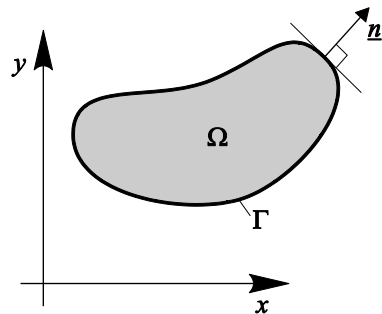


Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

- Równanie konstytutywne opisujące sposób w jaki ciepło przepływa w materiale o danych właściwościach, *prawo Fouriera*



$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \cdot \nabla T$$

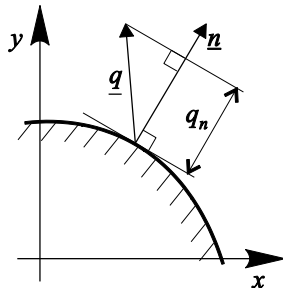
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

Macierz konstytutywna (właściwości) materiału

Wektor gradientu temperatury

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Wektor strumienia przepływu ciepła \mathbf{q} i jego składowa normalna q_n



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{n}\| = 1$$

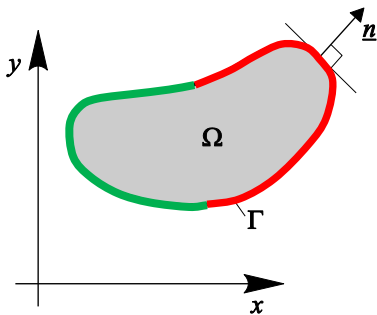
Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

□ Model matematyczny w sformułowaniu lokalnym: *równanie Poissona*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k}$$

Gdzie Q jest funkcją zadaną, opisującą ilość ciepła dostarczanego lub odbieranego z obszaru Ω , $k = \text{const} \equiv \mathbf{D}$ jest współczynnikiem przewodności cieplnej dla materiału jednorodnego i isotropowego.

Rozwiązanie równania Poissona wymaga dołączenia odpowiednich warunków brzegowych



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h$$
$$T = g$$

na brzegu Γ_h

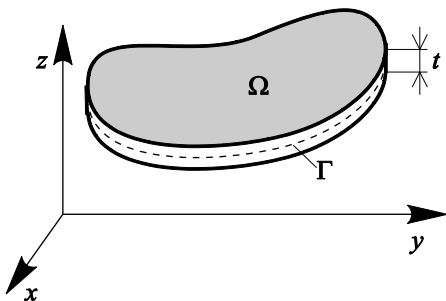
na brzegu Γ_g

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ *Skąd to równanie się wzięło?*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k}$$

Z rozważania równania równowagi (bilansu cieplnego) dla problemu stacjonarnego (*ustalonego*) w dowolnym obszarze (załóżmy, że nasz obszar jest płaski i ma grubość t)



$$\int_{\Omega} Qt \, d\Omega = \oint_{\Gamma} q_n t \, d\Gamma$$

Sumaryczna ilość ciepła dostarczonego/odebranego dla obszaru Ω

Sumaryczna ilość ciepła dostarczonego/odebranego na brzegu Γ

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Twierdzenie 1 (Gaussa o dywergencji).

Twierdzenie Gaussa o dywergencji wyrażają równania:

- *Dla problemów dwuwymiarowych:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, d\Gamma$$

gdzie $\operatorname{div} \mathbf{q}$ jest oznaczeniem dywergencji wektora \mathbf{q}

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

Zastosowanie twierdzenia Gaussa o dywergencji do równania bilansu cieplnego

$$\int_{\Omega} Q t \, d\Omega = \oint_{\Gamma} q_n t \, d\Gamma \quad \xrightarrow{\quad} \quad \int_{\Omega} [tQ - \operatorname{div}(t\mathbf{q})] \, d\Omega = 0$$

Note: In the original image, the term $\oint_{\Gamma} q_n t \, d\Gamma$ is boxed in green, and the final equation $\int_{\Omega} [tQ - \operatorname{div}(t\mathbf{q})] \, d\Omega = 0$ is boxed in orange. An arrow points from the boxed term to the boxed equation. Additionally, a green box highlights $\int_{\Omega} \operatorname{div}(t\mathbf{q}) \, d\Omega$ in the derivation above.

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Równanie będzie spełnione jeśli wyrażenie pod całką będzie równe 0

$$\int_{\Omega} [tQ - \text{div}(t\mathbf{q})] d\Omega = 0 \longrightarrow \text{div}(t\mathbf{q}) = tQ$$

Wprowadźmy do równania prawo fizyczne Fouriera

$$\text{div}(t\mathbf{q}) = tQ \longrightarrow \text{div}(t\mathbf{D} \nabla T) + tQ = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega$$

$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \cdot \nabla T$

Jeśli $\mathbf{D} = k = \text{const}$ (materiał jednorodny isotropowy) i $t = \text{const}$, otrzymujemy równanie w formie

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(tk \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(tk \frac{\partial T}{\partial y} \right) + tQ = 0 \quad /tk \longrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Przypomnijmy rozważany problem w sformułowaniu lokalnym

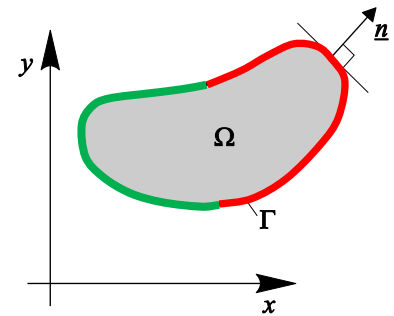
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k}$$

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h$$

$$T = g$$

na brzegu Γ_h

na brzegu Γ_g



gdzie:

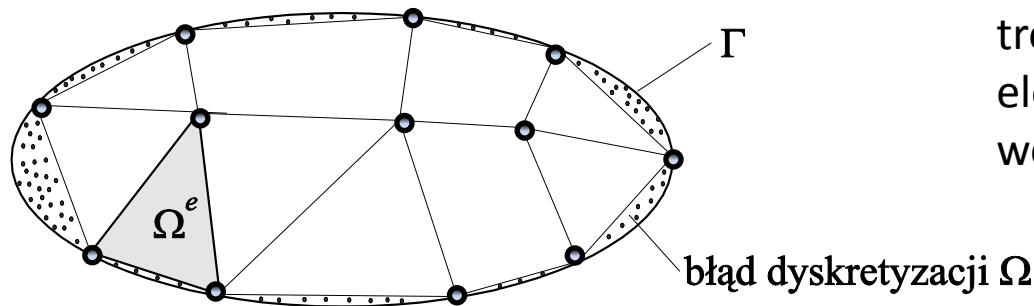
$T(x, y)$ jest funkcją temperatury, Q jest intensywnością generacji ciepła wewnątrz ciała (źródła ciepła) [$\text{J}/\text{m}^2\text{s}$], k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego materiału [$\text{J}/^\circ\text{C ms}$], \mathbf{q} jest wektorem strumienia przepływu ciepła o składowych mających wymiar [$\text{J}/\text{m}^2\text{s}$], q_n jest przepływem, a \mathbf{n} jest wektorem normalnym do brzegu Γ . Na brzegu Γ_h dane jest q_n (naturalny warunek brzegowy), natomiast na brzegu Γ_g dane jest T (podstawowy warunek brzegowy).

