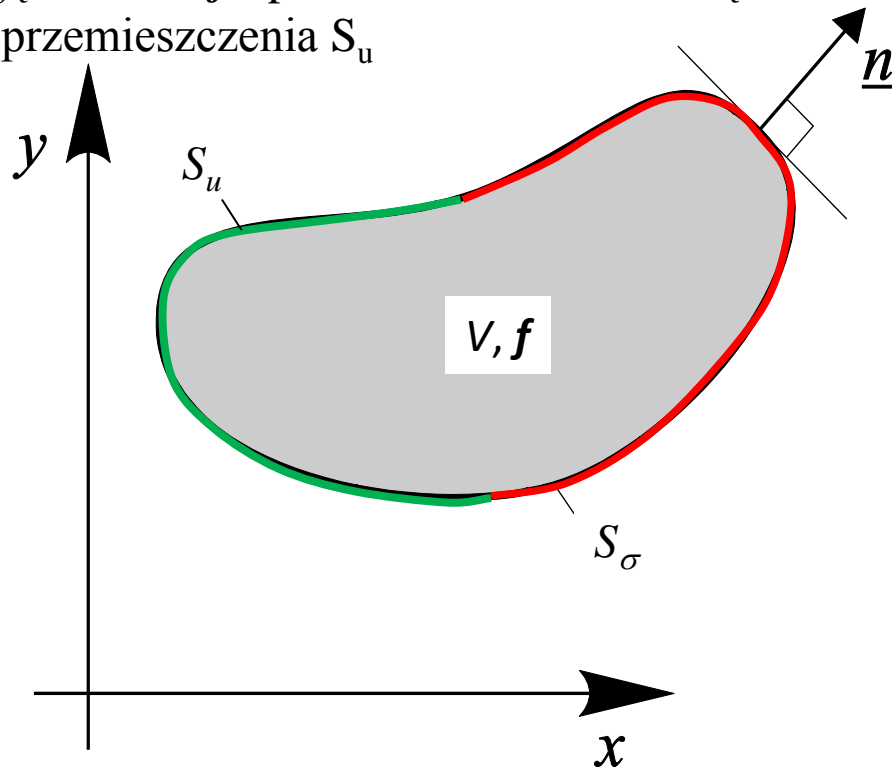


Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

LPTS – Liniowy problem teorii sprężystości - jest podstawowym zagadnieniem w mechanice ciała stałego. Rozważmy ciało sprężyste o objętości V . Obciążeniem są siły objętościowe f i powierzchniowe t na części brzegu S_σ . Na pozostałym brzegu zadane są przemieszczenia S_u .



$f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$ – wektor intensywności sił objętościowych

$t = [t_x \ t_y \ t_z]^T$ – wektor intensywności sił powierzchniowych

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Należy obliczyć przemieszczenia, naprężenia i odkształcenie. W ogólnym przypadku jest to 15 niewiadomych funkcji (3 przemieszczenia w kierunku x , y i z oraz po 6 składowych tensora naprężenia i odkształcenia) czyli potrzebne jest 15 równań.

$\mathbf{u} = [u_x \equiv u(x, y, z), u_y \equiv v(x, y, z), u_z \equiv w(x, y, z)]^T$ – wektor funkcji przemieszczeń

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$ – wektor odkształceń ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – odkształcenia liniowe; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – kąty odkształcenia postaciowego)

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]^T$ – wektor naprężeń ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – naprężenia normalne, $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – naprężenia styczne)

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Tymi równaniami będą:

-równania równowagi

-równania geometryczne

-równania fizyczne

Zacznijmy od równań geometrycznych nazywanych **równaniami Cauchy'ego**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z$$

Z podstawowym (kinematycznym) warunkiem brzegowym

$$u_i(x, y, z) = u_i^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u$$

Lub w zapisie macierzowym

$$\varepsilon = Lu$$

$$u = u^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Równania równowagi Naviera

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{w objętości ciała } V$$

z naturalnymi warunkami brzegowymi

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma$$

lub w zapisie macierzowym

$$L^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{w objętości ciała } V$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Równania fizyczne **Hooke'a**

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

gdzie

G – moduł Kirchhoffa,

ν – liczba Poissona,

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$,

δ_{ij} – delta Kroneckera.

lub w zapisie macierzowym

$$\sigma = D\varepsilon$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Sformułowanie wariacyjne

$$\int_V v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) dv = 0 \quad i, j = x, y, z$$

Korzystając z zależności

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

otrzymamy równania

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} dv - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv + \int_V v_i f_i dv = 0$$

Dalej wykorzystujemy twierdzenie Gaussa o dywergencji

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} dv = \int_S \sigma_{ij} v_i n_j ds = \int_{S_u} (\sigma_{ij} n_j) v_i ds + \int_{S_\sigma} t_i^o v_i ds$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Po podstawieniu i uwzględnieniu warunku, że funkcja wagowa spełnia j.p.w. na brzegu S_u otrzymamy ostateczną postać równia

$$\int_{\check{V}} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv = \int_{\check{V}} f_i v_i dv + \int_{\check{S}_\sigma} t_i^o v_i ds$$

Lub w zapisie macierzowym

$$\int_{\check{V}} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dv = \int_{\check{V}} \mathbf{v}^T \mathbf{f} dv + \int_{\check{S}_\sigma} \mathbf{v}^T \mathbf{t}^o ds$$

wykorzystując warunki symetrii tensora naprężenia i odkształcenia

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Problem teorii sprężystości można teraz sformułować w następujący sposób

Należy wyznaczyć przemieszczenia u_i , odkształcenia ε_{ij} i naprężenia σ_{ij} jako wystarczająco gładkie funkcje x, y, z , spełniające równania

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\varepsilon = Lu$$

warunki brzegowe i równanie wariacyjne
dla wszystkich funkcji wagowych v_i z własnością, że $v_i = 0$
na części powierzchni ciała S_u .

$$u = u^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u$$

$$t = t^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma$$

$$\int_V \varepsilon^T(v) \sigma(u) dv = \int_V v^T f dv + \int_{S_\sigma} v^T t^o ds$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

