

METODY KOMPUTEROWE W MECHANICE

wykład

dr inż. Paweł Stąpór

laboratorium – 15 g, projekt – 15 g.

dr inż. Paweł Stąpór

dr inż. Sławomir Koczubiej

Politechnika Świętokrzyska

Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Katedra Informatyki i Matematyki Stosowanej

(wrzesień 2016)

Kontakt

dr inż. Paweł Stapor
Budynek C, pokój 3.26
stapor@tu.kielce.pl

dr inż. Sławomir Koczubiej
Budynek C, pokój 3.26
sk@tu.kielce.pl

WYKŁAD

- Wykłady są obowiązkowe (zgodnie z postanowieniami regulaminu) ale ...
- Obecność na wykładach może nie być kontrolowana
- Warunkiem zaliczenia wykładu jest uzyskanie pozytywnej oceny z pisemnego egzaminu końcowego

LABORATORIUM

- Zajęcia laboratoryjne są obowiązkowe
- Dopuszcza się JEDNĄ nieobecność
- W przypadku usprawiedliwionej nieobecności zajęcia można odrobić z inną grupą
- Warunkiem zaliczenia laboratorium jest wykonanie zadań podczas zajęć laboratoryjnych

Warunki zaliczenia

PROJEKT

- Zajęcia projektowe są obowiązkowe
- Dopuszcza się JEDNĄ nieobecność
- W przypadku usprawiedliwionej nieobecności zajęcia można odrobić z inną grupą
- Warunkiem zaliczenia zajęć projektowych jest wykonanie i oddanie w wyznaczonym terminie sprawozdań z rozwiązania wybranych zagadnień

Literatura

- Cichoń C. *Metody obliczeniowe. Wybrane zagadnienia*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2005.
- Rakowski G., Kacprzyk Z. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
- Cichoń C, Cecot W, Krok J, Pluciński P. *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.
- Jankowscy M. i J. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*. Wydawnictwo WNT, Warszawa 1988.
- Dryja M., Jankowscy M. i J. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 2*. Wydawnictwo WNT, Warszawa 1988.



Zakres i cel zajęć

Wykład

- Schemat komputerowej analizy konstrukcji, modele matematyczne dla problemów mechaniki, metoda wariacyjna Bubnowa-Galerkina
- Podstawowe etapy procedury metody elementów skończonych
- Zastosowanie MES do problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D
- Zastosowanie MES do liniowego problemu teorii sprężystości.
- Zastosowanie MES do problemów 1D i 2D zależnych od czasu
- Egzamin w formie pisemnej

Projekt

- Realizacja projektu zaliczeniowego z wybranych zagadnień :
- Metoda wariacyjna Bubnowa-Galerkina rozwiązania problemu brzegowego
- Algorytm metody elementów skończonych na przykładzie rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego
- Rozwiązanie MES problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze 2D
- Rozwiązanie MES tarczy w płaskim stanie naprężenia

Zakres i cel zajęć

Laboratorium

- Wprowadzenie do systemu ABAQUS na przykładzie analizy belki
- Rozwiązanie MES problemu przepływu ciepła w obszarze 2D z użyciem systemu ABAQUS
- Analiza naprężeń w tarczy sprężystej z użyciem systemu ABAQUS
- Rozwiązanie MES problemu zależnego od czasu
- Wykonanie zadań laboratoryjnych, dyskusja wyników