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

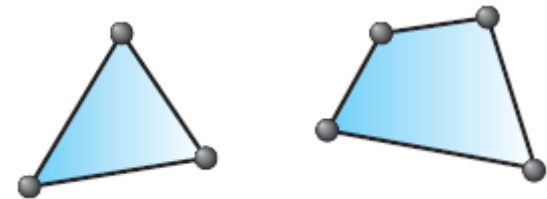
Procedura rozwiązania MES

- Dyskretyzacja obszaru
- Słabe sformułowanie wariacyjne Bubnowa-Galerkina dla elementu skończonego
- Aproksymacja: funkcje kształtu
- Agregacja: budowa globalnego układu równań
- Rozwiązanie układu równań MES z uwzględnieniem warunków brzegowych
- Powrót do elementu skończonego

Dyskretyzacja obszaru



Do dyskretyzacji obszaru dwuwymiarowego możemy użyć elementów trójkątnych z trzema węzłami i/lub elementów czworokątnych z czterema węzłami



Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Słabe sformułowanie wariacyjne Bubnowa-Galerkina dla elementu skończonego

Zgodnie z procedurą metody Bubnowa-Galerkina mnożymy rozważane równanie przez funkcję wagową v^e i całkujemy w obszarze elementu skończonego

$$\int_{\Omega^e} v^e \left(\frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} + \frac{Q^e}{k^e} \right) dx dy = 0$$

Uogólnionym twierdzeniem o całkowaniu przez części jest twierdzenie Greena-Gaussa

Twierdzenie 2 (Greena-Gaussa)

- *Dla problemów dwuwymiarowych:*

$$\int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \mathbf{q} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} \, d\Omega \quad \nabla \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

gdzie ϕ jest funkcją skalarną

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

- Po wykorzystaniu twierdzenia Greena-Gausa (dla $\phi = v^e$), $\text{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2}$ otrzymujemy

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} \frac{\partial T^e}{\partial x} k^e + \frac{\partial v^e}{\partial y} \frac{\partial T^e}{\partial y} k^e - v^e Q^e \right) dx dy +$$
$$- \int_{\Gamma^e} v^e \left(n_x^e k^e \frac{\partial T^e}{\partial x} + n_y^e k^e \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) ds$$

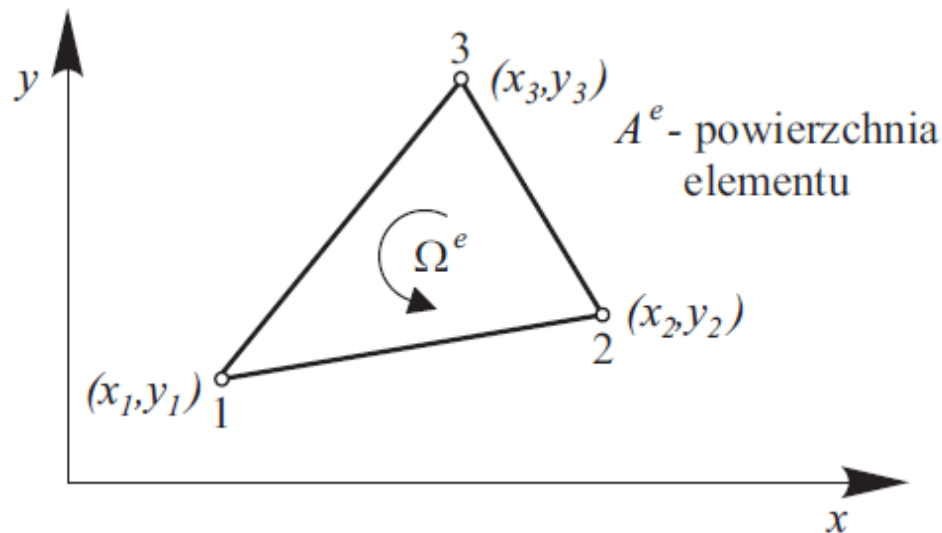
Lub w zapisie macierzowym

$$\int_{\Omega^e} (\nabla v^e)^T k^e \nabla T^e dx dy = \int_{\Omega^e} v^e Q^e dx dy - \int_{\Gamma^e} v^e q_n^e ds$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

□ Aproksymacja: funkcje kształtu

Przyjmujemy, że obszar elementu skończonego Ω^e będzie trójkątem, dalej że funkcje kształtu będą funkcjami bazowymi liniowej interpolacji Lagrange'a a więc nasz element będzie opisany trzema węzłami z jednym stopniem swobody w węźle.



$\mathbf{N}_1^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]$ – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Funkcje kształtu

Jak obliczyć funkcje kształtu

$$N_1 = a_1x + b_1y + c_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = a_2x + b_2y + c_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = a_3x + b_3y + c_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

□ Aproksymacja

$$T^e(x, y) = N^e(x, y)T^e$$

$$v^e(x, y) = N^e(x, y)c^e$$

$T^e = [T_1^e \ T_2^e \ T_3^e]^T$ – wektor stopni swobody elementu skończonego (wartości temperatury w węzłach),

c^e – wektor parametrów aproksymacji funkcji wagowej,

$N_1^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]$ – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Pochodne (wektory gradientu) funkcji temperatury i funkcji wagowej

$$\begin{aligned}\nabla T^e &= \nabla(N^e T^e) = \nabla N^e T^e = B^e T^e \\ \nabla v^e &= \nabla(N^e c^e) = \nabla N^e c^e = B^e c^e\end{aligned}$$

$$B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = a_1 x + b_1 y + c_1$$

$$N_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$$

$$N_3 = a_3 x + b_3 y + c_3$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = a_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = a_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = a_3$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = b_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = b_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = b_3$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Wprowadzając aproksymacje funkcji T^e i v^e do równania wariacyjnego otrzymujemy układ równań MES dla elementu skończonego

$$K^e T^e = F^e$$

$$K^e = \int_{\Omega^e} (B^e)^T k^e B^e dx dy = k^e A^e (B^e)^T B^e$$

gdzie

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^e = f^e + P^{eb}$$

$$f^e = \int_{\Omega^e} (N^e)^T Q^e dx dy \quad P^{eb} = - \oint_{\Gamma^e} (N^e)^T q_n^e ds$$