Podstawiając, otrzymamy sformułowanie wariacyjne wyrażone w przemieszczeniach

Prawo fizyczne

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\varepsilon = Lu$$

Prawo geometryczne

$$\varepsilon = Lu$$

$$\int_V \varepsilon^T(v) \sigma(u) dv = \int_V v^T f dv + \int_{S_\sigma} v^T t^o ds$$

**Równanie równowagi
w sformułowaniu
wariacyjnym**

$$u = u^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u$$

$$t = t^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma$$

Warunki brzegowe

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS

LPTS jest problemem samosprężonym tzn. może być sformułowany w sposób równoważny w postaci minimalizacji funkcjonału energii potencjalnej

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dv - \int_V f_i u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i^o u_i ds - \int_{S_u} t_i u_i ds$$

Problem LPTS ma teraz następujące sformułowania

Należy wyznaczyć przemieszczenia u_i , odkształcenia ε_{ij} i naprężenia σ_{ij} jako wystarczająco gładkie funkcje x, y, z , spełniające równania

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\varepsilon = Lu$$

$$u = u^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u$$

$$t = t^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma$$

i minimalizujące funkcjonał energii potencjalnej.

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

W tej części podane zostanie sformułowany model skończenie elementowy LPTS dla zagadnienia 2D z założeniem tzw. płaskiego stanu naprężenia.

W modelu 2D do wyznaczenia mamy dwie funkcje przemieszczeń

$$u \equiv u_x(x, y) \text{ i } v \equiv u_y(x, y)$$

W płaskim stanie naprężenia tensory odkształcenia i naprężenia redukują się z sześciu do trzech składowych

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$$

W równaniu geometrycznym macierz operatorów różniczkowych ma postać

$$\varepsilon = Lu \quad L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

W równaniu fizycznym macierz materiałowa ma postać

$$\sigma = D\varepsilon \quad D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

W końcu wektory sił objętościowych i sił powierzchniowych redukują się do dwóch składowych

$$f = [f_x \ f_y]^T \quad t = [t_x \ t_y]^T$$

Podsumowując dla płaskiego stanu naprężenia problem LPTS opisany jest 8 równaniami:

2 równania równowagi

3 równania geometryczne

3 równania fizyczne

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

W dalszym ciągu do zbudowania modelu MES posłużymy się funkcjonałem energii potencjalnej układu. Oczywiście możemy również skorzystać ze słabego sformułowania wariacyjnego

Obszar rozwiązania dzielimy na elementy skończone i przedstawiamy całkowitą energię potencjalną w postaci sumy energii potencjalnych dla każdego elementu skończonego

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dv - \int_V f_i u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i^o u_i ds - \int_{S_u} t_i u_i ds$$

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \left[\frac{1}{2} \int_{A^e} (\varepsilon^e(u^e))^T D^e \varepsilon^e(u^e) h^e dx dy - \int_{A^e} (u^e)^T f^e h^e dx dy + \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\sigma^e} (u^e)^T t_o^e dx dy - \int_{\Gamma_u^e} (u^e)^T t^e dx dy \right]$$

gdzie A^e, h^e są powierzchnią i grubością elementu skończonego oraz wykorzystano równanie fizyczne $\sigma^e = D^e \varepsilon^e$.

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Aproksymacja wektora funkcji przemieszczeń

$$u^e(x, y) = N^e(x, y) Q^e$$

$Q^e = [Q_1^e \ Q_2^e \ \dots \ Q_n^e]^T$ – wektor stopni swobody (nieznanych parametrów węzłowych elementu),

$N^e(x, y)$ – macierz funkcji kształtu o wymiarze $(2 \cdot n)$,

n – liczba stopni swobody elementu.

Równanie geometryczne przyjmuje postać

$$\epsilon^e = Lu^e = LN^eQ^e = B^eQ^e$$

gdzie

$$B^e = LN^e$$

Jest macierzą pochodnych funkcji kształtu

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Podstawiając przyjętą aproksymację i równanie geometryczne do funkcjonału energii otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Phi^e &= \frac{1}{2} \int_{A^e} (Q^e)^T (B^e)^T D^e B^e Q^e h^e dx dy - \int_{A^e} (Q^e)^T (N^e)^T f^e h^e dx dy + \\ &- \int_{\Gamma_\sigma^e} (Q^e)^T (N^e)^T t_o^e dx dy - \int_{\Gamma_u^e} (Q^e)^T (N^e)^T t^e dx dy = \\ &= \frac{1}{2} (Q^e)^T \left[\int_{A^e} (B^e)^T D^e B^e h^e dx dy \right] Q^e - (Q^e)^T \int_{A^e} (N^e)^T f^e h^e dx dy + \\ &- (Q^e)^T \left[\int_{\Gamma_\sigma^e} (N^e)^T t_o^e dx dy + \int_{\Gamma_u^e} (N^e)^T t^e dx dy \right] = \\ &= \frac{1}{2} (Q^e)^T K^e Q^e - (Q^e)^T (P^e + P^{eb} + R^{eb}) = \\ &= \frac{1}{2} (Q^e)^T K^e Q^e - (Q^e)^T F^e\end{aligned}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

W poprzednim równaniu przyjęto następujące oznaczenia

macierz sztywności elementu skończonego

$$K^e = \int_{A^e} (B^e)^T D^e B^e h^e dx dy$$

wektor obciążenia elementu (równoważników węzłowych obciążenia w elemencie)

$$P^e = \int_{A^e} (N^e)^T f^e h^e dx dy$$

wektor obciążenia brzegu Γ_σ^e elementu

$$P^{eb} = \int_{\Gamma_\sigma^e} (N^e)^T t_\sigma^e dx dy$$

wektor obciążenia brzegu Γ_u^e elementu

$$R^{eb} = \int_{\Gamma_u^e} (N^e)^T t^e dx dy$$

Dodatkowo, całkowity wektor obciążenia elementu oznaczono

$$F^e = P^e + P^{eb} + R^{eb}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Uwagi

1. Dla obliczenia K^e należy wyznaczyć B^e z analizy równań geometrycznych Cauchy'ego oraz D^e z prawa fizycznego Hooke'a.
2. Ze wzoru na K^e wynika, że jest to macierz symetryczna ($K^e = (K^e)^T$).
3. Macierz K^e jest macierzą osobliwą ($\det K^e = 0$).
4. Wektor P^{eb} jest znany, natomiast wektor R^{eb} jest nieznan.