Wprowadzenie

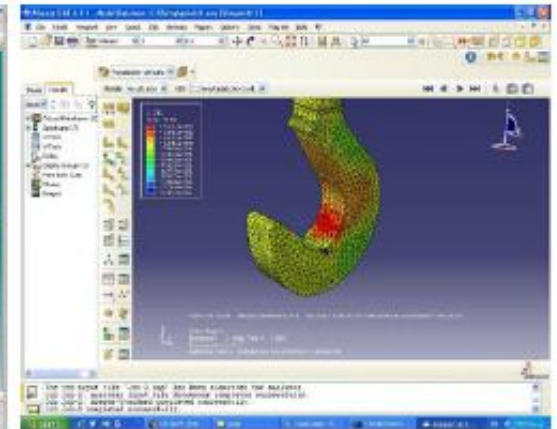
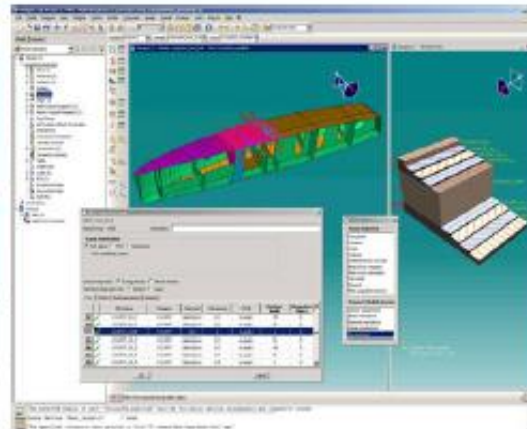
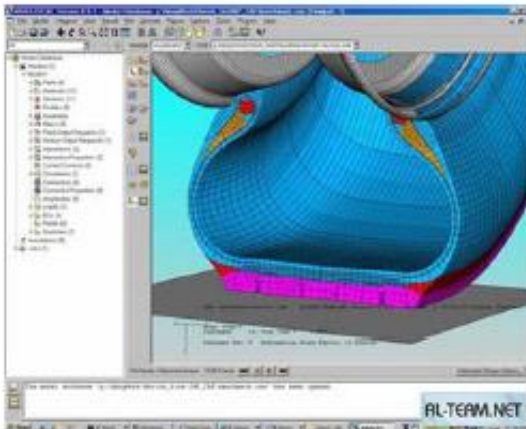
Metody komputerowe

Metody rozwiązań przybliżonych, wykorzystywane w mechanice komputerowej. W formułowaniu tych metod korzysta się w dużym stopniu z zaawansowanego aparatu matematycznego (metody wariacyjne, analiza funkcjonalna) co pozwala rozwiązywać skomplikowane zagadnienia i dowodzić zbieżności ich rozwiązania. Wśród metod komputerowych można wymienić **metodę elementów skończonych (MES)**, **metodę elementów brzegowych (MEB)**, **uogólnioną metodę różnic skończonych (UMRS)** czy **bezelementową metodę Galerkina (BMG)**.

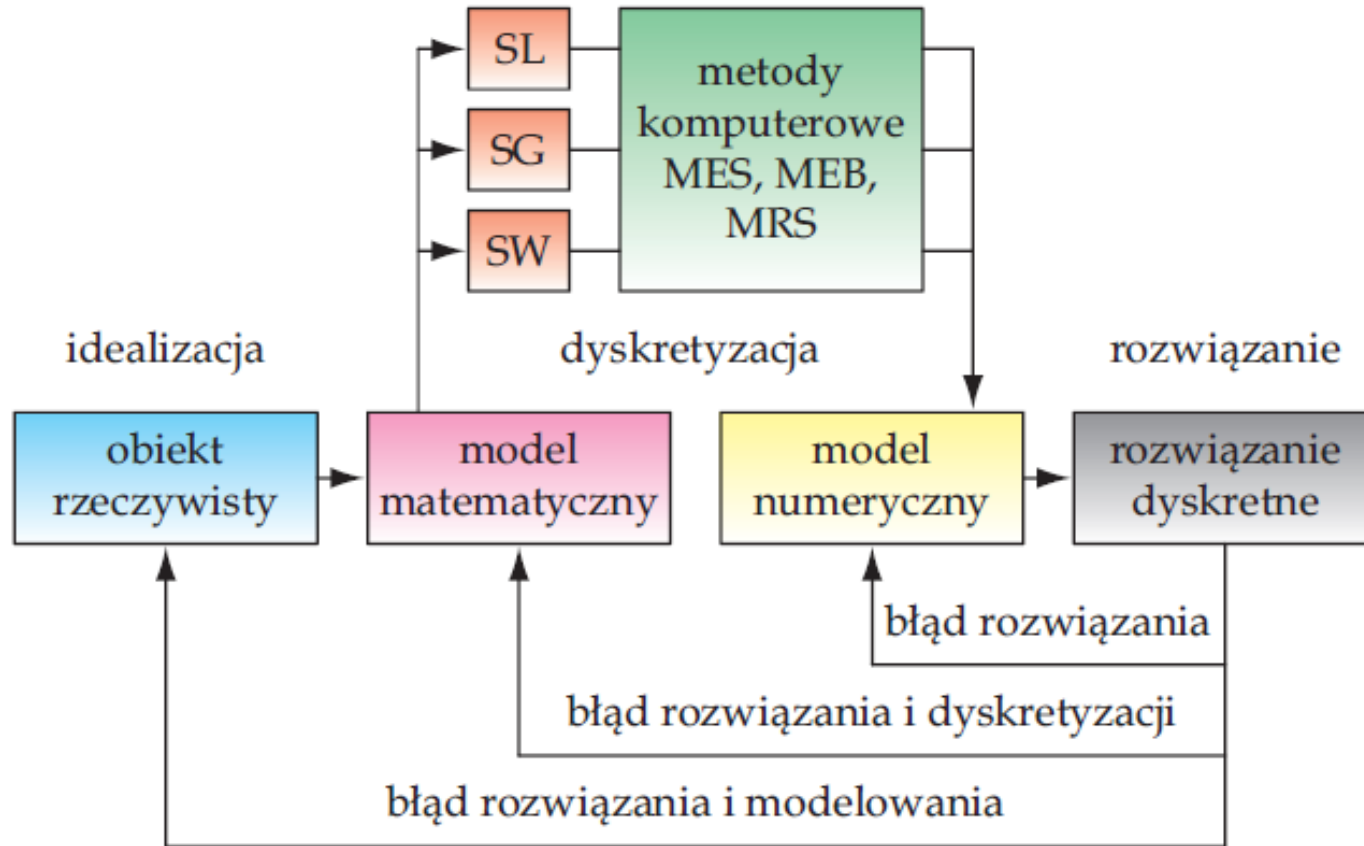
Termin metoda komputerowa często jest używana jako nazwa procesu projektowania lub analizy konstrukcji z wykorzystaniem metod obliczeń przybliżonych, zaimplementowanych do komputera w formie programów napisanych w różnych językach programowania.

