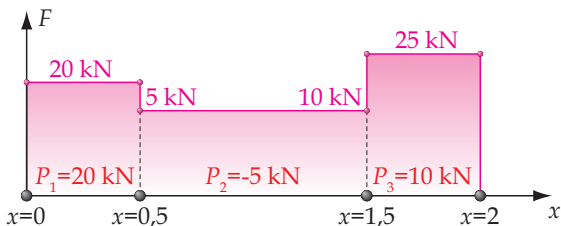
Przyjmujemy pręt kwadratowy o wymiarach  $12 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ , wykonany ze stali konstrukcyjnej St3SX, dla której:

- $E = 205 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,
- $\sigma_{dop} = 205 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,
- $\Delta L_{dop} = L/400 = 2/400 = 0,005 \text{ m}$ .

Pole powierzchni przekroju poprzecznego  $A$  będzie równe:

$$A = 0,012 \cdot 0,012 = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

## Projektowanie ze względu na niebezpieczny stan zniszczenia



Z wykresu sił podłużnych odczytamy:

$$F_{max} = 25 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2.$$

Maksymalne naprężenia będą wynosić:

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A} = \frac{25 \cdot 10^3}{1,44 \cdot 10^{-4}} = 173,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Zatem warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dop},$$

jest spełniony.

## Projektowanie ze względu na niebezpieczny stan użytkowania

Wydłużenie pręta będzie wynosić:

$$\Delta L_{max} = \frac{\sum_{i=1}^3 F_i \cdot L_i}{E \cdot A} = \frac{(20 \cdot 0,5 + 15 \cdot 1 + 25 \cdot 0,5) \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \cdot 1,44 \cdot 10^{-4}} = 0,00127 \text{ m.}$$

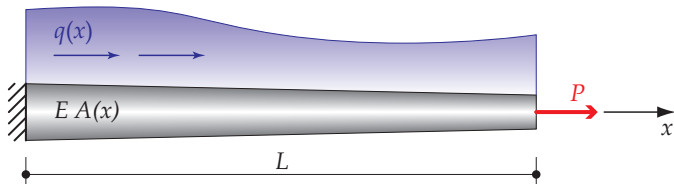
Zatem warunek bezpieczeństwa:

$$\Delta L_{max} \leq \Delta L_{dop},$$

jest spełniony.

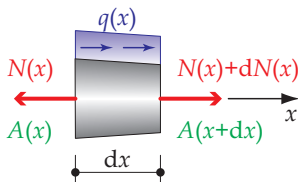
- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony

Rozważmy pręt o powierzchni przekroju poprzecznego  $A(x)$  i długości  $L$ . Pręt zrobiony jest z materiału o module Younga  $E$ . Pręt jest obciążony obciążeniem ciągłym działającym wzdłuż osi pręta o intensywności  $q(x)$  i siłą skupioną  $P$ .



Tak zdefiniowany problem może być uznany za **problem jednowymiarowy**, jeśli wymiary przekroju poprzecznego pręta są małe w stosunku do jego długości, co pozwala przyjąć, że naprężenia po wysokości pręta są pomijalnie małe w stosunku do naprężeń wzdłuż pręta.

Równanie różniczkowe, będące modelem matematycznym problemu pręta rozciąganego, otrzymamy rozważając nieskończenie mały element  $dx$  pręta.



$N(x)$  i  $N(x) + dN(x)$  są **siłami normalnymi** działającymi w przekrojach  $A(x)$  i  $A(x + dx)$ . Korzystając z **warunku równowagi** możemy zapisać

$$-N(x) + N(x) + dN(x) + q(x)dx = 0.$$

Zatem, nasze równanie będzie miało postać

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) = 0,$$

$$0 < x < L.$$



Siłę **normalną** (podłużną) stanowi suma **naprężeń normalnych** na całym przekroju. Jeśli naprężenia są stałe w przekroju pręta, to możemy je określić z zależności

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)},$$

i następnie

$$N(x) = \sigma_x(x)A(x).$$

Wykorzystując **równanie fizyczne** (konstrytutywne, Hooke'a) określające zależność odkształcenia od naprężenia

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x),$$

i **równanie geometryczne** (Cauchy'ego) wiążące ze zobą przemieszczenia i odkształcenia

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx},$$

będziemy mogli napisać

$$N(x) = EA(x) \frac{du(x)}{dx}.$$

Wykorzystując zależność

$$N(x) = EA(x) \frac{du(x)}{dx},$$

będziemy mogli zapisać równanie różniczkowe w formie

$$\frac{d}{dx} \left( EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0,$$

$$0 < x < L,$$

lub jeśli  $EA = \text{const.}$

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0,$$

$$0 < x < L.$$

Do rozwiązania takiego równania różniczkowego potrzebne jest jeszcze sformułowanie **warunków brzegowych** na brzegach pręta.

Równanie jest drugiego rzędu, zatem wymagane są dwa warunki brzegowe, ustalające wartość przemieszczenia  $u$  lub siły  $P$ . Jednoznaczność rozwiązania wymaga, aby warunki brzegowy podane były na dwóch różnych brzegach.

$$u(x=0) = 0,$$

$$N(x=L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P \Rightarrow EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P.$$

Pierwszy warunek dla funkcji  $u$  nazywany jest **podstawowym** (kinematycznym) warunkiem brzegowym, natomiast drugi, dla pochodnej funkcji  $\frac{du}{dx}$  jest nazywany **naturalnym** (statycznym) warunkiem brzegowym.

Ostatecznie **model matematyczny** problemu pręta rozciąganego będzie miał postać

$$\frac{d}{dx} \left( EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0,$$

$$0 < x < L,$$

$$u(x=0) = 0,$$

$$N(x=L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P.$$

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego**
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony

Poprzednie równania problemu brzegowego sformułowaliśmy analizując stan równowagi w punkcie materialnym ciała. W efekcie otrzymaliśmy równanie różniczkowe. Taki sposób budowania modeli matematycznych uzasadnia nazwę **sformułowanie lokalne** problemu.

Innym sposobem jest **sformułowanie globalne**, w którym rozwiązanie otrzymujemy w wyniku minimalizacji pewnego funkcjonału.

W analizie zagadnień mechaniki ciała sprężystego takim funkcjonałem jest **całkowita energia potencjalna**.

Problem, którego rozwiązanie można otrzymać rozwiązując równanie różniczkowe lub minimalizując odpowiedni funkcjonał, nazywa się **problemem samosprężonym**.

Każde ciało pod działaniem sił zewnętrznych doznaje deformacji, na których siły obciążające wykonują pewną **pracę**  $L$ . Praca ta w przypadku **adiabaticznego** procesu termodynamicznego (takiego, podczas którego izolowany układ nie nawiązuje wymiany ciepła, lecz całość energii jest dostarczana lub odbierana z niego jako praca, nie zachodzi dyssypacja energii) jest niezależna od sposobu jej wykonania i równa się przyrostowi **energii wewnętrznej** układu  $W$ , czyli takiej funkcji, której przyrost jest równy pracy dostarczonej układowi

$$L = W.$$

Równość ta wynika z I prawa termodynamiki dla procesów adiabaticznych.

Takie cechy są charakterystyczne dla układów **sprężystych**.



Można dowieść, że w przypadku ciała sprężystego i obciążeń **statycznych** energia wewnętrzna układu jest równa **energii potencjalnej**, która równa się pracy sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych i nazywana jest **energią sprężystą** układu  $U$ .

$$W = U.$$

## Energia sprężysta

Podsumowując, dla ciał sprężystych i procesu adiabatycznego energia sprężysta  $U$  to praca sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych.

Energia ta jest odwracalna, co oznacza, że po usunięciu sił obciążających zużywa się na odzyskanie początkowej konfiguracji ciała i w nie naprężonym i nie odkształconym stanie jest równa zero.

Energię sprężystą można zapisać w formie

$$U = \int_V \Phi \, dV.$$

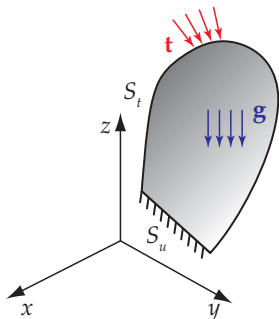
gdzie  $\Phi$  jest **energiją sprężystą właściwą** (gęstością energii sprężystej) i dla ciała Hooke'a wynosi

- w zapisie **wskaźnikowym**

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

- w zapisie **macierzowym**

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}.$$



Na rysunku oznaczono:

- $V$  – objętość ciała,
- $S$  – brzeg ciała ze zdefiniowanymi warunkami brzegowymi,
- $\mathbf{g}$  – wektor intensywności sił objętościowych,
- $\mathbf{t}$  – wektor intensywności sił powierzchniowych.

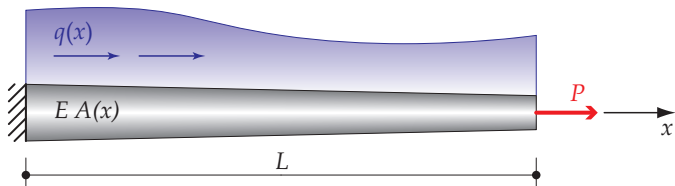
**Całkowita energia potencjalna** ciała sprężystego będzie zatem równa

$$\Pi = U - L,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_V g_i u_i dV - \frac{1}{2} \int_S t_i u_i dS,$$

lub

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS.$$



W przypadku sformułowania globalnego pręta rozciąganego, musimy wyznaczyć całkowitą energię potencjalną pręta  $\Pi$

$$\Pi = U - L_q - L_P,$$

gdzie  $U$  jest energią sprężystą pręta,  $L_q$  jest pracą obciążenia ciągłego a  $L_P$  to praca obciążenia skupionego.

**Energia sprężysta** wynosi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dv,$$

wykorzystując dodatkowo

$$dv = A(x) \, dx,$$

$$\sigma_x(x) = E \varepsilon_x(x),$$

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx},$$

możemy napisać

$$U = \frac{1}{2} \int_L EA(x) \varepsilon^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_L EA(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 \, dx.$$

Dla  $EA = \text{const.}$  będziemy mogli napisać

$$U = \frac{1}{2} EA \int_L \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 \, dx.$$

**Praca obciążenia ciągłego** wynosi

$$L_q = \int_L q(x)u(x) dx,$$

a **praca obciążenia skupionego** na końcu pręta

$$L_P = Pu(L).$$

Ostatecznie, całkowita energia potencjalna pręta wynosi

$$\Pi = U - L_q - L_P = \frac{1}{2}EA \int_L \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_L q(x)u(x)dx - Pu(L).$$

Rozwiązaniem tak sformułowanego zadania będzie taka funkcja przemieszczenia  $u(x)$ , dla której energia potencjalna  $\Pi$  osiągnie minimum.