Warunek konieczny ekstremum funkcji energii potencjalnej dla elementu skończonego

$$\partial\Phi^e/\partial Q^e = 0$$

Prowadzi do układu równań MES w formie

$$K^e Q^e = F^e$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Przykład: Analiza naprężeń w tarczy.
Do dyskretyzacji użyjemy dwóch trójkątnych 3-węzłowych elementów skończonych z liniowymi funkcjami kształtu.

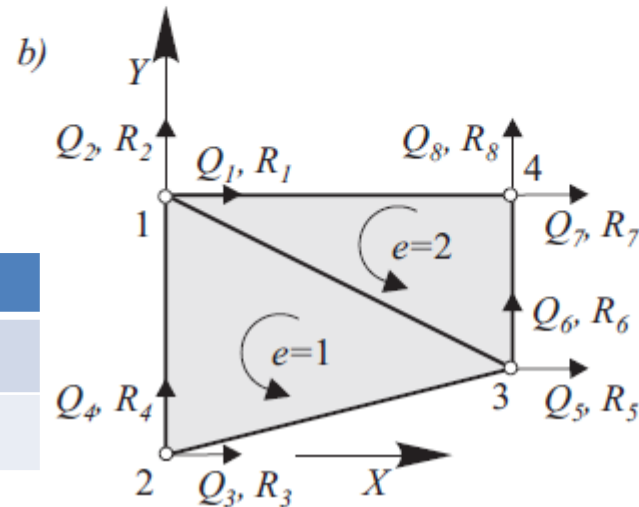
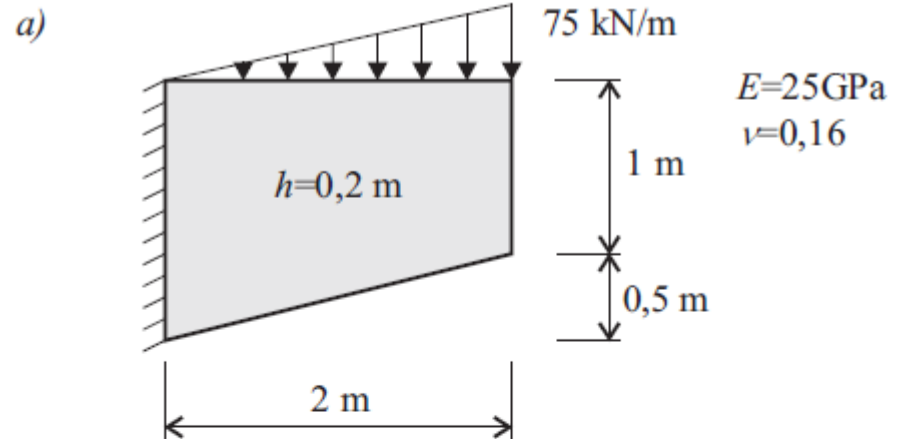
Wektory stopni swobody elementów zawierają po sześć składowych

$$Q^1 = [u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_2^1 \quad v_2^1 \quad u_3^1 \quad v_3^1]^T$$

$$Q^2 = [u_1^2 \quad v_1^2 \quad u_2^2 \quad v_2^2 \quad u_3^2 \quad v_3^2]^T$$

Węzeł	X	Y
1	0	1.5
2	0	0
3	2	0.5
4	2	1.5

e	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	1	3	4



Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Aproksymacja

e	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	1	3	4

$$u^e(x, y) = N^e(x, y) Q^e$$

Węzeł	X	Y
1	0	1.5
2	0	0
3	2	0.5
4	2	1.5

$$N^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$N_1^1(x, y) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

$$N_1^2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$N_2^1(x, y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$$

$$N_2^2(x, y) = \frac{3}{2} - y$$

$$N_3^1(x, y) = \frac{1}{2}x$$

$$N_3^2(x, y) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + y$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Aproksymacja $N^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$

$$B^e = LN^e$$

e	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	1	3	4

Węzeł	X	Y
1	0	1.5
2	0	0
3	2	0.5
4	2	1.5

$$B^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Aproksymacja

$$\mathbf{B}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Obliczenia Mathcad

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$X1 := \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{A} := X1^{-1} \quad A = \begin{pmatrix} -0.167 & -0.333 & 0.5 \\ 0.667 & -0.667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1(x, y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(1)}$$

$$N_2(x, y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(2)}$$

$$N_3(x, y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(3)}$$

$$N1(x, y) := \begin{pmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{pmatrix}$$

$$B1 := \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & A_{1,2} & 0 & A_{1,3} & 0 \\ 0 & A_{2,1} & 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,3} \\ A_{2,1} & A_{1,1} & A_{2,2} & A_{1,2} & A_{2,3} & A_{1,3} \end{pmatrix} \quad B1 = \begin{pmatrix} -0.167 & 0 & -0.333 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.667 & 0 & -0.667 & 0 & 0 \\ 0.667 & -0.167 & -0.667 & -0.333 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Obliczenia Mathcad

$$X2 := \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 1 \\ 2 & 0.5 & 1 \\ 2 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{A} := X2^{-1} \quad A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N}_1(x,y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(1)}$$

$$\underline{N}_2(x,y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(2)}$$

$$\underline{N}_3(x,y) := (x \ y \ 1) \cdot A^{(3)}$$

$$N2(x,y) := \begin{pmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{pmatrix}$$

$$B2 := \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & A_{1,2} & 0 & A_{1,3} & 0 \\ 0 & A_{2,1} & 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,3} \\ A_{2,1} & A_{1,1} & A_{2,2} & A_{1,2} & A_{2,3} & A_{1,3} \end{pmatrix} \quad B2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Macierz stałych materiałowych

$$D = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$E := 25 \cdot 10^6 \quad \nu := 0.16$$

$$D1 := \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad D1 = \begin{pmatrix} 2.566 \times 10^7 & 4.105 \times 10^6 & 0 \\ 4.105 \times 10^6 & 2.566 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.078 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