Wprowadzenie

Programy te umożliwiają symulację kinematyki lub dynamiki układu, analizę przepływu ciepła i masy, naprężeń i innych cech projektowanego wyrobu. Pozwala to na znaczne przyspieszenie procesu projektowania i przede wszystkim na obniżenie kosztów projektowania. Do tej grupy oprogramowania należą m. in. **Abaqus, ADINA, ANSYS, NX Nastran, FEMAP.**



Wprowadzenie



Rys. 1: Schemat komputerowej analizy konstrukcji

Model matematyczny

Modelem matematycznym mogą być odpowiednio sformułowane **problemy brzegowe** (lub początkowo brzegowe) dla równań różniczkowych (zwykajnych lub cząstkowych) lub pewne **funkcjonały** podlegające minimalizacji.

Pierwszy przypadek to **sformułowanie lokalne** (SL), drugi natomiast to **sformułowanie globalne** problemu (SG). W budowie komputerowej metody analizy konstrukcji preferowane jest sformułowanie globalne.

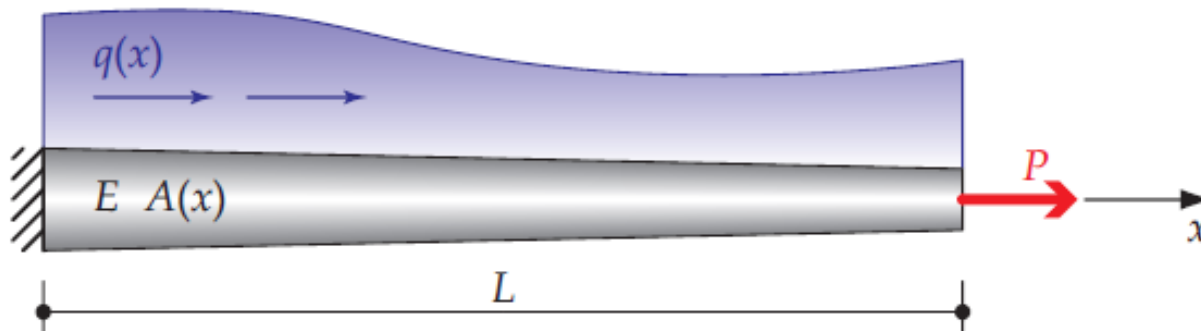
Trudność jednakże polega na tym, że nie wszystkie problemy, a tylko tzw. problemy samosprężone możemy równoważnie opisać w sformułowaniu lokalnym lub globalnym. Przykładem problemu samosprężonego jest **liniowy problem teorii sprężystości** (LPTS) opisany 15. równaniami różniczkowo-algebraicznymi ze stosownymi warunkami brzegowymi lub pewnym funkcjonałem.

Funkcjonałem w LPTS będzie funkcjonał **całkowitej energii potencjalnej** układu.