**Spostrzeżenie:** zależność na energię potencjalną  $\Pi$  nie zawiera drugiej pochodnej funkcji przemieszczeń  $\frac{d^2u}{dx^2}$ , równanie różniczkowe zawierało!

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych**
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony

**Metoda elementów skończonych (MES)** jest pewną procedurą wariacyjną rozwiązywania równań różniczkowych, w której funkcje aproksymacyjne są wyznaczone w obszarze zastąpionym przez zbiór prostych podobszarów (**elementów skończonych**), na jakie obszar ten został podzielony. Funkcje aproksymacyjne są wielomianami algebraicznymi, wyznaczonymi według zasad aproksymacji interpolacyjnej.

### Co to jest MES dla inżyniera?

**MES** jest numeryczną metodą obliczeniową, pozwalającą na znalezienie w sposób przybliżony i dyskretny funkcji rozwiązujących problem brzegowy. W przypadku interesujących nas zadań liniowej teorii sprężystości (mechanika ciała stałego), szukaną funkcją będą przemieszczenia, zatem będziemy mogli wyznaczyć również odkształcenia i naprężenia. Podstawową zaletą metody jest możliwość uzyskiwania wyników dla skomplikowanych kształtów, dla których niemożliwe jest przeprowadzenie obliczeń analitycznych.



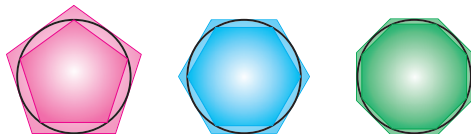
## Dlaczego warto poznać MES?

- Dla wielu praktycznych problemów inżynierskich nie udaje znaleźć się rozwiązania analitycznego (skomplikowany obszar rozwiązanie, nieliniowości).
- Dzięki metodzie numerycznej można łatwo i tanio zrozumieć zachowanie układu i zbadać wpływ różnych parametrów na rozwiązanie przybliżone.
- W modelowaniu można uwzględnić więcej ważnych cech niż gdyby rozwiązanie miało być analityczne.
- Bez zrozumienia fizyki i podstaw teoretycznych MES można uzyskać wyniki, ale nie da się ocenić ich wartości.
- Znajomość MES jest niezbędna dla nowoczesnego inżyniera, bo jest to dominująca technologia obliczeniowa.

Co wiemy o liczbie  $\pi$ ?

- wynosi w przybliżeniu  $\pi \approx 3,1415\dots$ ,
- wyraża iloraz obwodu okręgu i jego średnicy,
- ma święto 14 marca (03.14).

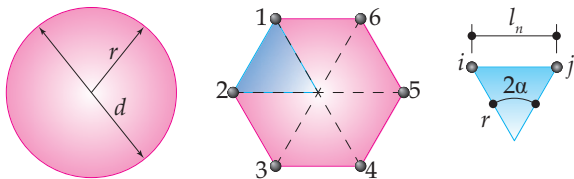
Jak obliczyć wartość liczby  $\pi$ ?



Pomysł Archimedesesa (250BC): średnia arytmetyczna z obwodu wielokątów wpisanego i opisanego na okręgu odniesiona do średnicy okręgu. Wykonał obliczenia dla wielokąta o 96 bokach. Otrzymał wynik

$$\pi \in \left(3\frac{10}{71}; 3\frac{1}{7}\right) \Rightarrow \pi \approx 3,1418\dots$$

Metoda podobna, choć troszkę nowsza.



Możemy napisać

$$l \approx n \cdot l_n,$$

$$2\alpha = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{2n},$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1/2 l_n}{r} \Rightarrow l_n = 2r \sin(\alpha),$$

$$\pi = \frac{l}{d} = \frac{l}{2r}, \Rightarrow \pi \approx \frac{n \cdot l_n}{2r} = \frac{n \cdot 2r \sin(\alpha)}{2r} = n \sin(\alpha).$$

Policzmy

$$\begin{aligned}
 n = 1, & \quad \alpha = 180^0, & \quad \sin(\alpha) = 0, & \quad \pi \approx 0, \\
 n = 2, & \quad \alpha = 90^0, & \quad \sin(\alpha) = 1, & \quad \pi \approx 2, \\
 n = 3, & \quad \alpha = 60^0, & \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \quad \pi \approx 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,5981, \\
 n = 4, & \quad \alpha = 45^0, & \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \quad \pi \approx 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,8284, \\
 & \dots & & 
 \end{aligned}$$

Kolejne przybliżenia wartości liczby  $\pi$ :

$n$	$\pi$	$n$	$\pi$
1	0,0000000000000000	64	3,140331156954753
2	2,0000000000000000	128	3,141277250932773
4	2,828427124746190	256	3,141513801144301
8	3,061467458920718	512	3,141572940367091
16	3,121445152258052	1024	3,141591421511200
32	3,136548490545939	2048	3,141592345570118

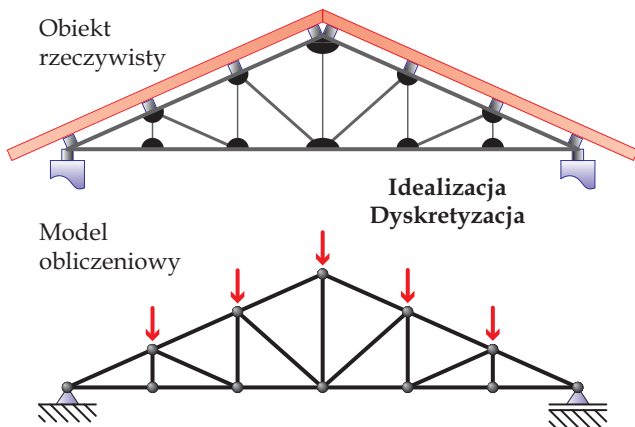
Co ma MES do  $\pi$ ?

MES = dyskretyzacja + aproksymacja (interpolacja)

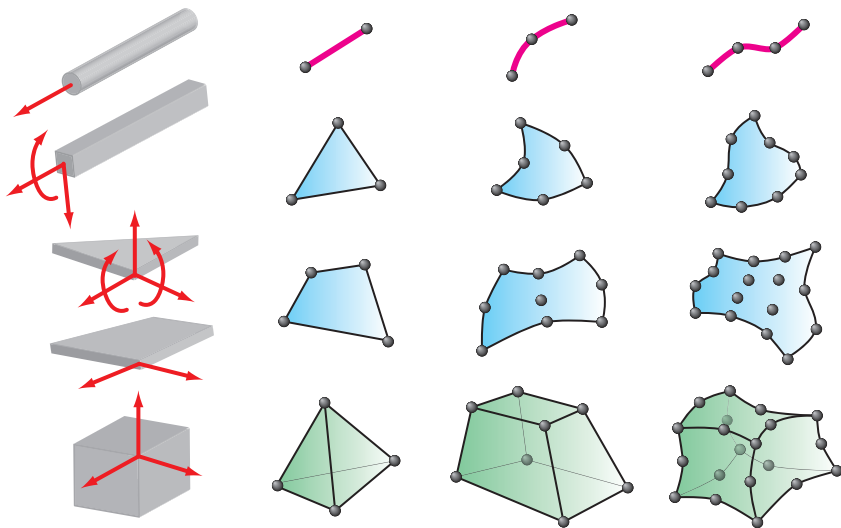
Postępowanie MES dla problemów mechaniki:

- dzielimy konstrukcję na proste fragmenty, które nazwiemy **elementami skończonymi**, elementy skończone są połączone ze sobą we wspólnych w węzłach,
- **formułujemy zagadnienie** dla każdego elementu skończonego, czyli w przypadku mechaniki określamy równania równowagi rozwiązania przybliżonego (zależności pomiędzy naprężeniami lub siłami uogólnionymi a przemieszczeniami w węzłach),
- składamy elementy skończone i **rozwiązujemy całe zagadnienie** uwzględniając warunki zgodności przemieszczeń w węzłach, warunki równowagi, warunki brzegowe, w wyniku tego wyznaczamy przemieszczenia w węzłach,
- dla każdego elementu skończonego, znając jego przemieszczenia, obliczamy siły, odkształcenia, naprężenia działające w elemencie.

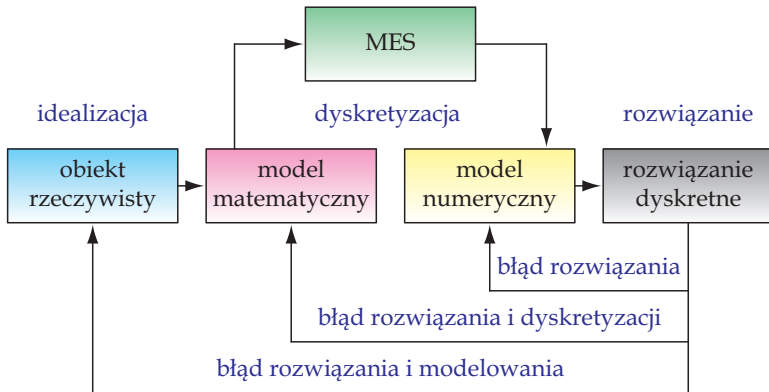
## Idealizacja i dyskretyzacja konstrukcji



## Przykłady elementów skończonych.



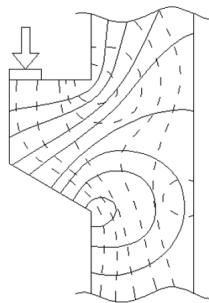
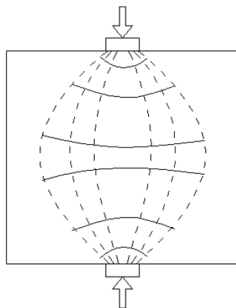
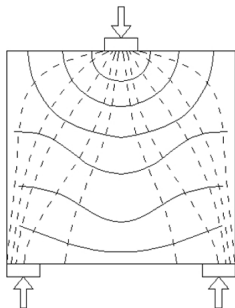
## Błędy w modelowaniu MES



- Błąd modelowania.
- Błąd dyskretyzacji.
- Błąd rozwiązania.



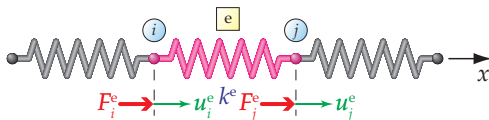
## Rozumienie działania konstrukcji



## Uwaga!

Dla potrzeb zrozumienia podstawowych etapów procedury MES, znalezienia pewnych cech charakterystycznych ilustrujących metodę MES i zdefiniowania pewnych pojęć związanych z MES, **tymczasowo** potraktujemy metodę jako sposób bezpośredniego budowania równań równowagi konstrukcji, przez rozważenie równowagi pewnych podobszarów, a następnie ich złożenie w jeden, globalny układ równań równowagi.