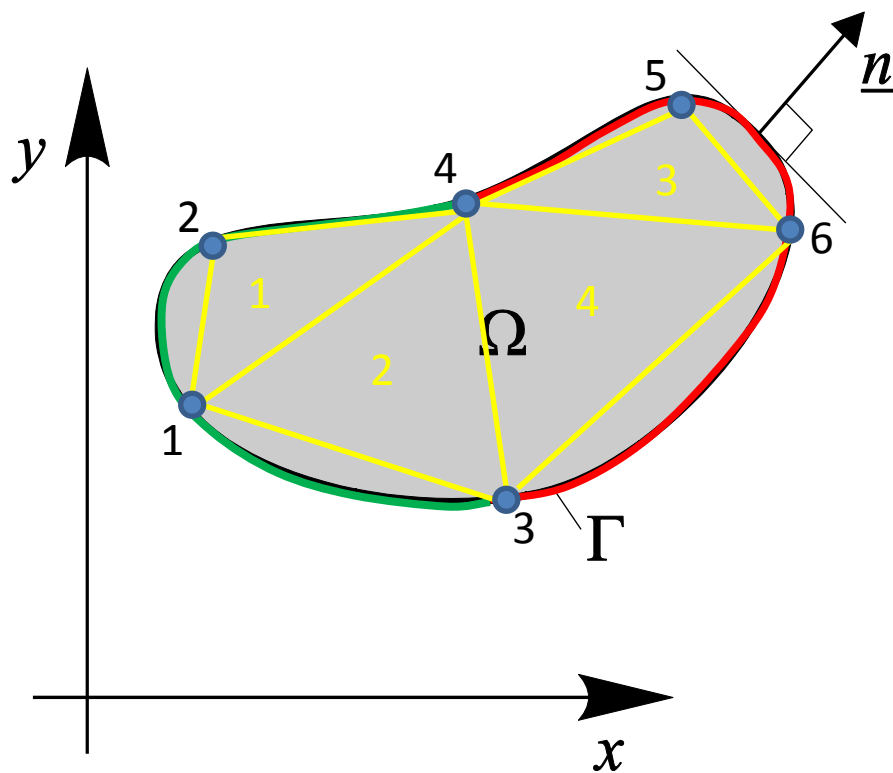
Jeśli $Q = \text{const}$

$$f^e = \frac{Q}{3} A^e [1 \ 1 \ 1]^T$$

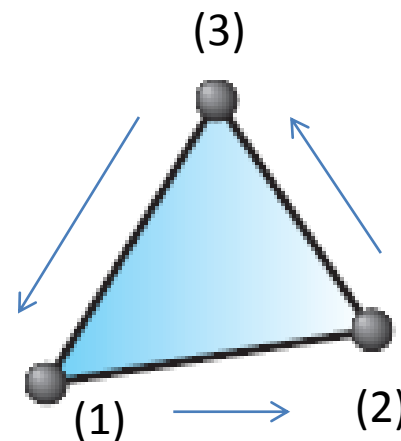
Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Aggregacja: budowa globalnego układu równań

Macierz topologii

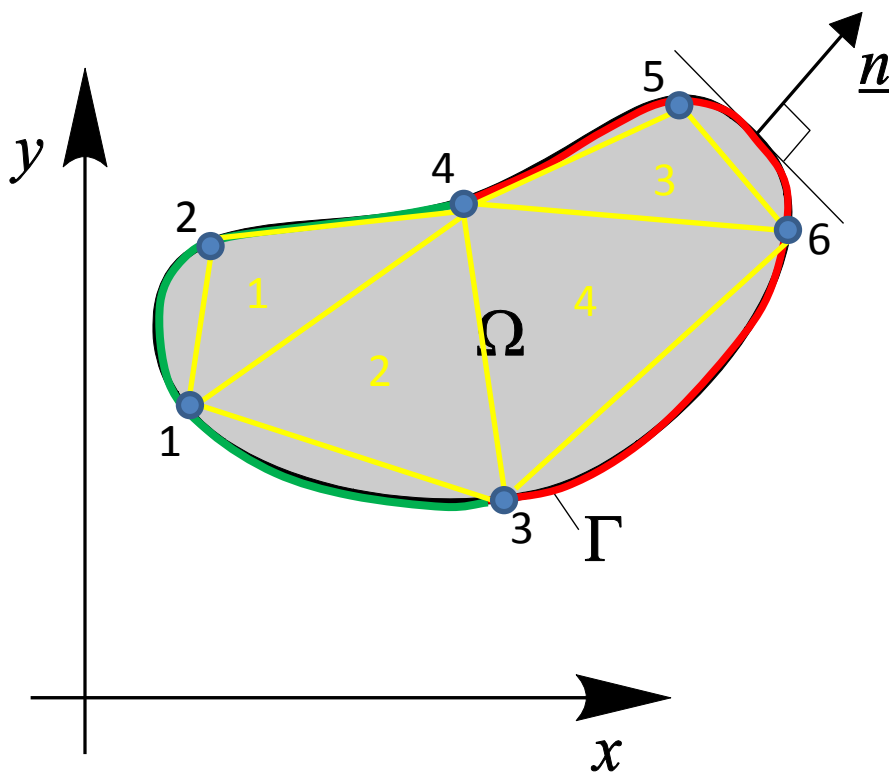


element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4



Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Macierze i wektory

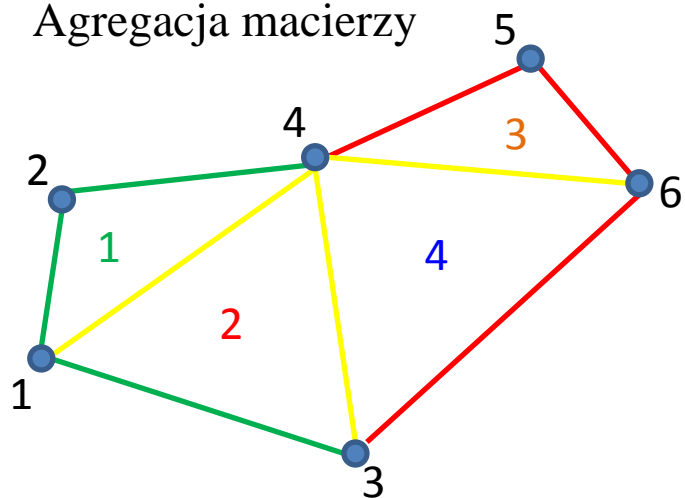


Współrzędne węzłów

Węzeł	x	y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
4	x_4	y_4
5	x_5	y_5
6	x_6	y_6

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Agregacja macierzy



Macierz topologii

element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

$$K^1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

1 4 2

	1	2	3	4	5	6
1	k_{11}	k_{13}	0	k_{12}	0	0
2	k_{31}	k_{33}	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	k_{21}	0	0	k_{22}	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Macierz topologii

$$K^2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

1 3 4

element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

	1	2	3	4	5	6
1	$k_{11}+k_{11}$	k_{13}	k_{12}	$k_{12}+k_{13}$	0	0
2	k_{31}	k_{33}	0	0	0	0
3	k_{21}	0	k_{22}	k_{23}	0	0
4	$k_{21}+k_{31}$	0	k_{32}	$k_{22}+k_{33}$	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Macierz topologii

$$K^3 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

4 6 5

element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

	1	2	3	4	5	6
1	$k_{11}+k_{11}$	k_{13}	k_{12}	$k_{12}+k_{13}$	0	0
2	k_{31}	k_{33}	0	0	0	0
3	k_{21}	0	k_{22}	k_{23}	0	0
4	$k_{21}+k_{31}$	0	k_{32}	$k_{22}+k_{33}+k_{11}$	k_{13}	k_{12}
5	0	0	0	k_{31}	k_{33}	k_{32}
6	0	0	0	k_{21}	k_{23}	k_{22}