Jeśli rozważany problem w sformułowaniu lokalnym nie jest problemem samosprężonym, można budować równanie całkowe wykorzystując metody **wariacyjne** (SW).

Sformułowania lokalne

Rozważmy pręt o powierzchni przekroju poprzecznego $A(x)$ i długości L . Pręt zrobiony jest z materiału o module Younga E . Pręt jest obciążony obciążeniem ciągłym działającym wzdłuż osi pręta o intensywności $q(x)$ i siłą skupioną P .

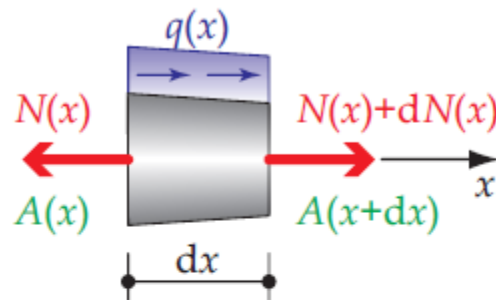


Rys. 2: Pręt rozciągany

Tak zdefiniowany problem może być uznany za **problem jednowymiarowy**, jeśli wymiary przekroju poprzecznego pręta są małe w stosunku do jego długości, co pozwala przyjąć, że naprężenia po wysokości pręta są pomijalnie małe w stosunku do naprężeń wzdłuż pręta.

Sformułowania lokalne

Równanie różniczkowe, będące modelem matematycznym problemu pręta rozciąganego, otrzymamy rozważając nieskończenie mały element dx pręta.



Rys. 3: Element dx pręta

$N(x)$ i $N(x) + dN(x)$ są **siłami normalnymi** działającymi w przekrojach $A(x)$ i $A(x + dx)$. Korzystając z **warunku równowagi** możemy zapisać

$$-N(x) + N(x) + dN(x) + q(x)dx = 0. \quad (1)$$

Zatem, nasze równanie będzie miało postać

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad (2)$$
$$0 < x < L.$$

Sformułowania lokalne

Siłę **normalną** (podłużną) stanowi suma **naprężeń normalnych** na całym przekroju. Jeśli naprężenia są stałe w przekroju pręta, to możemy je określić z zależności

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)}, \quad (3)$$

i następnie

$$N(x) = \sigma_x(x)A(x). \quad (4)$$

Wykorzystując **równanie fizyczne** (konstrytywne, Hooke'a) określające zależność odkształcenia od naprężenia

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x), \quad (5)$$

i **równanie geometryczne** (Cauchy'ego) wiążące ze sobą przemieszczenia i odkształcenia

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (6)$$

będziemy mogli napisać

$$N(x) = EA(x)\frac{du(x)}{dx}. \quad (7)$$

Sformułowania lokalne

Wykorzystując zależność

$$N(x) = EA(x) \frac{du(x)}{dx}, \quad (8)$$

będziemy mogli zapisać równanie różniczkowe w formie

$$\frac{d}{dx} \left(EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0, \quad (9)$$
$$0 < x < L,$$

lub jeśli $EA = \text{const.}$

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad (10)$$
$$0 < x < L.$$

Sformułowania lokalne

Do rozwiązania takiego równania różniczkowego potrzebne jest jeszcze sformułowanie **warunków brzegowych** na brzegach pręta.

Równanie jest drugiego rzędu, zatem wymagane są dwa warunki brzegowe, ustalające wartość przemieszczenia u lub siły P . Jednoznaczność rozwiązania wymaga, aby warunki brzegowe podane były na dwóch różnych brzegach.

$$u(x = 0) = 0, \quad (11)$$

$$N(x = L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P \Rightarrow EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P. \quad (12)$$

Pierwszy warunek dla funkcji u nazywany jest **podstawowym** (kinematycznym) warunkiem brzegowym, natomiast drugi, dla pochodnej funkcji $\frac{du}{dx}$ jest nazywany **naturalnym** (statycznym) warunkiem brzegowym.

Sformułowania lokalne

Ostatecznie **model matematyczny** problemu pręta rozciąganego będzie miał postać

$$\frac{d}{dx} \left(EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0, \quad (13)$$

$$0 < x < L,$$

$$u(x=0) = 0, \quad (14)$$

$$N(x=L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P. \quad (15)$$

Sformułowania lokalne

Równanie różniczkowe można zapisać w tzw. **formie operatorowej**

$$Au = f, \quad (16)$$

gdzie

$$A \equiv \frac{d}{dx} \left(A(x) E \frac{d}{dx} \right), \quad (17)$$

jest liniowym operatorem różniczkowym oraz $f \equiv -q(x)$.