Przykładem najprostszego elementu skończonego może być sprężyna o sztywności  $k$ .



Podstawowe parametry elementu skończonego:

- **węzły**:  $i, j$  (oznaczenie **lokalne**, związane z elementem skończonym),
- **sztywność**:  $k^e$ ,
- **przemieszczenia** w węzłach:  $u_i^e, u_j^e$  (oznaczenie **lokalne**),
- **siły** w węzłach:  $F_i^e, F_j^e$  (oznaczenie **lokalne**).

Związek siły z przemieszczeniem możemy napisać w postaci

$$F^e = k^e \cdot \Delta u^e,$$

$$\Delta u^e = u_j^e - u_i^e.$$

Korzystając z warunku równowagi, możemy napisać

$$F_i^e + F_j^e = 0 \Rightarrow F_j^e = -F_i^e = F^e,$$

i dla każdego z dwóch węzłów

$$F_i^e = -F^e = -k^e (u_j^e - u_i^e) = k^e \cdot u_i^e - k^e \cdot u_j^e,$$

$$F_j^e = F^e = k^e (u_j^e - u_i^e) = -k^e \cdot u_i^e + k^e \cdot u_j^e.$$

Zapiszmy ten układ w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix}.$$

Po oznaczeniu

$$\mathbf{K}^e \equiv \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}^e \equiv \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^e \equiv \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix},$$

układ równań będzie miał formę

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e,$$

gdzie:

- $\mathbf{K}^e$  – macierz sztywności elementu skończonego,
- $\mathbf{u}^e$  – wektor przemieszczeń elementu skończonego,
- $\mathbf{F}^e$  – wektor sił węzłowych elementu (obciążenie, reakcje).

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix},$$

### Spostrzeżenia:

- macierz sztywności  $\mathbf{K}^e$  jest symetryczna  $\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}^e)^T$ ,
- policzmy wyznacznik macierzy sztywności

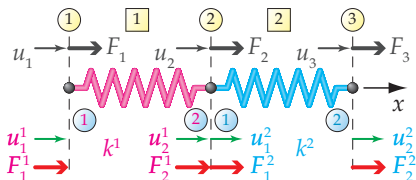
$$|\mathbf{K}^e| = k^e \cdot k^e - (-k^e)(-k^e) = (k^e)^2 - (k^e)^2 = 0,$$

Co to oznacza? Czy możemy rozwiązać równania? Jaka jest interpretacja fizyczna?

Warto zaznaczyć, że wystarczy podać tylko jeden warunek brzegowy dla przemieszczenia  $u^e$ , żeby rozwiązać równania.

Jeżeli  $u_i^e = 0$  (zamocowaliśmy koniec  $i$  sprężyny), to  $u_j^e = \frac{F^e}{k^e}$ .

Rozważmy układ dwóch sprężyn



Dla każdego elementu skończonego, możemy napisać układ równań równowagi (używamy oznaczeń **lokalnych**)

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

W każdym węźle oznaczymy przemieszczenia (korzystamy z warunku zgodności przemieszczeń w węźle 2)

$$u_1 = u_1^1,$$

$$u_2 = u_2^1 = u_1^2,$$

$$u_3 = u_2^2,$$

i siły, korzystając z warunku równowagi

$$F_1 = F_1^1,$$

$$F_2 = F_2^1 + F_1^2,$$

$$F_3 = F_2^2,$$

co prowadzi do zależności

$$F_1 = k^1 u_1 - k^1 u_2,$$

$$F_2 = -k^1 u_1 + k^1 u_2 + k^2 u_2 - k^2 u_3,$$

$$F_3 = -k^2 u_2 + k^2 u_3.$$



Po przekształceniu otrzymamy

$$F_1 = k^1 u_1 - k^1 u_2,$$

$$F_2 = -k^1 u_1 + (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3,$$

$$F_3 = -k^2 u_2 + k^2 u_3.$$

Wykorzystując powyższe równania, równania równowagi dla elementów skończonych w zapisie macierzowym będą miały postać

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv u_1^1 \\ u_2 \equiv u_2^1 = u_1^2 \\ u_3 \equiv u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \equiv F_1^1 \\ F_2 \equiv F_2^1 + F_1^2 \\ F_3 \equiv F_2^2 \end{bmatrix},$$

lub krótko

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F},$$

gdzie:

- $\mathbf{K}$  – globalna macierz sztywności,
- $\mathbf{u}$  – globalny wektor przemieszczenia,
- $\mathbf{F}$  – globalny wektor sił węzłowych.

Zapiszmy wkład równań równowagi dla elementu skończonego, rozszerzając macierze i wektory w taki sposób, aby zawierały wszystkie globalne przemieszczenia

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$



$$\begin{cases} k^1 u_1 - k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_1^1 \\ -k^1 u_1 + k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_2^1, \\ 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0 \end{cases}$$

i w podobny sposób dla drugiego elementu skończonego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Po dodaniu układów otrzymamy

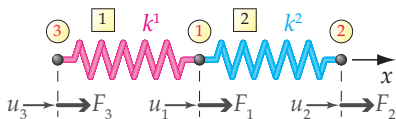
$$\left( \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix},$$

czyli taki sam wynik jak poprzednio.

Powyższa operacja składania **lokalnych** (dla pojedynczych elementów skończonych) układów równań równowagi do jednego **globalnego** (dla wszystkich elementów skończonych) układu równań równowagi nazywa się **agregacją**.

Należy zwrócić szczególną uwagę na sposób **numerowania węzłów**, który istotnie wpływa na wynikowe równania równowagi.

Jeśli ponumerujemy węzły jak na rysunku

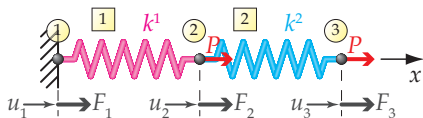


nowe macierze sztywności i nowy układ równań będą miały postać

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} k^1 & 0 & -k^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k^1 & 0 & k^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 & 0 \\ -k^2 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k^1 + k^2 & -k^2 & -k^1 \\ -k^2 & k^2 & 0 \\ -k^1 & 0 & k^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiążmy układ dwóch sprężyn, z zamocowaną sprężyną 1 i obciążony dwiema siłami  $P$ .



Rozszerzone układy równań równowagi MES dla poszczególnych sprężyn będą miały postać

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Po agregacji układ równań dla układu sprężyn można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \equiv P \\ F_3 \equiv P \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k^1 \cdot 0 - k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_1 \\ -k^1 \cdot 0 + (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3 = P \\ 0 \cdot 0 - k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases}.$$

Układ równań zawierający tylko zmienne pierwotne będzie miał postać

$$\begin{bmatrix} k^1 + k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3 = P \\ -k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases}.$$

Po pewnych przekształceniach otrzymamy

$$\begin{cases} k^1 u_2 = 2P \\ -k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases} .$$

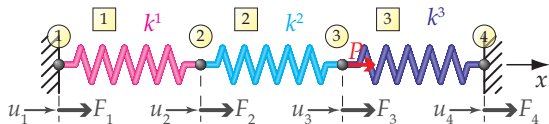
i dodatkowo

$$-k^1 u_2 = F_1.$$

Rozwiązanie układu wynosi

$$u_2 = \frac{2P}{k^1}, \quad u_3 = \frac{2P}{k^1} + \frac{P}{k^2}, \quad F_1 = -2P.$$

Rozważmy układ trzech sprężyn.



Przyjmijmy następujące dane:

- sztywności sprężyn:  
 $k^1 = 100 \text{ N/mm}$ ,  
 $k^2 = 200 \text{ N/mm}$ ,  
 $k^3 = 100 \text{ N/mm}$ ,
- siła  $P = 500 \text{ N}$ .

Macierze sztywności elementów będą wynosiły odpowiednio

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix},$$

a globalna macierz sztywności

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100 + 200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200 + 100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}.$$



## Globalny układ równań MES

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \equiv 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \equiv 0 \\ F_3 \equiv 500 \\ F_4 \end{bmatrix}.$$

Układ równań zawierające tylko zmienne pierwotne będzie wynosił

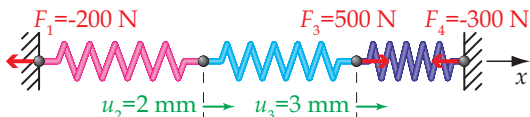
$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \end{bmatrix},$$

i dodatkowo

$$\begin{cases} -100u_2 = F_1 \\ -100u_3 = F_4 \end{cases}.$$

Rozwiązanie układu wynosi

$$u_2 = 2 \text{ mm}, \quad u_3 = 3 \text{ mm}, \quad F_1 = -200 \text{ N} \quad F_4 = -300 \text{ N}.$$



Sprawdźmy poprawność obliczonych reakcji:

$$P + F_1 + F_4 = 0 \Rightarrow 500 - 200 - 300 = 0.$$

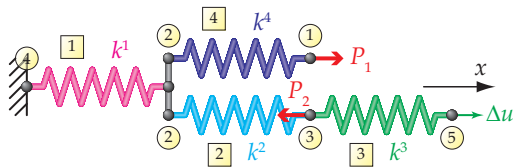
Jakie wartości osiągają siły  $F_1^2$  i  $F_2^2$  działające na sprężynę 2:

$$\mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{F}^2,$$

$$\begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \equiv u_1^2 \\ u_3 \equiv u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Procedura **agregacji** raz jeszcze.



Zbudujmy macierz topologii łączącą **lokalne numery węzłów** elementów skończonych  $i$  i  $j$  z **globalnymi numerami węzłów**.