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Macierz topologii

$$K^4 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{matrix}$$

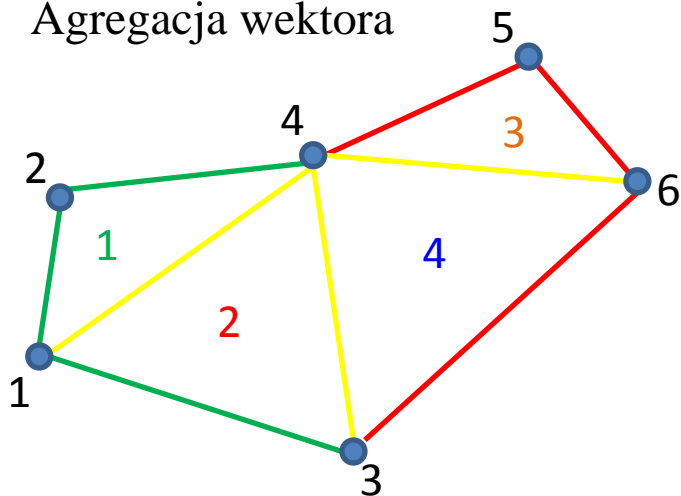
3 6 4

element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

	1	2	3	4	5	6
1	$k_{11}+k_{11}$	k_{13}	k_{12}	$k_{12}+k_{13}$	0	0
2	k_{31}	k_{33}	0	0	0	0
3	k_{21}	0	$k_{22}+k_{11}$	$k_{23}+k_{13}$	0	k_{12}
4	$k_{21}+k_{31}$	0	$k_{32}+k_{31}$	$k_{22}+k_{33}+k_{11}+k_{33}$	k_{13}	$k_{12}+k_{32}$
5	0	0	0	k_{31}	k_{33}	k_{32}
6	0	0	k_{21}	$k_{21}+k_{23}$	k_{23}	$k_{22} + k_{22}$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Agregacja wektora



Macierz topologii

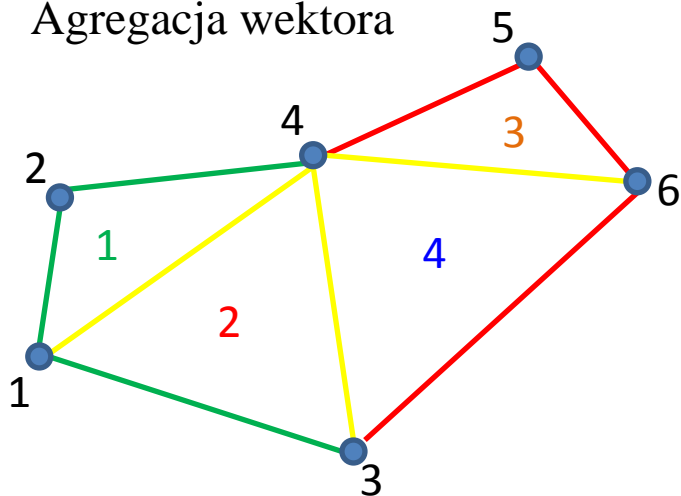
element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

$$F^1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

	1
1	F_1
2	F_3
3	0
4	F_2
5	0
6	0

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Agregacja wektora



Macierz topologii

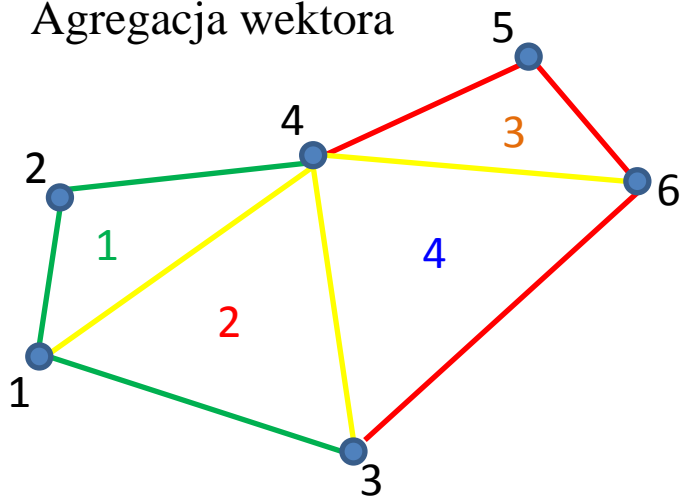
element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

$$F^2 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

	1
1	$F_1 + F_2$
2	F_3
3	F_3
4	$F_2 + F_3$
5	0
6	0

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Agregacja wektora



Macierz topologii

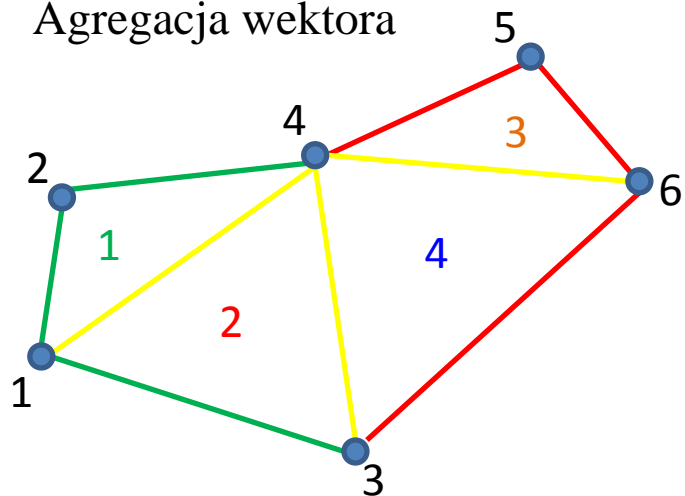
element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

$$F^3 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

	1
1	$F_1 + F_1$
2	F_3
3	F_3
4	$F_2 + F_3 + F_1$
5	F_3
6	F_2

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Agregacja wektora



Macierz topologii

element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

$$F^4 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{matrix}$$

	1
1	$F_1 + F_1$
2	F_3
3	$F_3 + F_1$
4	$F_2 + F_3 + F_1 + F_3$
5	F_3
6	$F_2 + F_2$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Globalny układ równań MES