D2 := D1

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Macierz sztywności

$$K^e = \int_{A^e} (B^e)^T D^e B^e h^e dx dy$$

$$K1 := 0.5 |X1| \cdot 0.2 \cdot B1^T \cdot D1 \cdot B1$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 1.651 \times 10^6 & -4.96 \times 10^5 & -1.009 \times 10^6 & -5.816 \times 10^5 & -6.414 \times 10^5 & 1.078 \times 10^6 \\ -4.96 \times 10^5 & 3.511 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & -3.241 \times 10^6 & 4.105 \times 10^5 & -2.694 \times 10^5 \\ -1.009 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & 2.292 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 \\ -5.816 \times 10^5 & -3.241 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & 3.78 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 \\ -6.414 \times 10^5 & 4.105 \times 10^5 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 1.924 \times 10^6 & 0 \\ 1.078 \times 10^6 & -2.694 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 & 0 & 8.082 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$K2 := 0.5 |X2| \cdot 0.2 \cdot B2^T \cdot D2 \cdot B2$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 1.283 \times 10^6 & 1.652 \times 10^{-10} & 8.09 \times 10^{-10} & 4.105 \times 10^5 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 \\ 1.652 \times 10^{-10} & 5.388 \times 10^5 & 1.078 \times 10^6 & 8.09 \times 10^{-10} & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 \\ 8.09 \times 10^{-10} & 1.078 \times 10^6 & 2.155 \times 10^6 & 6.608 \times 10^{-10} & -2.155 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 \\ 4.105 \times 10^5 & 8.09 \times 10^{-10} & 6.608 \times 10^{-10} & 5.131 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.131 \times 10^6 \\ -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 & -2.155 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 3.438 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 \\ -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.131 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 & 5.67 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

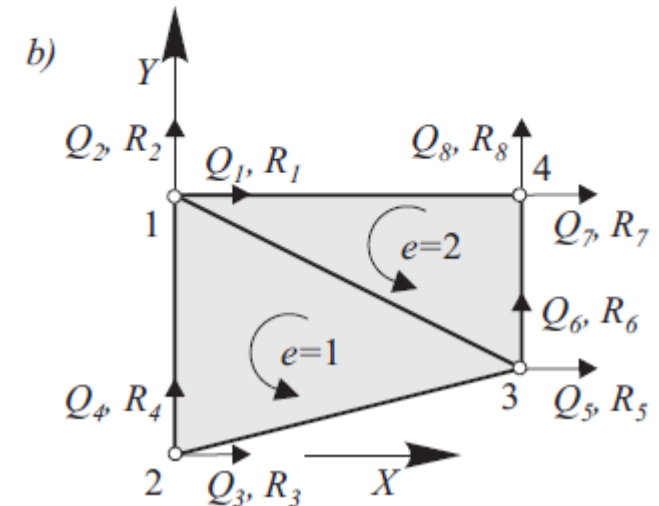
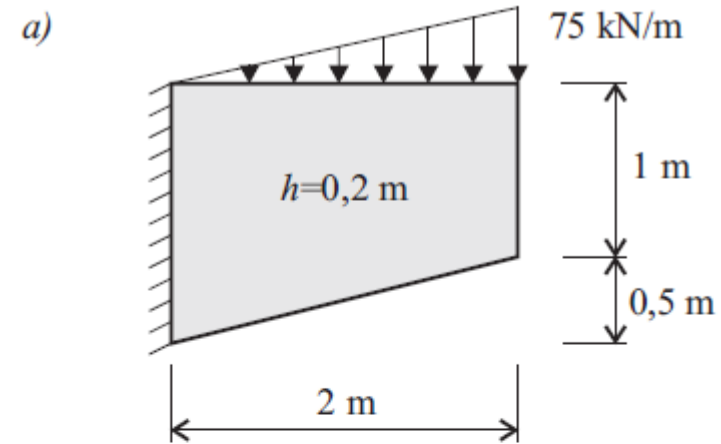
Wektor od obciążenia brzegowego

$$P^{eb} = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} (N^e)^T t_o^e dx dy$$

e	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	1	3	4

$$N^{1-4}(x, y = 1.5) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$t^{1-4}(x, y = 1.5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 75x/2 \end{bmatrix}$$



Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Wektor od obciążenia brzegowego

$$P^{eb} = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} (N^e)^T t_o^e dx dy$$

$$t_2(x, y) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{75}{2} \cdot x \end{pmatrix}$$

$$f(x) := N_2(x, 1.5)^T \cdot t_2(x, 1.5)$$

$$j := 1..6$$

$$Pb_{2,j} := - \int_0^2 f(x)_j dx$$

$$Pb_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Agregacja macierzy sztywności i wektora brzegowego obciążenia

e	(1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	1	3	4

$$G1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K := G1^T \cdot K1 \cdot G1 + G2^T \cdot K2 \cdot G2 \quad Pb := G2^T \cdot Pb2$$

$$K = \begin{pmatrix} 2.933 \times 10^6 & -4.96 \times 10^5 & -1.009 \times 10^6 & -5.816 \times 10^5 & -6.414 \times 10^5 & 1.488 \times 10^6 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 \\ -4.96 \times 10^5 & 4.05 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & -3.241 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 & -2.694 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 \\ -1.009 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & 2.292 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -5.816 \times 10^5 & -3.241 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & 3.78 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 & 0 & 0 \\ -6.414 \times 10^5 & 1.488 \times 10^6 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 4.079 \times 10^6 & 6.608 \times 10^{-10} & -2.155 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 \\ 1.488 \times 10^6 & -2.694 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 & 6.608 \times 10^{-10} & 5.94 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.131 \times 10^6 \\ -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.155 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 3.438 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 \\ -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 & 0 & 0 & -1.078 \times 10^6 & -5.131 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 & 5.67 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Globalny układ równań MES z uwzględnieniem warunków brzegowych