Element	Węzeł $i = 1$	Węzeł $j = 2$
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

Element	Węzeł $i = 1$	Węzeł $j = 2$
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

Macierze sztywności poszczególnych elementów wynoszą

$$\mathbf{K}^1 = \begin{matrix} & 4 & 2 \\ 4 & \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \\ 2 & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix},$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{matrix} & 2 & 3 \\ 2 & \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \\ 3 & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix},$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{matrix} & 3 & 5 \\ 3 & \begin{bmatrix} k^3 & -k^3 \\ -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \\ 5 & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix},$$

$$\mathbf{K}^4 = \begin{matrix} & 2 & 1 \\ 2 & \begin{bmatrix} k^4 & -k^4 \\ -k^4 & k^4 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}.$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} & \left[ \begin{array}{cc} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}, \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

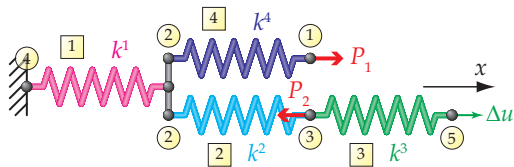
$$\mathbf{K}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \left[ \begin{array}{cc} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}, \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} & \left[ \begin{array}{cc} k^3 & -k^3 \\ -k^3 & k^3 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}, \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{K}^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \left[ \begin{array}{cc} k^4 & -k^4 \\ -k^4 & k^4 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}. \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

Zagregowana macierz sztywności będzie miała postać

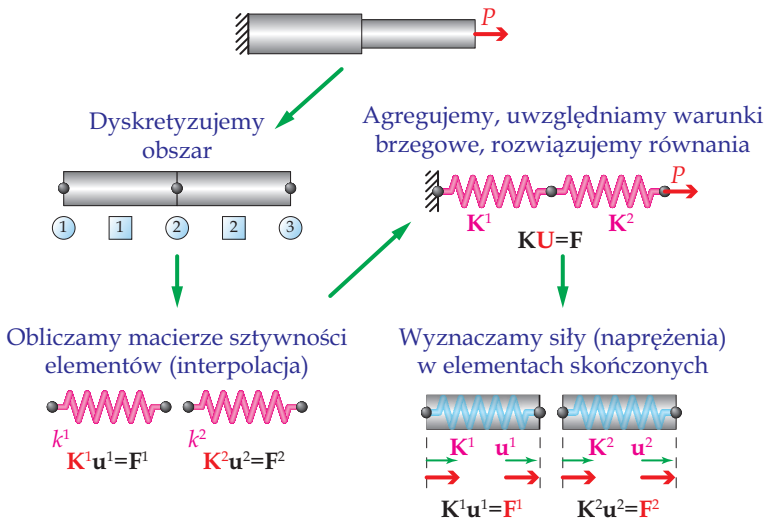
$$\mathbf{K} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[ \begin{array}{ccccc} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$



Końcowy, globalny układ równań

$$\begin{bmatrix}
 k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\
 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\
 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\
 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \equiv 0 \\
 U_5 \equiv \Delta u
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \equiv P_1 \\
 F_2 \equiv 0 \\
 F_3 \equiv -P_2 \\
 F_4 \\
 F_5
 \end{bmatrix}
 .$$

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES**
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony



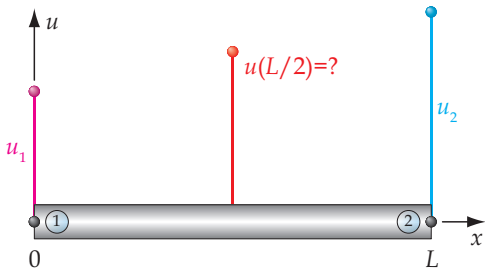


Rozwiązanie typowego problemu metodą elementów skończonych jest realizowane w następujących etapach:

- **dyskretyzacja** (podział obszaru na podobszary), wynikiem której jest zastąpienie obszaru zbiorem elementów skończonych; liczba, kształt i typ elementu zależą od rozwiązywanego problemu; w tym etapie ustala się liczbę elementów skończonych, liczbę i współrzędne węzłów oraz tablicę **topologii** (incydencji),
- **wyznaczenie równań MES** dla elementów; sformułowanie równania; aproksymacja nieznanymi funkcjami w elementach,
- **agregacja** (złożenie) elementów, czyli budowa układu równań przy wykorzystaniu warunku zgodności zmiennych węzłowych oznaczającego, że wartości tych zmiennych we wspólnym węźle są takie same; otrzymujemy układ równań MES całego problemu,
- **uwzględnienie naturalnych i podstawowych warunków brzegowych**, czyli wprowadzenie ich do zagregowanego układu równań,
- **rozwiązanie równań** ze względu na niewiadome węzłowe,
- **obliczenie dodatkowych wielkości**, czyli obliczenie wartości funkcji rozwiązania i ich pochodnych, w innych niż węzły punktach obszaru.

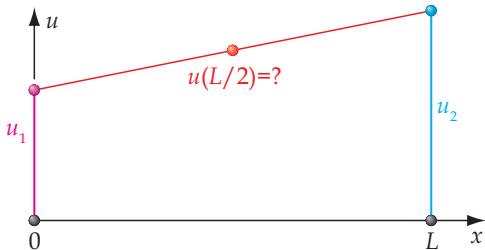
- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu**
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony

Po rozwiązaniu równań MES, otrzymamy wartości szukanych przemieszczeń (lub innych niewiadomych) w węzłach.



Jak wyznaczyć przemieszczenie (lub inną niewiadomą) w środku elementu skończonego?

- możemy zwiększyć liczbę elementów skończonych, tak aby w interesującym miejscu znalazł się węzeł,
- możemy założyć jakiś sposób zmiany interesującego nas przemieszczenia w elemencie i opisać go funkcją (**aproksymacja, interpolacja**).



W drugim przypadku, najprostszą funkcją może być funkcja **liniowa** w postaci  $u(x) = ax + b$ . Dla elementu o długości  $L$ , musi spełniać następujące warunki:

- na początku elementu skończonego, czyli dla  $x = 0$  musi mieć wartość  $u_1$

$$u(0) = a \cdot 0 + b = u_1,$$

- na końcu elementu skończonego, dla  $x = L$  musi mieć wartość  $u_2$

$$u(L) = a \cdot L + b = u_2.$$

Powyższe równania pozwolą nam wyznaczyć nieznanne współczynniki  $a$  i  $b$ , które wynoszą

$$a = \frac{u_2 - u_1}{L},$$

$$b = u_1,$$

funkcja opisująca wartość przemieszczenia w elemencie będzie miała postać

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1.$$

### Spostrzeżenia:

- łatwo obliczyć takie funkcje,
- każdy element będzie miał inną funkcję aproksymacyjną,
- jeśli element będzie miał jeszcze jakieś inne **stopnie swobody** (np. przemieszczenia w innych płaszczyznach, kąty obrotu) to trzeba wyznaczyć funkcję dla każdego stopnia swobody,
- współczynnik  $a$  nie ma fizycznej interpretacji.

Czy można inaczej (**lepiej**)?

Przekształćmy naszą funkcję

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1 = \frac{u_2}{L}x - \frac{u_1}{L}x + u_1 = u_1 \left(1 - \frac{1}{L}x\right) + u_2 \left(\frac{1}{L}x\right),$$

po oznaczeniu

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L},$$

będziemy mogli napisać

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2.$$

Funkcja  $u(x)$  teraz jest kombinacją liniową wyrażeń  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  i przemieszczeń w węzłach  $u_1$  i  $u_2$ .

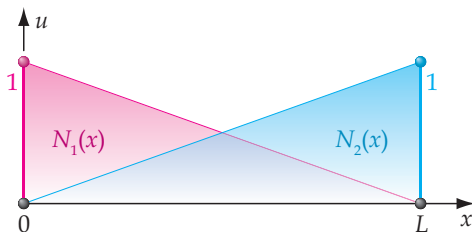
Sprawdźmy własności wyrażień  $N_1(x)$  i  $N_2(x)$  w węzłach:

- dla  $x = 0$

$$N_1(0) = 1 - \frac{0}{L} = 1, \quad N_2(0) = \frac{0}{L} = 0,$$

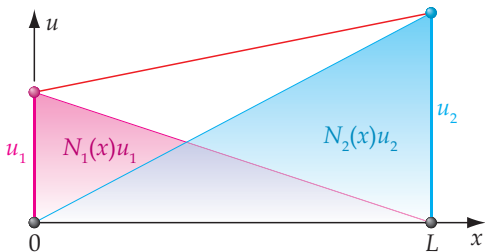
- dla  $x = L$

$$N_1(L) = 1 - \frac{L}{L} = 1 - 1 = 0, \quad N_2(L) = \frac{L}{L} = 1.$$



Otrzymane funkcje  $N_1(x)$  i  $N_2(x)$  są liniowymi funkcjami interpolacyjnymi Lagrange'a. W MES funkcje interpolacyjne noszą nazwę **funkcji kształtu**.

Stosuje się też inne rodzaje funkcji interpolacyjnych, np. Hermita, Serendipa.





Ogólną postać interpolacji Lagrange'a można napisać w formie

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^n N_{n,i}(x)u_i = N_{n,0}(x)u_0 + N_{n,1}(x)u_1 + N_{n,2}(x)u_2 + \dots + N_{n,n}(x)u_n,$$

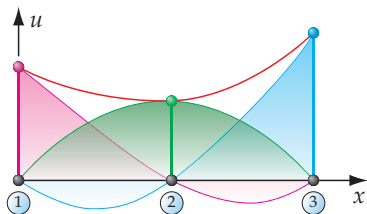
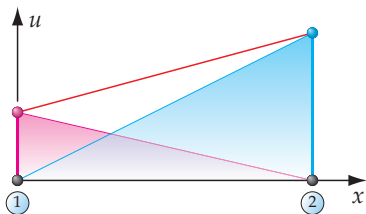
gdzie  $n$  określa stopień wielomianu interpolacyjnego, a  $i$  to numer funkcji.

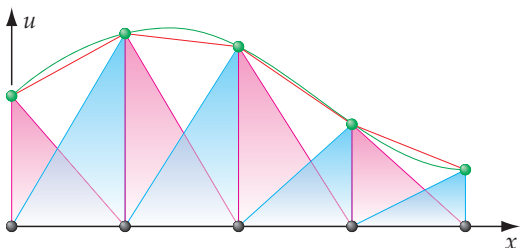
### Spostrzeżenia:

- otrzymana forma funkcji  $u(x)$  ma przejrzystą strukturę, składa się z podobnych części,
- każda część to iloczyn przemieszczenia w węźle  $u_i$  (wartość, która ma interpretację fizyczny) i funkcji kształtu  $N_i(x)$ ,
- wartość funkcji kształtu  $N_i(x)$  przedstawia wkład przemieszczenia  $u_i$  do wartości przemieszczenia  $u(x)$  wewnątrz elementu,
- funkcje  $N_i(x)$  będą takie same dla wszystkich elementów tego samego typu (zależą tylko od jego długości)
- funkcje  $N_i(x)$  będą takie same dla każdego stopnia swobody.

Funkcje interpolacyjne Lagrange'a (funkcje bazowe Lagrange'a) mają postać ogólną

$$N_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$



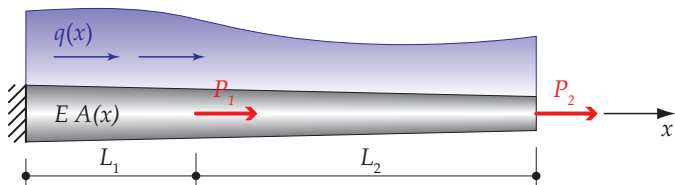


### Spostrzeżenia:

- używanie elementów skończonych z taką interpolacją funkcji przemieszczenia powoduje zastąpienie realnego rozkładu linią łamaną,
- w ten sposób można przybliżyć każdą funkcję ciągłą z dowolną dokładnością,
- im więcej elementów, tym lepiej.