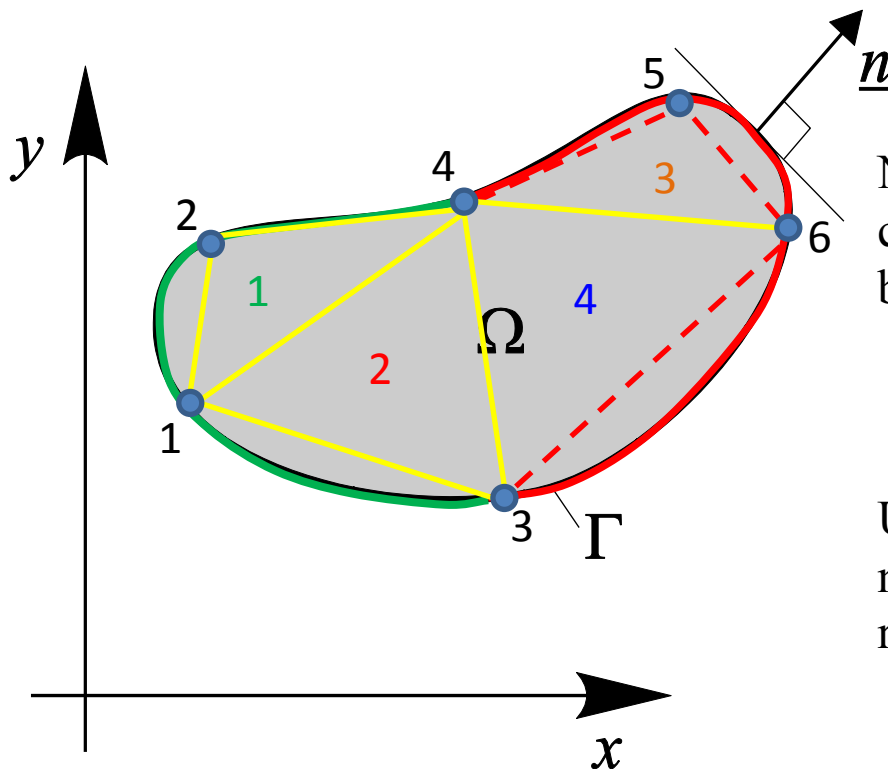
$k_{11}+k_{11}$	k_{13}	k_{12}	$k_{12}+k_{13}$	0	0	T_1	F_1+F_1
k_{31}	k_{33}	0	0	0	0	T_2	F_3
k_{21}	0	$k_{22}+k_{11}$	$k_{23}+k_{13}$	0	k_{12}	T_3	F_3+F_1
$k_{21}+k_{31}$	0	$k_{32}+k_{31}$	$k_{22}+k_{33}+k_{11}+k_{33}$	k_{13}	$k_{12}+k_{32}$	T_4	$F_2+F_3+F_1+F_3$
0	0	0	k_{31}	k_{33}	k_{32}	T_5	F_3
0	0	k_{21}	$k_{21}+k_{23}$	k_{23}	$k_{22} + k_{22}$	T_6	F_2+F_2

*

=

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Uwzględnienie warunków brzegowych



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h$$

$$T = g$$

na brzegu Γ_h

na brzegu Γ_g

Na tym brzegu dana jest wartość przepływu ciepła q_n . A więc dla węzłów należących do brzegu wyznaczane są równoważniki z:

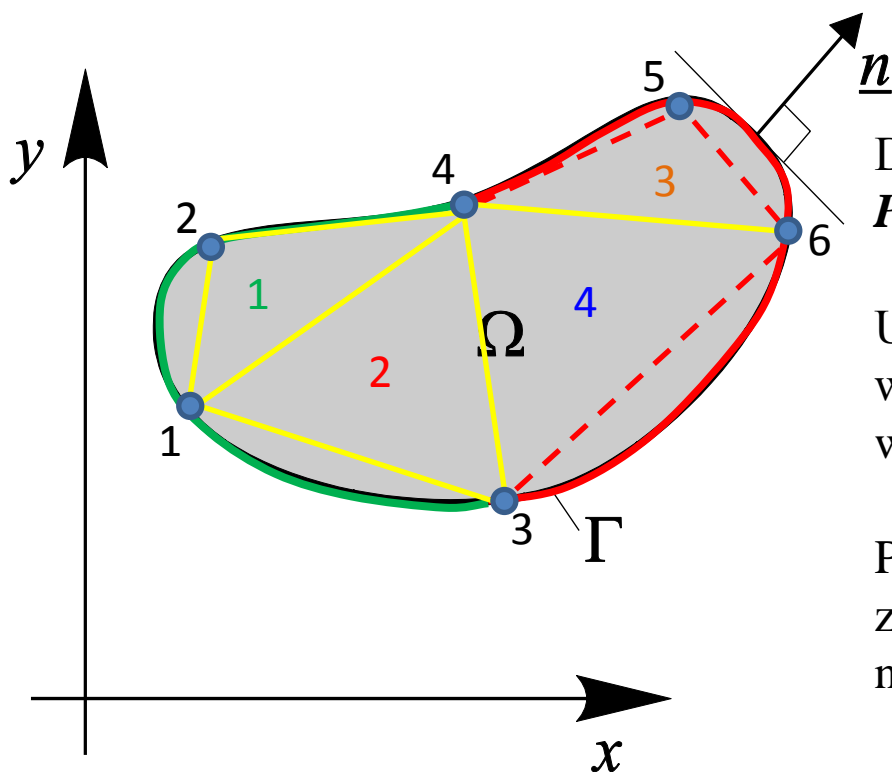
$$P^{eb} = - \oint_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^T q_n^e ds$$

Uwaga: całkujemy po brzegu!!! Sprawa jest nieco łatwiejsza jeśli brzeg elementu jest linią równoległą do którejś z osi współrzędnych.

$$P^{3b} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \quad P^{4b} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{matrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Uwzględnienie warunków brzegowych



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h$$

na brzegu Γ_h

$$T = g$$

na brzegu Γ_g

Dla węzłów brzegowych 1 i 2 wartości wektora \mathbf{P}^b nie są znane i będą podlegać wyznaczeniu.

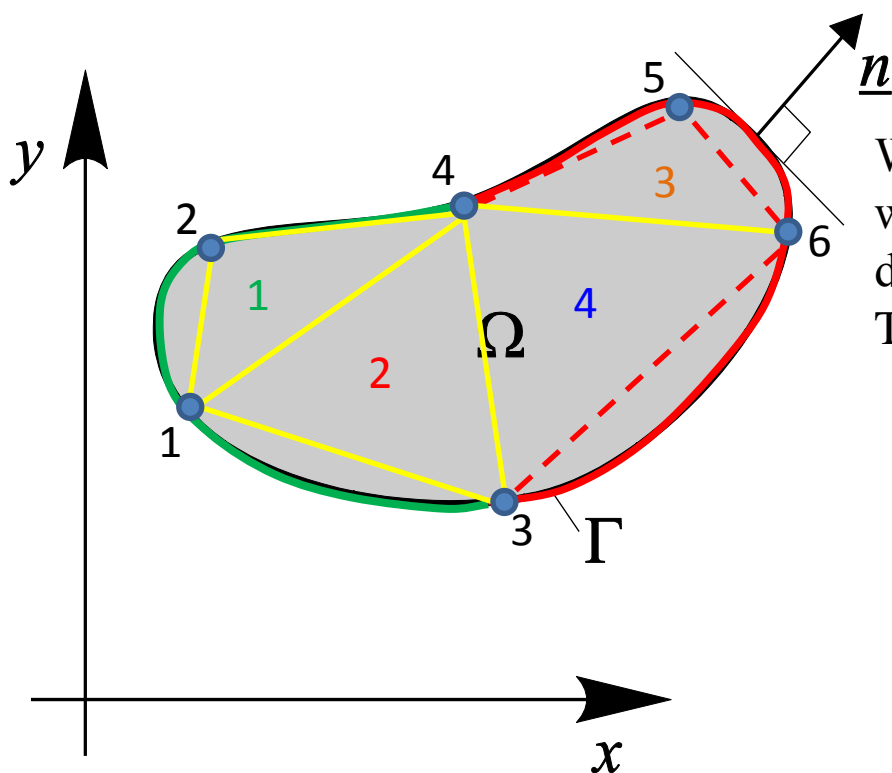
Uwaga: w tym przykładzie nie ma węzłów wewnątrz obszaru. Dla takich węzłów składowe wektora \mathbf{P}^b byłyby równe zero.