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} + \mathbf{Pb} + \mathbf{Rb}$$

$$\begin{pmatrix} 2.933 \times 10^6 & -4.96 \times 10^5 & -1.009 \times 10^6 & -5.816 \times 10^5 & -6.414 \times 10^5 & 1.488 \times 10^6 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 \\ -4.96 \times 10^5 & 4.05 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & -3.241 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 & -2.694 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 \\ -1.009 \times 10^6 & 8.552 \times 10^4 & 2.292 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -5.816 \times 10^5 & -3.241 \times 10^6 & 9.921 \times 10^5 & 3.78 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 & 0 & 0 \\ -6.414 \times 10^5 & 1.488 \times 10^6 & -1.283 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 4.079 \times 10^6 & 6.608 \times 10^{-10} & -2.155 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 \\ 1.488 \times 10^6 & -2.694 \times 10^5 & -1.078 \times 10^6 & -5.388 \times 10^5 & 6.608 \times 10^{-10} & 5.94 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & -5.131 \times 10^6 \\ -1.283 \times 10^6 & -1.078 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.155 \times 10^6 & -4.105 \times 10^5 & 3.438 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 \\ -4.105 \times 10^5 & -5.388 \times 10^5 & 0 & 0 & -1.078 \times 10^6 & -5.131 \times 10^6 & 1.488 \times 10^6 & 5.67 \times 10^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie Mathcad

$$R_1 := 0 \quad R_2 := 0 \quad R_3 := 0 \quad R_4 := 0 \quad Q_5 := 0 \quad Q_6 := 0 \quad Q_7 := 0 \quad Q_8 := 0$$

Given

$$K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{pmatrix} = P_b + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{pmatrix} := \text{Find}(R_1, R_2, R_3, R_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8) \quad Q := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182 \times 10^{-6} \\ -5.213 \times 10^{-5} \\ 1.529 \times 10^{-5} \\ -6.156 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad R_b := \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_b = \begin{pmatrix} -66.667 \\ 43.556 \\ 66.667 \\ 31.444 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Aproksymacja funkcji przemieszczeń w elemencie

$$u^e(x, y) = N^e(x, y) Q^e$$

$$Q1 := G1 \cdot Q \quad Q1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182 \times 10^{-6} \\ -5.213 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

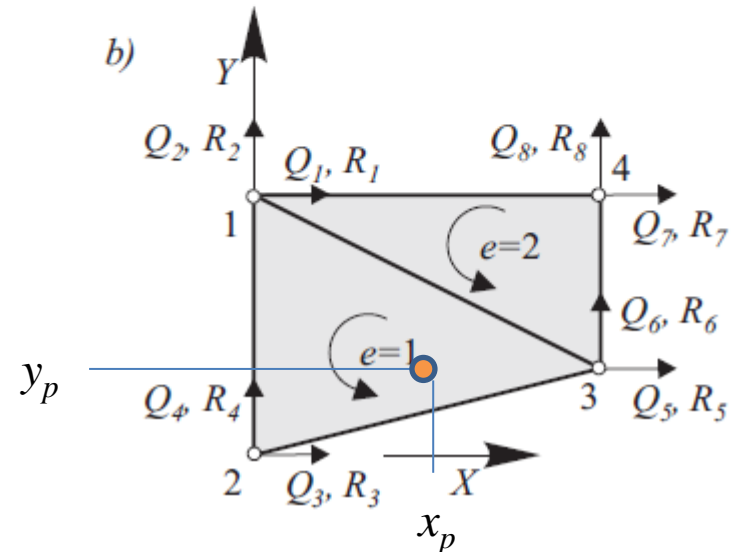
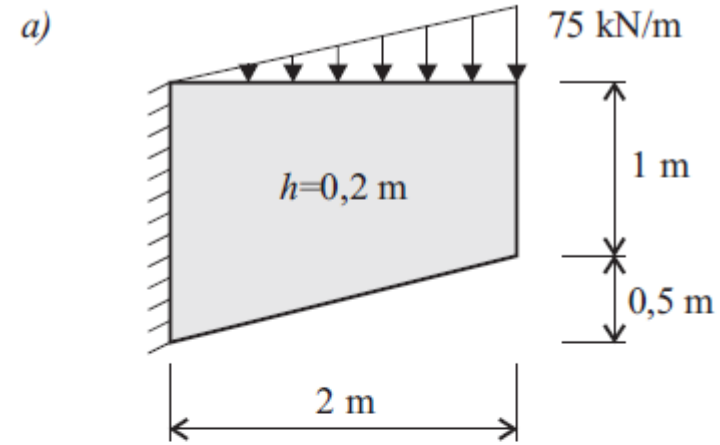
$$Q2 := G2 \cdot Q \quad Q2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.182 \times 10^{-6} \\ -5.213 \times 10^{-5} \\ 1.529 \times 10^{-5} \\ -6.156 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$u1(x, y) := N1(x, y) \cdot Q1$$

$$u2(x, y) := N2(x, y) \cdot Q2$$

Obliczenie przemieszczeń w punkcie $x_p=1$ $y_p=1$

$$u1(1, 1) = \begin{pmatrix} -4.091 \times 10^{-6} \\ -2.606 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$



Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Obliczenie odkształceń i naprężeń w elemencie

$$\varepsilon^e = Lu^e = LN^e Q^e = B^e Q^e$$

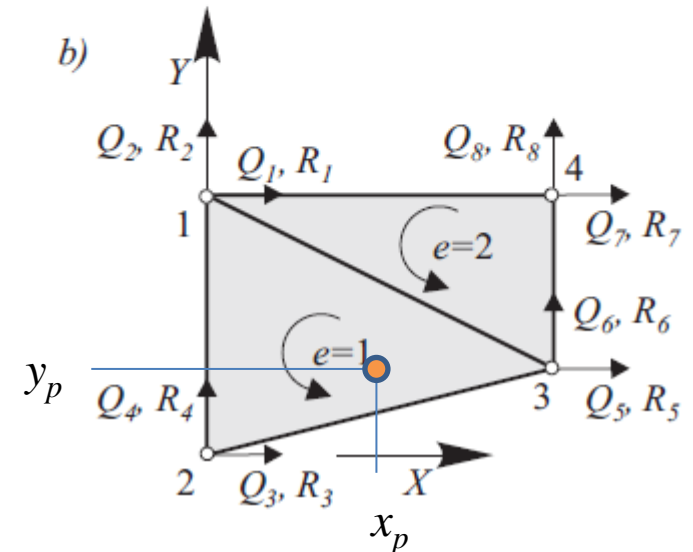
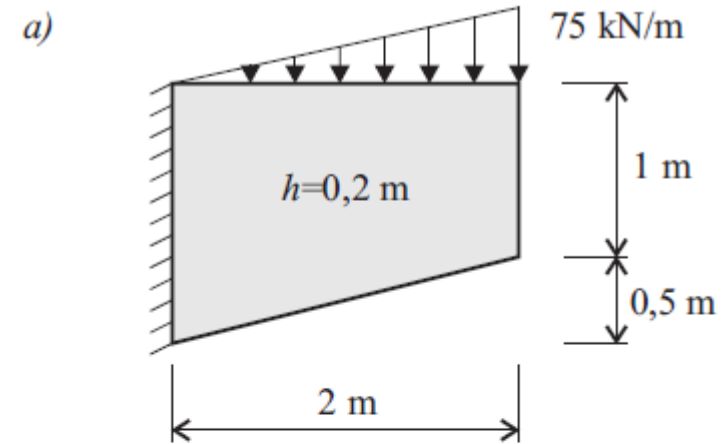
$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\varepsilon_1 := B_1 \cdot Q_1 \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -4.091 \times 10^{-6} \\ 0 \\ -2.606 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2 := B_2 \cdot Q_2 \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 7.646 \times 10^{-6} \\ -9.433 \times 10^{-6} \\ -7.306 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