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta**
- 8 Belkowy element skończony

Rozwiążmy problem pręta rozciąganego o zmiennym polu przekroju, obciążony dwoma siłami skupionymi  $P_1$ ,  $P_2$  i obciążeniem ciągłym  $q(x)$



Całkowita energia potencjalna obciążonego pręta (przypadek jednowymiarowy)

$$\Pi = U - L,$$

gdzie  $U$  jest energią sprężystą,

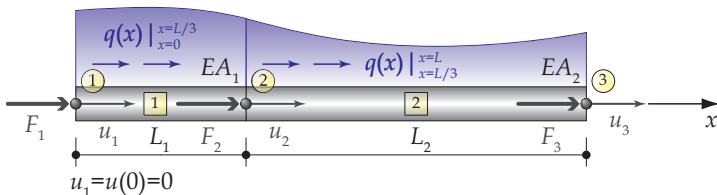
$$U = \frac{1}{2} E \int_0^L A(x) (u'(x))^2 dx,$$

a  $L$  jest pracą obciążeń zewnętrznych

$$L = \int_0^L q(x)u(x) dx + \sum_{i=1}^n F_i Q_i.$$

Siły  $F_i$  są uogólnionymi siłami węzłowymi, a  $Q_i$  są uogólnionymi przemieszczeniami na kierunkach tych sił.

Biorąc pod uwagę geometrię i sposób obciążenia pręta, możemy go zdyskretyzować w następujący sposób



Następnie zdefiniujemy globalny wektor stopni swobody  $\mathbf{Q}$  ( $\{\bullet\}$  – oznaczają wektor kolumnowy,  $\{\bullet\}^T \equiv [\bullet]$ )

$$\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3\} \equiv \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\},$$

i globalny wektor sił węzłowych  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3\}.$$

W wektorze  $\mathbf{Q}$  zawarte są:

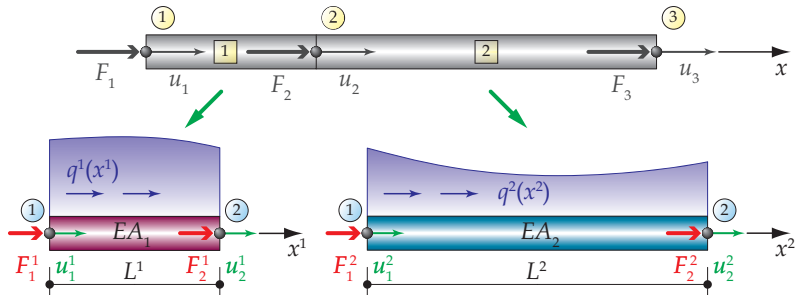
- kinematyczny (podstawowy) warunek brzegowy  $Q_1 \equiv u_1 = 0$ ,
- niewiadome kinematyczne (pierwotne)  $Q_2$  i  $Q_3$ .

W wektorze  $\mathbf{F}$  zawarte są:

- statyczne (naturalne) warunki brzegowe  $F_2 = P_1$  i  $F_3 = P_2$ ,
- niewiadoma statyczna (wtórna)  $F_1$ .

Będziemy korzystać z tego, że całkowita energia potencjalna pręta jest sumą energii potencjalnej części pręta (elementów skończonych)

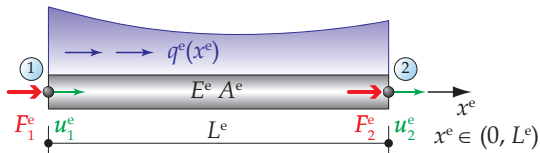
$$\Pi = \sum_{e=1}^m \Pi^e = \Pi^1 + \Pi^2.$$



i rozważmy dowolny element skończony pręta. Dla wygody wprowadźmy lokalne układy współrzędnych związane z elementami  $x^e$ .



W elemencie skończonym



zdefiniujemy wektor stopni swobody elementu  $\mathbf{Q}^e$

$$\mathbf{Q}^e = \{Q_1^e \quad Q_2^e\} \equiv \{u_1^e \quad u_2^e\},$$

i sił węzłowych  $\mathbf{F}^e$

$$\mathbf{F}^e = \{F_1^e \quad F_2^e\}.$$

Przyjmijmy interpolację nieznaną funkcji przemieszczenia  $u^e(x^e)$  w formie

$$u^e(x^e) = N_1^e(x^e)u_1^e + N_2^e(x^e)u_2^e = N_1^e(x^e)Q_1^e + N_2^e(x^e)Q_2^e.$$

Skorzystamy z zapisu macierzowego

$$u^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e)\mathbf{Q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e(x^e))^T,$$

gdzie  $\mathbf{N}^e(x^e)$  ma postać

$$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e) \quad N_2^e(x^e)],$$

a  $N_1^e(x^e)$  i  $N_2^e(x^e)$  są funkcjami kształtu Lagrange'a

$$N_1^e(x^e) = 1 - \frac{x^e}{L^e}, \quad N_2^e(x^e) = \frac{x^e}{L^e}.$$

Pochodna funkcji przemieszczenia będzie miała postać

$$u'^e(x^e) = \mathbf{N}'^e(x^e)\mathbf{Q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}'^e(x^e))^T,$$

gdzie

$$\mathbf{N}'^e(x^e) = [N_1'^e(x^e) \quad N_2'^e(x^e)],$$

i

$$N_1'^e(x^e) = -\frac{1}{L^e}, \quad N_2'^e(x^e) = \frac{1}{L^e}.$$

Zakładamy stały przekrój poprzeczny elementu skończonego prętowego  $A^e$  (może być inny w różnych elementach). Całkowita energia potencjalna elementu skończonego prętowego  $e$  wynosi

$$\Pi^e = \frac{1}{2} E^e A^e \int_0^{L^e} (u'^e(x^e))^2 dx^e - \int_0^{L^e} q^e(x^e) u^e(x^e) dx^e - F_1^e Q_1^e - F_2^e Q_2^e.$$

Wykorzystując interpolację, energię potencjalną można zapisać

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2} E^e A^e \int_0^{L^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}'^e)^T \mathbf{N}'^e \mathbf{Q}^e dx^e - \int_0^{L^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e - (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{F}^e = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \left\{ E^e A^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}'^e)^T \mathbf{N}'^e dx^e \right\} \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \left\{ \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e + \mathbf{F}^e \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{ \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e \}. \end{aligned}$$

We wzorze

$$\Pi^e = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{\mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e\},$$

oznaczono:

- **macierz sztywności** prętowego elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = E^e A^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}'^e(x^e))^T \mathbf{N}'^e(x^e) dx^e,$$

- **wektor węzłowych równoważników obciążenia** prętowego elementu skończonego

$$\mathbf{P}^e = \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e(x^e) dx^e,$$

- **wektor sił węzłowych** prętowego elementu skończonego  $\mathbf{F}^e$ ,
- **wektor stopni swobody** (niewiadome pierwotne, przemieszczenia w węzłach) prętowego elementu skończonego  $\mathbf{Q}^e$ .

Po wykorzystaniu interpolacji  $u^e(x^e)$ , całkowita energia potencjalna elementu jest teraz funkcją wielu (w naszym przypadku dwóch) zmiennych  $\Pi^e(Q_1^e, Q_2^e)$  i warunek konieczny stanu równowagi (minimum energii potencjalnej) jest następujący

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_1^e} = 0 \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_2^e} = 0 \end{array} \right\} \equiv \frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{Q}^e} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}^e} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{ \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e \} \right) = 0,$$

co prowadzi do równań równowagi MES dla prętowego elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e,$$

lub

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{R}^e,$$

gdzie zdefiniowano **całkowity wektor obciążenia** elementu skończonego

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e.$$

Jeśli przyjmiemy, że  $E^e = \text{const.}$  i  $A^e = \text{const.}$  to

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^e &= E^e A^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}'^e(x^e))^T \mathbf{N}'^e(x^e) dx^e = E^e A^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} \\ \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix} dx^e = \\
 &= E^e A^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} \frac{1}{(L^e)^2} & -\frac{1}{(L^e)^2} \\ -\frac{1}{(L^e)^2} & \frac{1}{(L^e)^2} \end{bmatrix} dx^e = E^e A^e \begin{bmatrix} \frac{x^e}{(L^e)^2} & -\frac{x^e}{(L^e)^2} \\ -\frac{x^e}{(L^e)^2} & \frac{x^e}{(L^e)^2} \end{bmatrix} \Bigg|_0^{L^e} = \\
 &= E^e A^e \begin{bmatrix} \frac{1}{L^e} & -\frac{1}{L^e} \\ -\frac{1}{L^e} & \frac{1}{L^e} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{K}^e &= \begin{bmatrix} \frac{E^e A^e}{L^e} & -\frac{E^e A^e}{L^e} \\ -\frac{E^e A^e}{L^e} & \frac{E^e A^e}{L^e} \end{bmatrix}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że  $q^e = \text{const.}$  to

$$\mathbf{P}^e = q^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e = q^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{L^e} \\ x^e \\ \frac{x^e}{L^e} \end{bmatrix} dx^e = q^e \left[ \begin{array}{c} x^e - \frac{(x^e)^2}{2L^e} \\ \frac{(x^e)^2}{2L^e} \end{array} \right] \Big|_0^{L^e} = q^e \begin{bmatrix} \frac{L^e}{2} \\ \frac{L^e}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} \frac{q^e L^e}{2} \\ \frac{q^e L^e}{2} \end{bmatrix}.$$

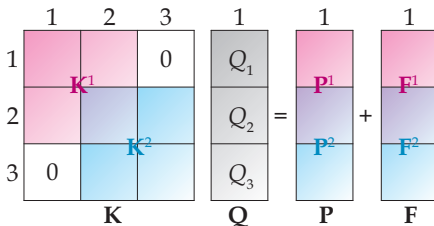
Wykorzystaliśmy fakt, że całkowita energia potencjalna pręta jest sumą energii potencjalnych elementów skończonych i zajmowaliśmy się jednym elementem skończonym. Kolejnym krokiem jest agregacja, która pozwoli wyrazić man energię potencjalną całego pręta poprzez nieznanne wielkości globalne zawarte w wektorze  $\mathbf{Q}$ .