Po agregacji otrzymujemy wektor globalny ze znanymi wartościami P_3, P_4, P_5, P_6 i z nieznanymi P_1 i P_2 .

$$\mathbf{P}^b = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Uwzględnienie warunków brzegowych



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h$$

$$T = g$$

na brzegu Γ_h

na brzegu Γ_g

W przypadku brzegu na którym zadana jest wartość temperatury wektor będzie zawierał dwie znane wartości T_1 i T_2 i cztery nieznane T_3 , T_4 , T_5 i T_6 .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Globalny układ równań MES po uwzględnieniu warunków brzegowych

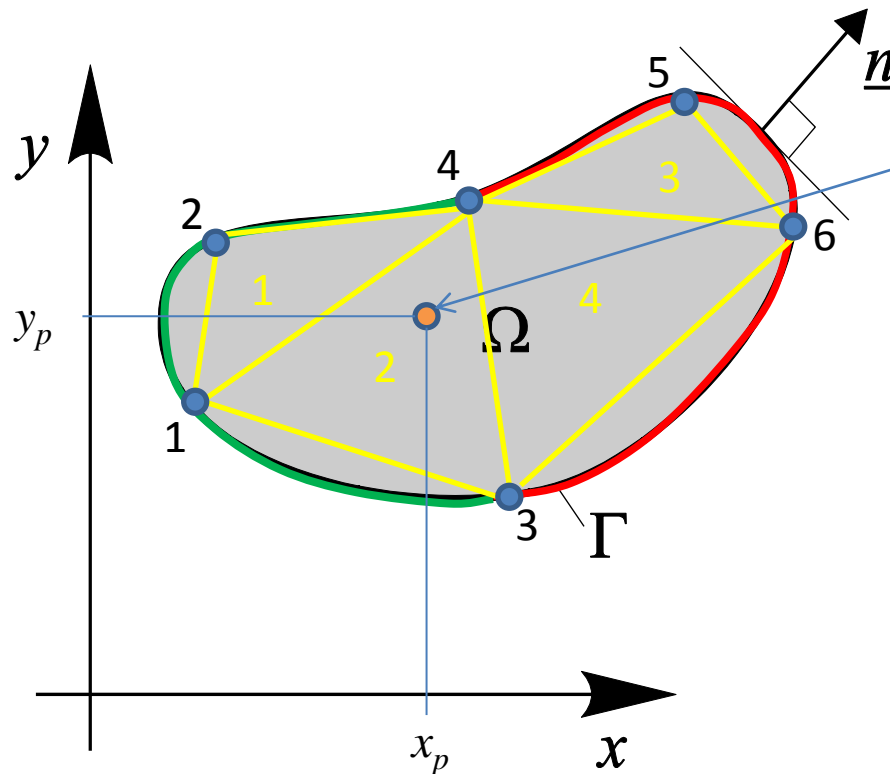
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} \\ k_{41} & 0 & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Niewiadome pierwotne

Niewiadome wtórne

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Powrót do elementu skończonego

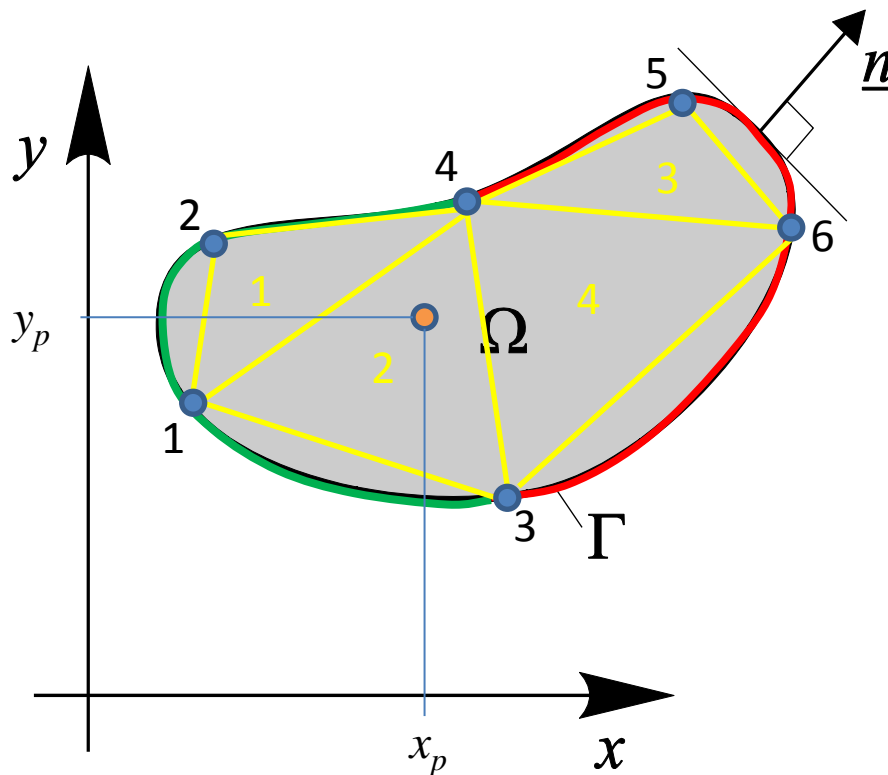


Jaka jest wartość temperatury w wybranym punkcie o współrzędnych (x_p, y_p) . Punkt należy do elementu 2. Rozwiązaniem są wartości temperatury w węzłach siatki skończenie elementowej

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Powrót do elementu skończonego