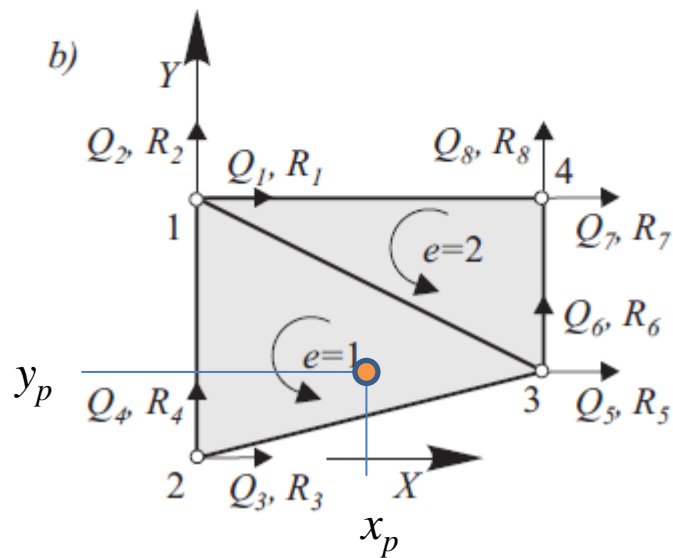
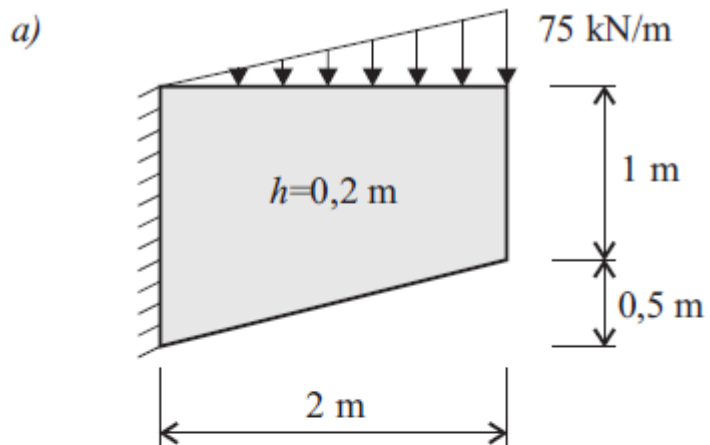
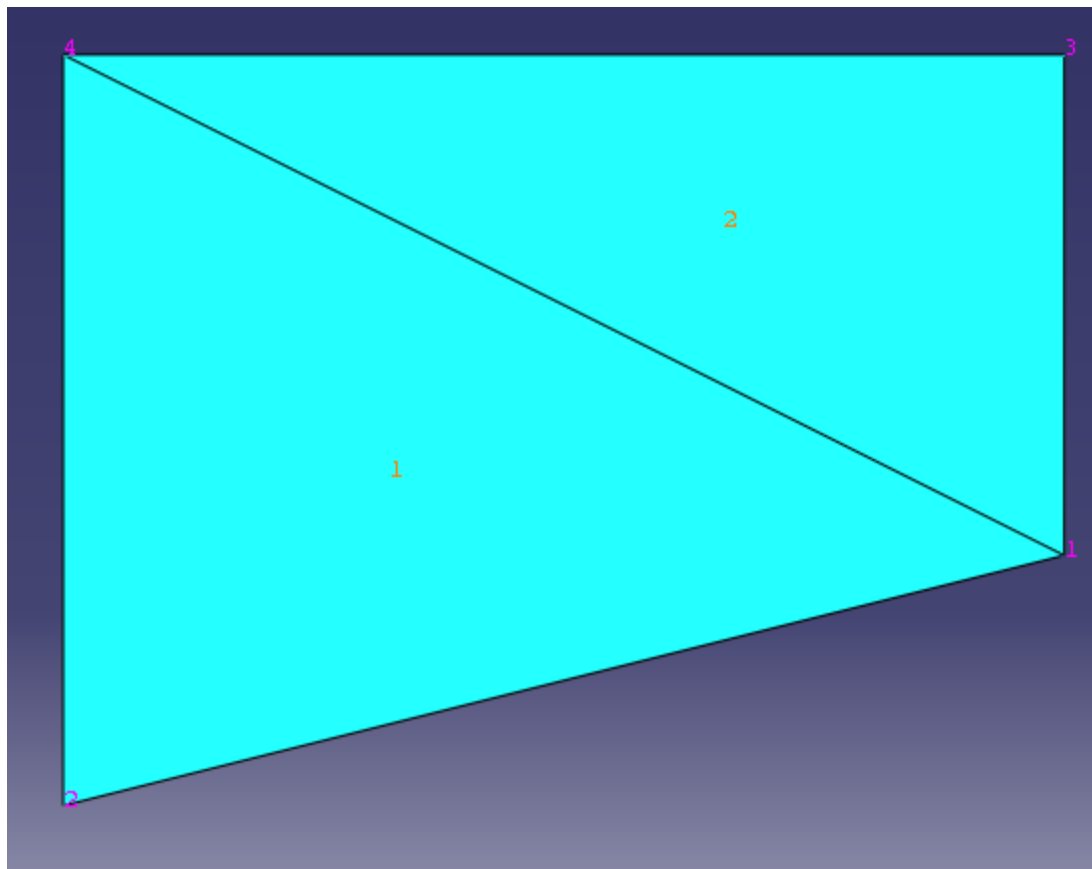
$$\sigma_1 := D_1 \cdot \varepsilon_1 \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} -104.964 \\ -16.794 \\ -280.851 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := D_2 \cdot \varepsilon_2 \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 157.446 \\ -210.638 \\ -78.723 \end{pmatrix}$$