Posłużymy się macierzą topologii w postaci

Element	Węzeł 1	Węzeł 2
1	1	2
2	2	3

Warunki ciągłości przemieszczeń we wspólnych węzłach elementów skończonych pozwolą nam napisać

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 = Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix}.$$





	1	2	3	1	1	1
1	K <sup>1</sup>	0	0	Q <sub>1</sub>	P <sup>1</sup>	F <sup>1</sup>
2	0	K <sup>2</sup>	0	Q <sub>2</sub>	P <sup>2</sup>	F <sup>2</sup>
3	0	0	K <sup>3</sup>	Q <sub>3</sub>	P <sup>3</sup>	F <sup>3</sup>
	K			Q	P	F

Globalna macierz sztywności będzie miała postać

$$\mathbf{K} = \underset{e=1}{\overset{n}{\mathbf{A}}} \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Globalne wektory węzłowych równoważników obciążenia i sił węzłowych

$$\mathbf{P} = \underset{e=1}{\overset{n}{\mathbf{A}}} \mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \underset{e=1}{\overset{n}{\mathbf{A}}} \mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Układ równań MES zapiszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu równań wymaga uwzględnienia warunków brzegowych

$$Q_1 = u(0) = 0, \quad F_2 = P_1, \quad F_3 = P_2,$$

ostatecznie będziemy mogli zapisać

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu układu równań MES, otrzymamy wartości przemieszczeń w węzłach  $Q_2$  i  $Q_3$  oraz wartość siły  $F_1$ .

Pamiętając o tym, że

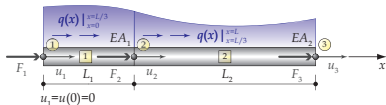
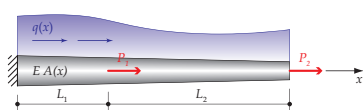
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 = Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix},$$

i wykorzystując interpolację

$$u^e(x^e) = N_1^e(x^e)Q_1^e + N_2^e(x^e)Q_2^e = \left(1 - \frac{x^e}{L^e}\right) Q_1^e + \left(\frac{x^e}{L^e}\right) Q_2^e,$$

będziemy mogli zapisać szukaną funkcję przemieszczeń dla elementów

$$u(x) = \begin{cases} u^1(x^1) = \left(1 - \frac{x^1}{L^1}\right) Q_1 + \left(\frac{x^1}{L^1}\right) Q_2 & \text{dla } e = 1, \\ u^2(x^2) = \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) Q_2 + \left(\frac{x^2}{L^2}\right) Q_3 & \text{dla } e = 2. \end{cases}$$



Przyjmijmy następujące dane:

- $L_1 = 0,4 \text{ m}$ ,
- $L_2 = 0,8 \text{ m}$ ,
- $A_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,
- $A_2 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,
- $E = 200 \text{ GPa}$ ,
- $q = 10 \text{ kN/m}$ ,
- $P_1 = 40 \text{ kN}$ ,
- $P_2 = 5 \text{ kN}$ .

**Element e = 1:**  $E^1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $A^1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $L^1 = 0,4 \text{ m}$ ,  $q^1 = 10 \text{ kN/m}$ ,

$$\mathbf{K}^1 = 10^6 \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^1 = 10^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Element**  $e = 2$ :  $E^2 = 200 \text{ GPa}$ ,  $A^1 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $L^2 = 0,8 \text{ m}$ ,  $q^2 = 10 \text{ kN/m}$ ,

$$\mathbf{K}^2 = 10^6 \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = 10^3 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Globalna macierz sztywności i globalny wektor równoważników obciążenia

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{bmatrix} 250 & -250 & 0 \\ -250 & 350 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

globalny wektor sił węzłowych

$$\mathbf{F} = 10^3 \begin{bmatrix} F_1 \\ 40 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Układ równań równowagi MES, po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$10^6 \begin{bmatrix} 250 & -250 & 0 \\ -250 & 350 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} F_1 \\ 40 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Z równania 2 i 3 wyznaczmy niewiadome pierwotne (przemieszczenia)

$$Q_2 = 0,00022 \text{ m}, \quad Q_3 = 0,00031 \text{ m}.$$

Następnie z równania 1 wyznaczmy niewiadomą wtórną (reakcja)

$$F_1 = -250 \cdot 10^6 \cdot Q_2 - 2 \cdot 10^3 = -250 \cdot 10^6 \cdot 0,00022 - 2 \cdot 10^3 = -57 \text{ kN}.$$

Globalny wektor przemieszczeń będzie wynosił

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00022 \\ 0,00031 \end{bmatrix},$$

a przemieszczenia w elementach

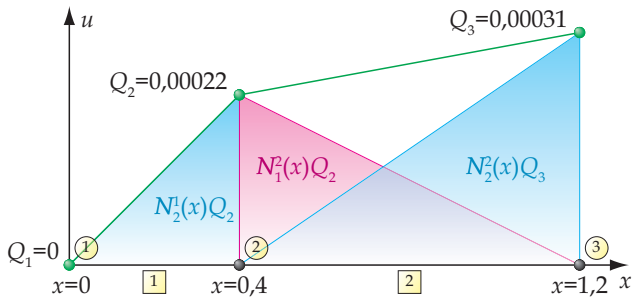
$$\mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00022 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00022 \\ 0,00031 \end{bmatrix}.$$

Funkcja przemieszczeń dla elementów

$$u(x) = \begin{cases} u^1(x^1) = \left(\frac{x^1}{0,4}\right) 0,00022 & \text{dla } e = 1, \\ u^2(x^2) = \left(1 - \frac{x^2}{0,8}\right) 0,00022 + \left(\frac{x^2}{0,8}\right) 0,00031 & \text{dla } e = 2. \end{cases}$$

## Przemieszczenia pręta





Siły węzłowe w elementach można obliczyć dwoma sposobami.

### Sposób 1. Różniczkowanie funkcji kształtu.

Korzystając z zależności

$$F = A\sigma, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du(x)}{dx},$$

możemy napisać

$$F = AE \frac{du(x)}{dx},$$

czyli dla obu elementów

$$F^1(x^1) = EA^1 u'^1(x) = EA^1 (N_1^1(x^1)Q_1 + N_2^1(x^1)Q_2),$$

$$F^2(x^2) = EA^2 u'^2(x) = EA^2 (N_1^2(x^2)Q_2 + N_2^2(x^2)Q_3).$$

**Element**  $e = 1$ ,  $L^1 = 0,4 \text{ m}$ ,  $Q_1 = 0 \text{ m}$ ,  $Q_2 = 0,00022 \text{ m}$ ,

$$\begin{aligned}
 F^1(x^1) &= EA^1 \left( \left( -\frac{1}{L^1} \right) Q_1 + \left( \frac{1}{L^1} \right) Q_2 \right) = \\
 &= 200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \left( -\left( \frac{1}{0,4} \right) 0 + \left( \frac{1}{0,4} \right) 0,00022 \right) = 55 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

**Element**  $e = 2$ ,  $L^2 = 0,8 \text{ m}$ ,  $Q_2 = 0,00022 \text{ m}$ ,  $Q_3 = 0,00031 \text{ m}$ ,

$$\begin{aligned}
 F^2(x^2) &= EA^2 \left( \left( -\frac{1}{L^2} \right) Q_2 + \left( \frac{1}{L^2} \right) Q_3 \right) = \\
 &= 200 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \left( -\left( \frac{1}{0,8} \right) 0,00022 + \left( \frac{1}{0,8} \right) 0,00031 \right) = 9 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

**Sposób 2.** Równania równowagi elementu skończonego.

Skorzystamy z zależności

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - \mathbf{P}^e,$$

i napiszemy

$$\mathbf{F}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{Q}^1 - \mathbf{P}^1,$$

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{K}^2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{P}^2.$$

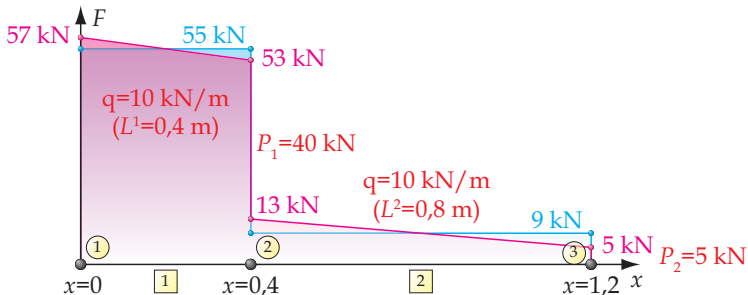
**Element**  $e = 1,$ 

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,000220 \end{bmatrix} - 10^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -57 \\ 53 \end{bmatrix} \text{ kN},$$

**Element**  $e = 2,$ 

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 125 & -125 \\ -125 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,000220 \\ 0,000292 \end{bmatrix} - 10^3 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ kN},$$

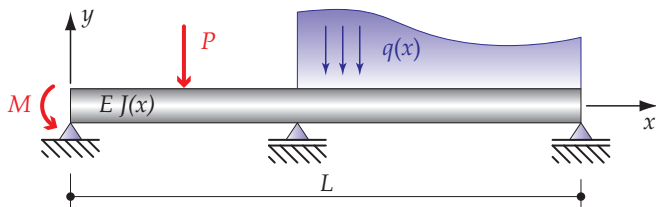
## Siły węzłowe w pręcie



**Uwaga!** Na wykresach sił przekrojowych zwroty sił są związane z przyjętym układem współrzędnych dla elementów skończonych, nie ma to nic wspólnego z konwencją znakowania stosowaną często w wytrzymałości materiałów.

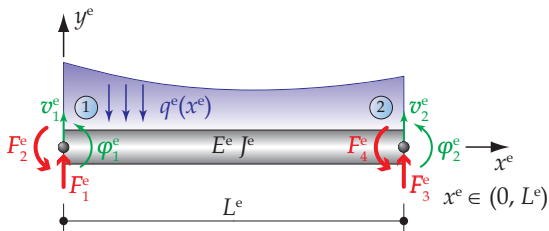
Wyniki otrzymane poprzez różniczkowanie funkcji pierwotnej, są niskiej jakości, (np. nie zapewniają ciągłości na granicach elementów skończonych). Jakość rozwiązania możemy poprawić zwiększając liczbę elementów skończonych lub przez używanie funkcji bazowych wyższych rzędów.