Macierz topologii

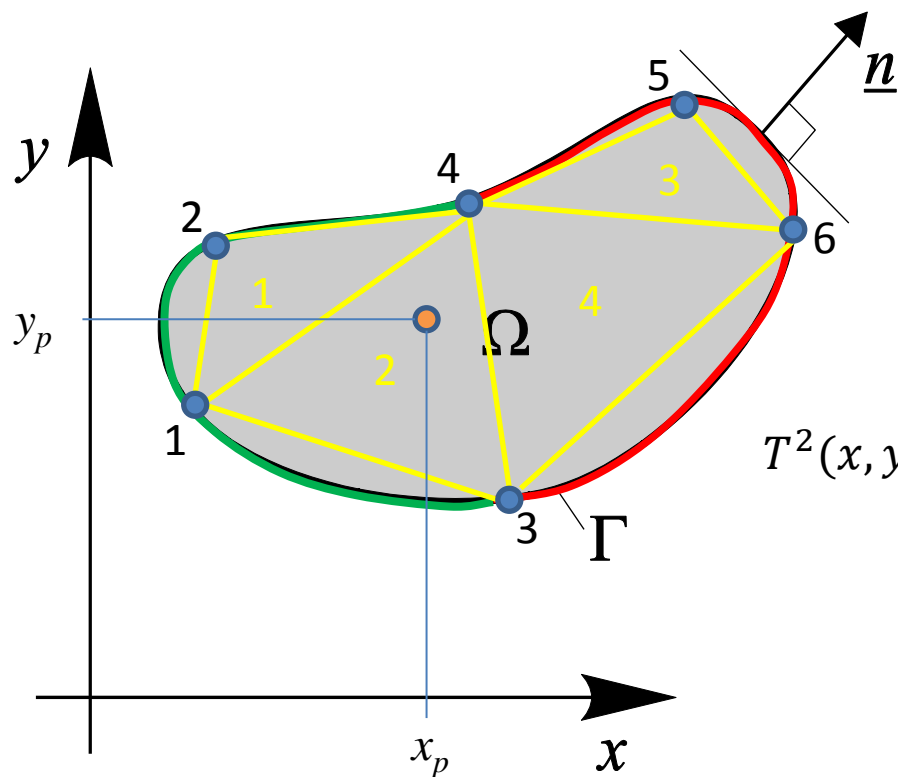
element	Węzeł (1)	Węzeł (2)	Węzeł (3)
1	1	4	2
2	1	3	4
3	4	6	5
4	3	6	4

Z macierzy topologii odczytujemy, które wartości z wektora temperatury należą do elementu 2

$$T^2 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Powrót do elementu skończonego



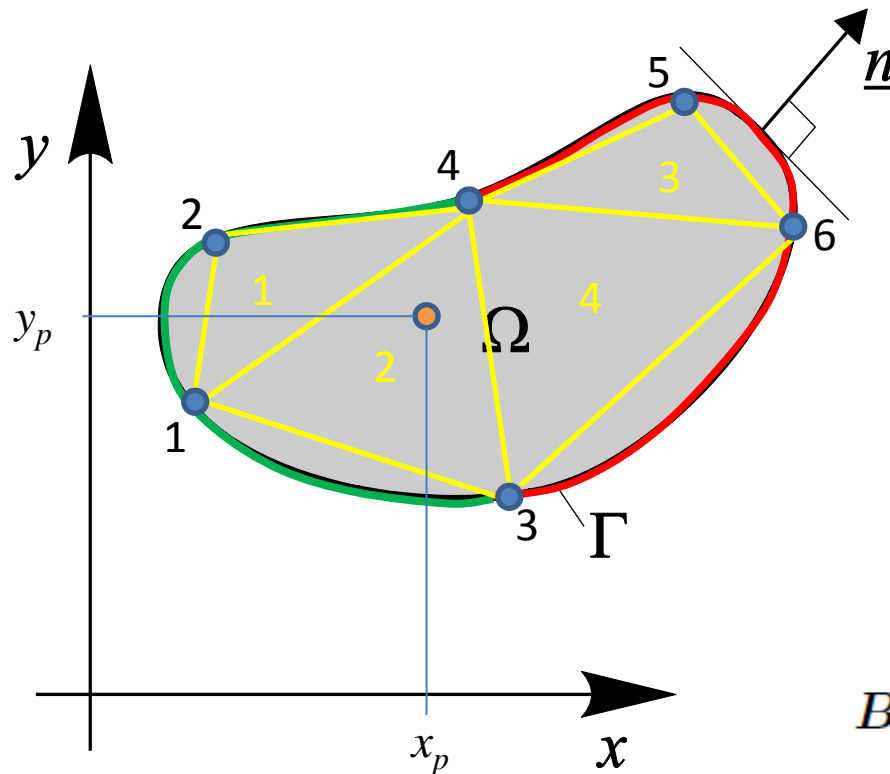
Wartość temperatury w punkcie obliczamy z użytej aproksymacji podstawiając za $x=x_p$ i $y=y_p$ oraz funkcje kształtu obliczone dla elementu 2

$$T^e(x, y) = N^e(x, y)T^e$$

$$T^2(x, y) = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

❑ Powrót do elementu skończonego



Tak samo możemy znaleźć wektor strumienia przepływu ciepła podstawiając za $x=x_p$ i $y=y_p$ oraz pochodne funkcji kształtu obliczone dla elementu 2

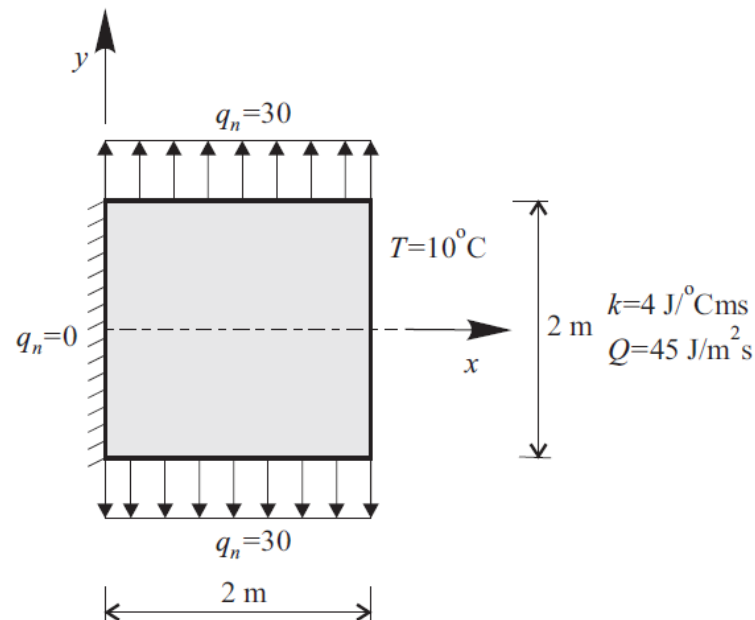
$$\mathbf{q}^2(x, y) = -k\mathbf{B}^2 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}^e$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

□ Zadanie obliczeniowe

Przykład 6.8. Wyznamy rozkład temperatury dla tarczy pokazanej na rys. 6.32 [9]. Jest ona wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego, dla