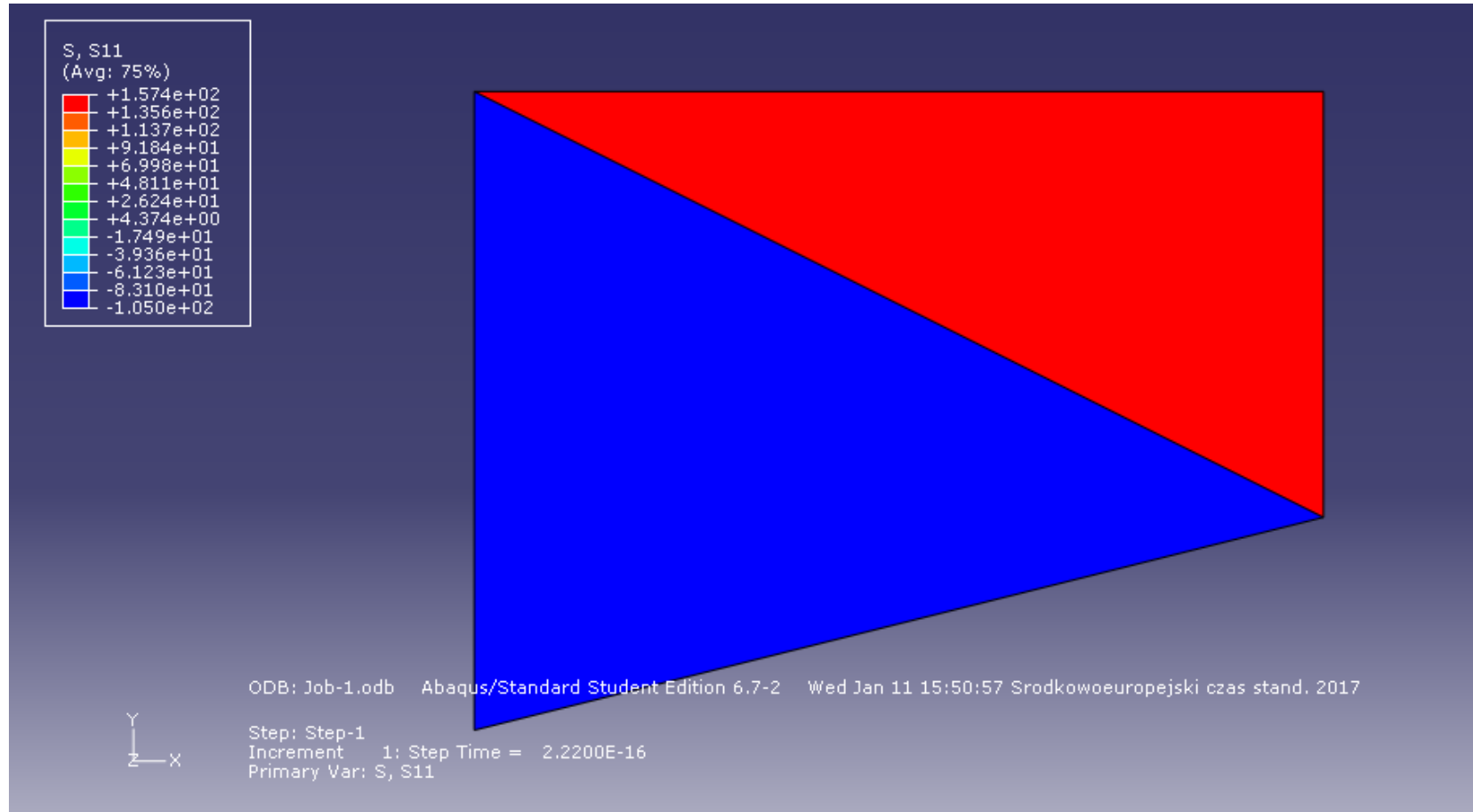
Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie ABAQUS



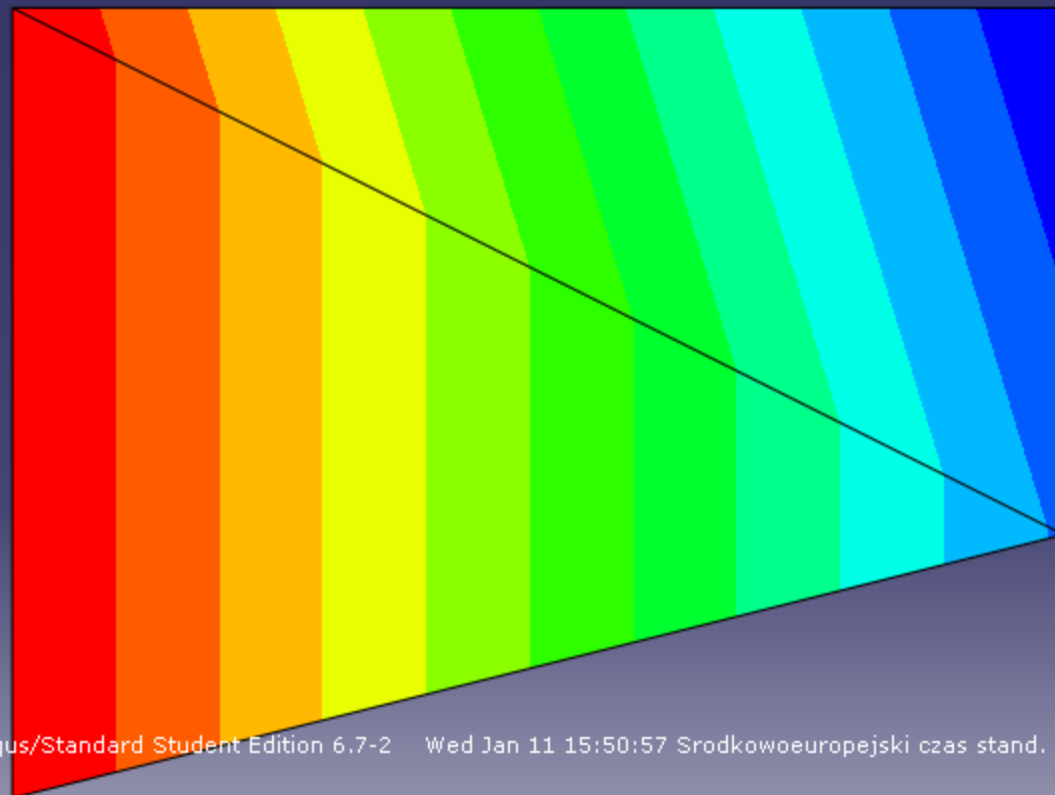
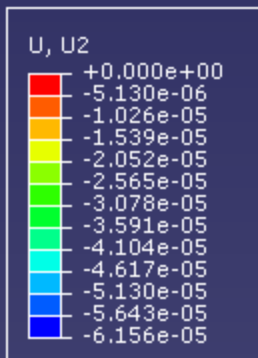
Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie ABAQUS – naprężenie S11



Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie ABAQUS – przemieszczenie U2



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard Student Edition 6.7-2 Wed Jan 11 15:50:57 Srodkowoeuropejski czas stand. 2017



Step: Step-1
Increment 1: Step Time = 2.2200E-16
Primary Var: U, U2

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie ABAQUS – wyniki numeryczne

plyta-MKM — Notatnik

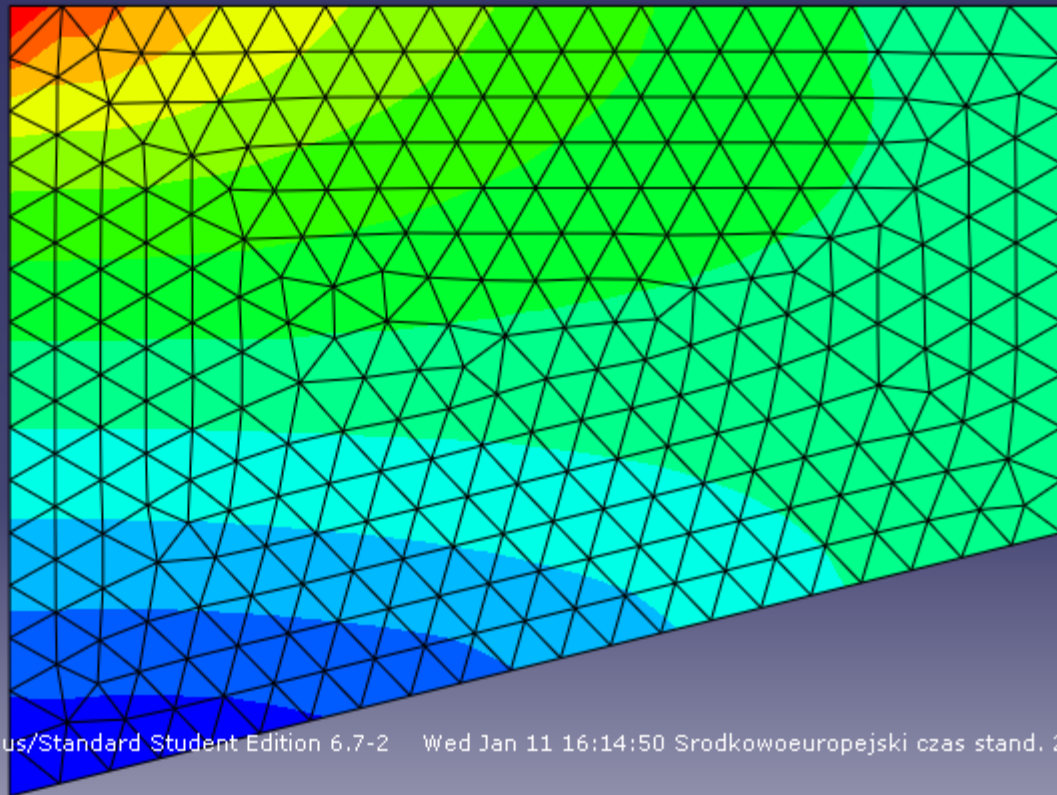
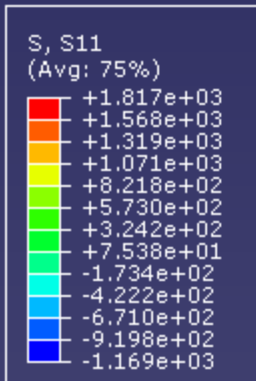
Plik Edycja Format Widok Pomoc

Node Label		Reakcje		Przemieszczenia	
		RF.RF1 @Loc 1	RF.RF2 @Loc 1	U.U1 @Loc 1	U.U2 @Loc 1
1		0.	0.	-8.18218E-06	-52.126E-06
2		66.6667	31.444	-66.6667E-36	-31.444E-36
3		0.	0.	15.2919E-06	-61.5592E-06
4		-66.6667	43.556	66.6667E-36	-18.556E-36

Element Label		Int Pt	Odształcenia			Naprężenia		
			E.E11 @Loc 1	E.E22 @Loc 1	E.E12 @Loc 1	S.S11 @Loc 1	S.S22 @Loc 1	S.S12 @Loc 1
1		1	-4.09109E-06	8.59197E-36	-26.063E-06	-104.964	-16.7943	-280.851
2		1	7.64594E-06	-9.43319E-06	-7.30552E-06	157.446	-210.638	-78.7232

Zastosowanie MES do rozwiązania LPTS dla płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie ABAQUS – duża liczba elementów skończonych – naprężenia S11



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard Student Edition 6.7-2 Wed Jan 11 16:14:50 Srodkowoeuropejski czas stand. 2017



Step: Step-1
Increment 1: Step Time = 2.2200E-16
Primary Var: S, S11