- 1 Uwagi wstępne
- 2 Sformułowanie lokalne problemu brzegowego
- 3 Sformułowanie globalne problemu brzegowego
- 4 Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- 5 Etapy procedury MES
- 6 Funkcje kształtu
- 7 Analiza statyczna MES pręta
- 8 Belkowy element skończony**



Całkowita energia potencjalna belki wynosi

$$\Pi = \frac{1}{2} E \int_0^L J(x) (v''(x))^2 dx - \int_0^L q(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^n F_i Q_i.$$



Zdefiniujmy wektor stopni swobody elementu  $\mathbf{Q}^e$

$$\mathbf{Q}^e = \{Q_1^e \quad Q_2^e \quad Q_3^e \quad Q_4^e\} \equiv \{v_1^e \quad \varphi_1^e \quad v_2^e \quad \varphi_2^e\},$$

i wektor sił węzłowych  $\mathbf{F}^e$

$$\mathbf{F}^e = \{F_1^e \quad F_2^e \quad F_3^e \quad F_4^e\}.$$

Zakładając stały stały moment bezwładności dla całego elementu, całkowita energia potencjalna belkowego elementu skończonego będzie wynosić

$$\Pi^e = \frac{1}{2} E^e J^e \int_0^{L^e} (v''^e(x^e))^2 dx^e - \int_0^{L^e} q^e(x^e) v^e(x) dx^e - F_1^e Q_1^e - F_2^e Q_2^e - F_3^e Q_3^e - F_4^e Q_4^e.$$

Wykorzystując **interpolację Hermite'a** w postaci

$$\begin{aligned} u^e(x^e) &= N_1^e(x^e) v_1^e + N_2^e(x^e) \varphi_1^e + N_3^e(x^e) v_2^e + N_4^e(x^e) \varphi_2^e = \\ &= N_1^e(x^e) Q_1^e + N_2^e(x^e) Q_2^e + N_3^e(x^e) Q_3^e + N_4^e(x^e) Q_4^e = \\ &= \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{Q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e(x^e))^T, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{N}^e(x^e)$  ma postać

$$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e) \quad N_2^e(x^e) \quad N_3^e(x^e) \quad N_4^e(x^e)],$$

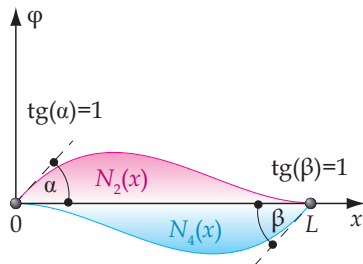
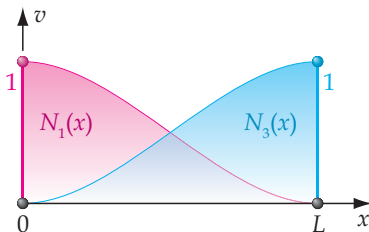
a  $N_1^e(x^e)$ ,  $N_2^e(x^e)$ ,  $N_3^e(x^e)$  i  $N_4^e(x^e)$  są funkcjami kształtu.



Funkcje kształtu Hermite'a mają postać

$$N_1^e(x^e) = 1 - 3 \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^2 + 2 \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^3, \quad N_2^e(x^e) = x^e \left( 1 - 2 \left( \frac{x^e}{L^e} \right) + \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^2 \right),$$

$$N_3^e(x^e) = 3 \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^2 - 2 \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^3, \quad N_4^e(x^e) = x^e \left( - \left( \frac{x^e}{L^e} \right) + \left( \frac{x^e}{L^e} \right)^2 \right).$$



Druga pochodna funkcji przemieszczenia będzie miała postać

$$v''^e(x^e) = \mathbf{N}''^e(x^e)\mathbf{Q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}''^e(x^e))^T,$$

gdzie

$$\mathbf{N}''^e(x^e) = [N_1''^e(x^e) \quad N_2''^e(x^e) \quad N_3''^e(x^e) \quad N_4''^e(x^e)],$$

i

$$\begin{aligned} N_1''^e(x^e) &= -\frac{6}{(L^e)^2} + \frac{12}{(L^e)^3}x^e, & N_2''^e(x^e) &= -\frac{4}{L^e} + \frac{6}{(L^e)^2}x^e, \\ N_3''^e(x^e) &= \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12}{(L^e)^3}x^e, & N_4''^e(x^e) &= -\frac{2}{L^e} + \frac{6}{(L^e)^2}x^e. \end{aligned}$$

Wykorzystując interpolację, energię potencjalną można zapisać

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{1}{2}E^e J^e \int_0^{L^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}''^e)^T \mathbf{N}''^e \mathbf{Q}^e dx^e - \int_0^{L^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e - (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{F}^e = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \left\{ E^e J^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}''^e)^T \mathbf{N}''^e dx^e \right\} \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \left\{ \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e + \mathbf{F}^e \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{ \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e \}. \end{aligned}$$

We wzorze

$$\Pi^e = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{\mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e\},$$

oznaczono:

- **macierz sztywności** belkowego elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = E^e A^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}''^e(x^e))^T \mathbf{N}''^e(x^e) dx^e,$$

- **wektor węzłowych równoważników obciążenia** belkowego elementu skończonego

$$\mathbf{P}^e = \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e(x^e) dx^e,$$

- **wektor sił węzłowych** belkowego elementu skończonego  $\mathbf{F}^e$ ,
- **wektor stopni swobody** (niewiadome pierwotne, przemieszczenia w węzłach) belkowego elementu skończonego  $\mathbf{Q}^e$ .

Po wykorzystaniu interpolacji  $u^e(x^e)$ , całkowita energia potencjalna elementu jest teraz funkcją czterech zmiennych  $\Pi^e(Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e)$  i warunek konieczny stanu równowagi (minimum energii potencjalnej) jest następujący

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_1^e} = 0 \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_2^e} = 0 \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_3^e} = 0 \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial Q_4^e} = 0 \end{array} \right\} \equiv \frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{Q}^e} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}^e} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \{ \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e \} \right) = 0,$$

co prowadzi do równań równowagi MES dla belkowego elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e,$$

lub

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{R}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^e,$$

gdzie zdefiniowano **całkowity wektor obciążenia** elementu skończonego  $\mathbf{R}^e$ .

Jeśli przyjmiemy, że  $E^e = \text{const.}$  i  $J^e = \text{const.}$  to

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^e &= E^e J^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}''^e(x^e))^T \mathbf{N}''^e(x^e) dx^e = \\
 &= E^e J^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} -\frac{6}{(L^e)^2} + \frac{12x^e}{(L^e)^3} \\ -\frac{4}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} \\ \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12x^e}{(L^e)^3} \\ -\frac{2}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} \\ \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12x^e}{(L^e)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{(L^e)^2} + \frac{12x^e}{(L^e)^3} & -\frac{4}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} \\ -\frac{4}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} & \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12x^e}{(L^e)^3} \\ \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12x^e}{(L^e)^3} & -\frac{2}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} \\ -\frac{2}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} & -\frac{2}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} \\ -\frac{2}{L^e} + \frac{6x^e}{(L^e)^2} & \frac{6}{(L^e)^2} - \frac{12x^e}{(L^e)^3} \end{bmatrix} dx^e,
 \end{aligned}$$

i po wycałkowaniu **macierz sztywności** elementu belkowego będzie wynosić

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12E^e J^e}{(L^e)^3} & \frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & -\frac{12E^e J^e}{(L^e)^3} & \frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} \\ \frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & \frac{4E^e J^e}{L^e} & -\frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & \frac{2E^e J^e}{L^e} \\ -\frac{12E^e J^e}{(L^e)^3} & -\frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & \frac{12E^e J^e}{(L^e)^3} & -\frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} \\ \frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & \frac{2E^e J^e}{L^e} & -\frac{6E^e J^e}{(L^e)^2} & \frac{4E^e J^e}{L^e} \end{bmatrix} .$$

Jeśli przyjmiemy, że  $q^e = \text{const.}$  to

$$\mathbf{P}^e = q^e \int_0^{L^e} (\mathbf{N}^e)^T q^e dx^e = q^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} 1 - 3 \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^2 + 2 \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^3 \\ x^e \left(1 - 2 \left(\frac{x^e}{L^e}\right) + \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^2\right) \\ 3 \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^2 - 2 \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^3 \\ x^e \left(-\left(\frac{x^e}{L^e}\right) + \left(\frac{x^e}{L^e}\right)^2\right) \end{bmatrix} dx^e,$$

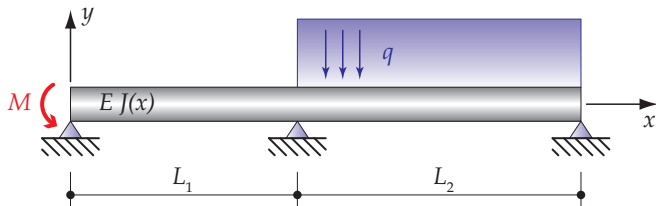
i po wyciąkowaniu **wektor równoważników obciążenia** elementu belkowego będzie wynosił

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} \frac{q^e L^e}{2} \\ \frac{q^e (L^e)^2}{12} \\ \frac{q^e L^e}{2} \\ -\frac{q^e (L^e)^2}{12} \end{bmatrix} \cdot$$

Dalsze postępowanie, czyli: agregacja, budowa równań MES, wprowadzenie warunków brzegowych, rozwiązanie równań jest analogiczne jak w przypadku elementów prętowych.

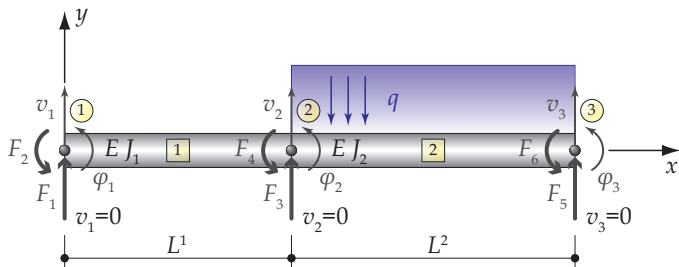


Rozwiążmy belkę ciągłą zdyskretyzowaną dwoma elementami skończonymi.



Przyjmijmy następujące dane:

- $J_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$  (dwuteownik  $260 \times 135 \text{ mm}$ ,  $\text{\AA}$ rodnik:  $7 \text{ mm}$ , p $\text{\AA}$ łki:  $10 \text{ mm}$ ),
- $J_2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  (dwuteownik  $330 \times 160 \text{ mm}$ ,  $\text{\AA}$ rodnik:  $7 \text{ mm}$ , p $\text{\AA}$ łki:  $10 \text{ mm}$ ),
- $L_1 = 6 \text{ m}$ ,
- $L_2 = 8 \text{ m}$ ,
- $E = 200 \text{ GPa}$ ,
- $q = 10 \text{ kN/m}$ ,
- $M = 20 \text{ kNm}$ .