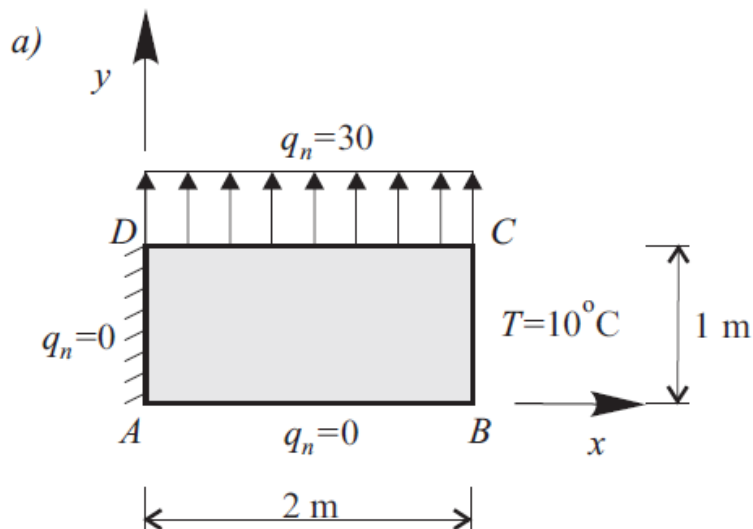


Rys.6.32. Tarcza z przepływem ciepła

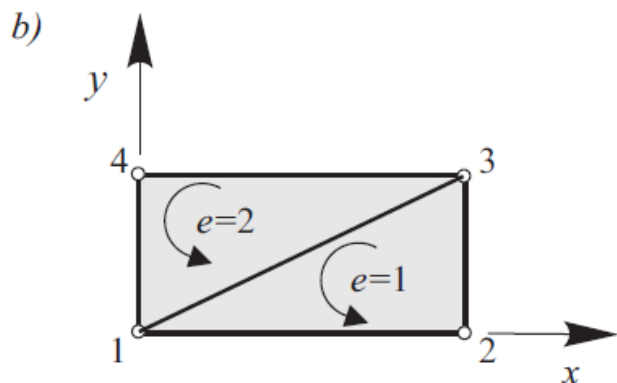
którego $k = 4 \text{ J}/^\circ\text{Cms}$. Grubość tarczy $t = 1 \text{ m}$. Intensywność generacji ciepła $Q = 45 \text{ J}/\text{m}^2\text{s}$. Na brzegu $x = 2 \text{ m}$ zadany jest podstawowy warunek brzegowy $T = 10^\circ\text{C}$, natomiast naturalny warunek brzegowy $q_n = 30 \text{ J}/\text{m}^2\text{s}$ jest określony na brzegach $y = 1 \text{ m}$ i $y = -1 \text{ m}$ oraz $q_n = 0$ jest na brzegu $x = 0$.

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Dyskretyzacja



Węzeł	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	1
4	0	1



Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	1 3 4

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Obliczenia

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad B^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad B^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f^1 = f^2 = \frac{Q}{3} A^e [1 \ 1 \ 1]^T = 15 [1 \ 1 \ 1]^T$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Obliczenia

$$P_{B-C}^{1b} = - \int_0^1 q_n \begin{bmatrix} 0 \\ N_2^1(x=2, y) \\ N_3^1(x=2, y) \end{bmatrix} dy$$

$$P_2^{1b} = \int_0^1 q_n N_2^1(x=2, y) dy$$

$$P_3^{1b} = \int_0^1 q_n N_3^1(x=2, y) dy$$

$$P_{C-D}^{2b} = - \int_0^2 30 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x}{2} \\ 1 - \frac{x}{2} \end{bmatrix} dx = - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$F^1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 + P_2^{1b} \\ 15 + P_3^{1b} \end{bmatrix}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 - 30 \\ 15 - 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 10 \\ 10 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 + P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$P_2^{1b} = -25 \qquad P_3^{1b} = -5$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Rozwiązanie

$$T^1 = [20 \ 10 \ 10]^T$$

$$q^1 = -2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

$$T^2 = [20 \ 10 \ 15]^T$$

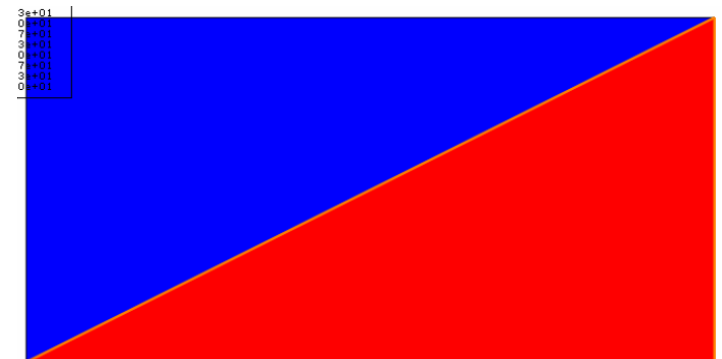
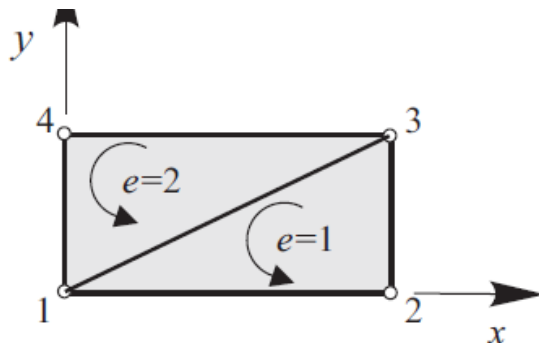
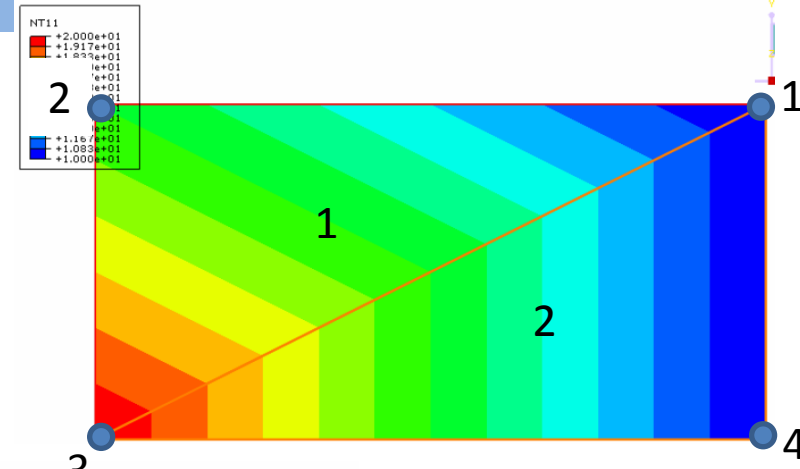
$$q^2 = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Rozwiązanie ABAQUS

Node Label	NT11 @Loc 1
1	10.
2	15.
3	20.
4	10.

Element Label	Int Pt	HFL.Magnitude @Loc 1	HFL.HFL1 @Loc 1	HFL.HFL2 @Loc 1
1	1	22.3607	10.	20.
1	2	22.3607	10.	20.
1	3	22.3607	10.	20.
2	1	20.	20.	0.
2	2	20.	20.	0.
2	3	20.	20.	0.



Zastosowanie MES do rozwiązania problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D

Rozwiązanie ABAQUS