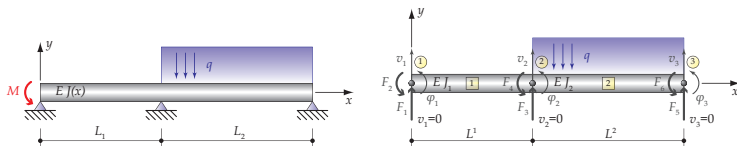


Zdefiniujmy globalny wektor stopni swobody

$$\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6\} \equiv \{v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad v_3 \quad \varphi_3\},$$

i globalny wektor sił węzłowych

$$\mathbf{F} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6\}.$$

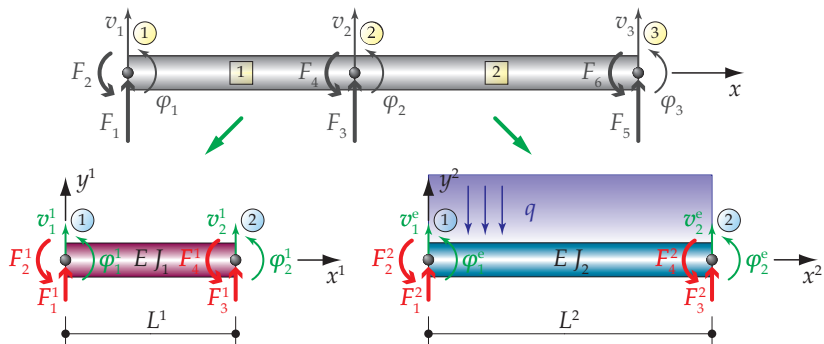


W wektorze  $\mathbf{Q}$  zawarte są:

- kinematyczne (podstawowe) warunki brzegowe  $Q_1 \equiv v_1 = Q_3 \equiv v_2 = Q_5 \equiv v_3 = 0$ ,
- niewiadome kinematyczne (pierwotne)  $Q_2, Q_4$  i  $Q_6$ .

W wektorze  $\mathbf{F}$  zawarte są:

- statyczne (naturalne) warunki brzegowe  $F_2 = M, F_4 = 0$  i  $F_6 = 0$ ,
- niewiadome statyczne (wtórne)  $F_1, F_3$  i  $F_5$ .



Macierz topologii belki

Element	Węzeł 1	Węzeł 2
1	1	2
2	2	3

Układ równań MES zapiszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań wymaga uwzględnienia warunków brzegowych

$$Q_1 = Q_3 = Q_5 = 0, \quad F_2 = M, \quad F_4 = F_6 = 0,$$

ostatecznie będziemy mogli zapisać

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ 0 \\ Q_4 \\ 0 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ M \\ F_3 \\ 0 \\ F_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Element e = 1:**  $E^1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $J^1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $L^1 = 6 \text{ m}$ ,  $q^1 = 0$ ,

$$\mathbf{K}^1 = 10^5 \begin{bmatrix} 5,556 & 16,167 & -5,556 & 16,667 \\ 16,167 & 66,667 & -16,167 & 33,333 \\ -5,556 & -16,167 & 5,556 & -16,167 \\ 16,167 & 33,333 & -16,167 & 66,667 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Element e = 2:**  $E^2 = 200 \text{ GPa}$ ,  $J^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $L^2 = 8 \text{ m}$ ,  $q^2 = 10 \text{ kN/m}$ ,

$$\mathbf{K}^2 = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 4,688 & 18,75 & -4,688 & 18,75 \\ 18,750 & 100,00 & -18,750 & 50,00 \\ -4,688 & -18,75 & 4,688 & -18,75 \\ 18,750 & 50,00 & -18,750 & 100,00 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = 10^4 \begin{bmatrix} -4,000 \\ -5,333 \\ -4,000 \\ 5,333 \end{bmatrix}.$$

W wyniku agregacji otrzymamy układ równań MES

$$10^5 \cdot \begin{bmatrix} 5,556 & 16,167 & -5,556 & 16,667 & 0 & 0 \\ 16,167 & 66,667 & -16,167 & 33,333 & 0 & 0 \\ -5,556 & -16,667 & 10,243 & 2,083 & -4,688 & 18,750 \\ 16,667 & 33,333 & 2,083 & 166,667 & -18,750 & 50,000 \\ 0 & 0 & -4,688 & -18,750 & 4,688 & -18,750 \\ 0 & 0 & 18,750 & 50,000 & -18,750 & 100,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ 0 \\ Q_4 \\ 0 \\ Q_6 \end{bmatrix} =$$

$$= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,000 \\ -5,333 \\ -4,000 \\ 5,333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 20 \\ F_3 \\ 0 \\ F_5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Niewiadome pierwotne możemy obliczyć z równań 2, 4 i 6

$$10^5 \cdot \begin{bmatrix} 66,667 & 33,333 & 0 \\ 33,333 & 166,667 & 50,000 \\ 0 & 50,000 & 100,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2,000 \\ -5,333 \\ 5,333 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = 0,0066 \text{ rad}, \quad Q_4 = -0,0072 \text{ rad}, \quad Q_6 = 0,00893 \text{ rad}.$$

Niewiadome wtórne wyznaczmy z równań 1, 3 i 5

$$F_1 = 16,667 \cdot 10^5 \cdot Q_2 + 16,667 \cdot 10^5 \cdot Q_4 = -1 \text{ kN},$$

$$F_3 = -16,667 \cdot 10^5 \cdot Q_2 + 2,083 \cdot 10^5 \cdot Q_4 + 18,75 \cdot 10^5 \cdot Q_6 + 4 \cdot 10^4 = 44,25 \text{ kNm},$$

$$F_5 = -18,75 \cdot 10^5 \cdot Q_4 - 18,75 \cdot 10^5 \cdot Q_6 + 4 \cdot 10^4 = 36,75 \text{ kN}.$$

Globalny wektor przemieszczeń będzie wynosił

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0066 \\ 0 \\ -0,0072 \\ 0 \\ 0,00893 \end{bmatrix},$$



a przemieszczenia w elementach

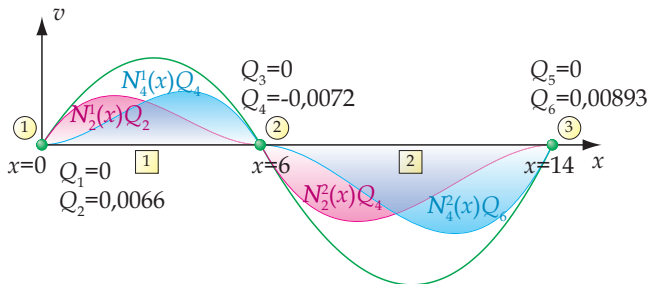
$$\mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0066 \\ 0 \\ -0,0072 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0072 \\ 0 \\ 0,00893 \end{bmatrix}.$$

Funkcja przemieszczeń dla elementów

$$v(x) = \begin{cases} v^1(x^1) = x^1 \left( 1 - 2 \left( \frac{x^1}{6} \right) + \left( \frac{x^1}{6} \right)^2 \right) 0,0066 + \\ \quad + x^1 \left( - \left( \frac{x^1}{6} \right) + \left( \frac{x^1}{6} \right)^2 \right) (-0,0072) & \text{dla } e = 1, \\ v^2(x^2) = x^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{x^2}{8} \right) + \left( \frac{x^2}{8} \right)^2 \right) (-0,0072) + \\ \quad + x^2 \left( - \left( \frac{x^2}{8} \right) + \left( \frac{x^2}{8} \right)^2 \right) 0,00893 & \text{dla } e = 2. \end{cases}$$

## Przemieszczenia belki



Obliczmy siły węzłowe, korzystając z równań równowagi elementów.

$$\mathbf{F}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{Q}^1 - \mathbf{P}^1,$$

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{K}^2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{P}^2.$$

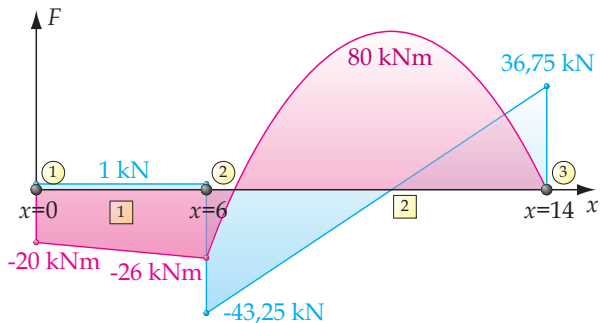
**Element**  $e = 1,$

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \end{bmatrix} = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 5,556 & 16,167 & -5,556 & 16,667 \\ 16,167 & 66,667 & -16,167 & 33,333 \\ -5,556 & -16,167 & 5,556 & -16,167 \\ 16,167 & 33,333 & -16,167 & 66,667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0066 \\ 0 \\ -0,0072 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \\ 1 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kNm} \\ \text{kN} \\ \text{kNm} \end{matrix},$$

Element  $e = 2$ ,

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{bmatrix} = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 4,688 & 18,750 & -4,688 & 18,750 \\ 18,750 & 100,000 & -18,750 & 50,000 \\ -4,688 & -18,750 & 4,688 & -18,750 \\ 18,750 & 50,000 & -18,750 & 100,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0072 \\ 0 \\ 0,00893 \end{bmatrix} - \\
 - 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -4,000 \\ -5,333 \\ -4,000 \\ 5,333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43,25 \\ 26 \\ 36,75 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kNm} \\ \text{kN} \\ \text{kNm} \end{matrix},$$

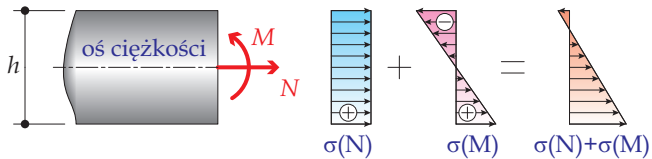
## Rozkład sił w belce



**Uwaga!** Na wykresach sił przekrojowych zwroty sił są związane z przyjętym układem współrzędnych dla elementów skończonych, nie ma to nic wspólnego z konwencją znakowania stosowaną często w wytrzymałości materiałów.

## Obliczenie maksymalnego naprężenia

wykresy naprężeń normalnych  
(od zginania i rozciągania)



Przyjeliśmy belkę o profilu dwuteowym z prostymi stopkami o wielkości  $330 \times 160$  mm (drugi element), dla której:

- wysokość przekroju  $h = 330$  mm,
- moment bezwładności  $J = 1 \cdot 10^8$  mm<sup>4</sup>,
- pole powierzchni przekroju poprzecznego  $A = 5440$  mm<sup>2</sup>.

Z wykresu sił odczytamy maksymalny moment zginający (co do bezwzględnej wartości):

$$|M_{max}| = 80 \text{ kNm},$$

i odpowiadającą mu siłę podłużną (nieuwzględnioną w naszym modelu):

$$|N| = 0.$$



Maksymalne naprężenia można określić ze wzoru:

$$\sigma_{max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{max}|}{w},$$

gdzie wskaźnik wytrzymałości na zginanie  $w$  jest dany zależnością:

$$w = \frac{J}{e_{max}},$$

a maksymalna odległość skrajnych włókien od osi obojętnej  $e_{max} = h/2$ .

Wartość naprężeń będzie wynosić:

$$\sigma_{max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{max}|}{\frac{J}{h/2}} = \frac{80 \cdot 10^3}{(1 \cdot 10^8) \cdot 10^{-12}} = \frac{80 \cdot 10^3}{(330 \cdot 10^{-3})/2} = 132 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$