Taki zapis pozwala na ujednoczenie równań różniczkowych będących modelami matematycznymi różnych problemów fizycznych.

Jeśli $u(x) = T(x)$ będzie temperaturą w pręcie, $E = k$ będzie współczynnikiem przewodzenia cieplnego materiału, a $f(x) = -Q(x)$ będzie ciepłem wytwarzanym lub dostarczanym przez brzeg, to podane równanie będzie modelem matematycznym problemu stacjonarnego przepływu ciepła.

Sformułowania globalne

Poprzednie równania problemu brzegowego sformułowaliśmy analizując stan równowagi w punkcie materialnym ciała. W efekcie otrzymaliśmy równanie różniczkowe. Taki sposób budowania modeli matematycznych uzasadnia nazwę **sformułowanie lokalne** problemu.

Innym sposobem jest **sformułowanie globalne**, w którym rozwiązanie otrzymujemy w wyniku minimalizacji pewnego funkcjonału.

W analizie zagadnień mechaniki ciała sprężystego takim funkcjonałem jest **całkowita energia potencjalna**.

Problem, którego rozwiązanie można otrzymać rozwiązując równanie różniczkowe lub minimalizując odpowiedni funkcjonał, nazywa się **problemem samosprężonym**.

Sformułowania globalne

Każde ciało pod działaniem sił zewnętrznych doznaje deformacji, na których siły obciążające wykonują pewną **pracę** L . Praca ta w przypadku **adiabaticznego** procesu termodynamicznego (takiego, podczas którego izolowany układ nie nawiązuje wymiany ciepła, lecz całość energii jest dostarczana lub odbierana z niego jako praca, nie zachodzi dyssypacja energii) jest niezależna od sposobu jej wykonania i równa się przyrostowi **energii wewnętrznej** układu W , czyli takiej funkcji, której przyrost jest równy pracy dostarczonej układowi

$$L = W. \quad (18)$$

Równość ta wynika z I prawa termodynamiki dla procesów adiabaticznych.

Takie cechy są charakterystyczne dla układów **sprężystych**.

Sformułowania globalne

Można dowieść, że w przypadku ciała sprężystego i obciążeń **statycznych** energia wewnętrzna układu jest równa **energii potencjalnej**, która równa się pracy sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych i nazywana jest **energią sprężystą** układu U .

$$W = U. \quad (19)$$

Energia sprężysta

Podsumowując, dla ciał sprężystych i procesu adiabatycznego energia sprężysta U to praca sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych.

Energia ta jest odwracalna, co oznacza, że po usunięciu sił obciążających zużywa się na odzyskanie początkowej konfiguracji ciała i w nie naprężonym i nie odkształconym stanie jest równa zeru.

Sformułowania globalne

Energię sprężystą można zapisać w formie

$$U = \int_V \Phi \, dV. \quad (20)$$

gdzie Φ jest **energią sprężystą właściwą** (gęstością energii sprężystej) i dla ciała Hooke'a wynosi

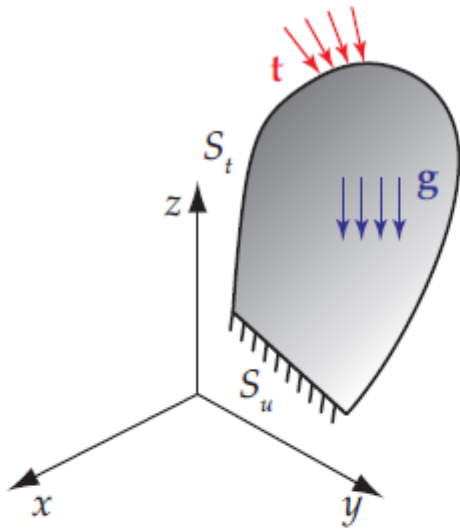
- w zapisie **wskaźnikowym**

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (21)$$

- w zapisie **macierzowym**

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (22)$$

Sformułowania globalne



Rys. 4: Ciało

Na rysunku oznaczono:

- V – objętość ciała,
- S – brzeg ciała ze zdefiniowanymi warunkami brzegowymi,
- \mathbf{g} – wektor intensywności sił objętościowych,
- \mathbf{t} – wektor intensywności sił powierzchniowych.

Całkowita energia potencjalna ciała sprężystego będzie zatem równa

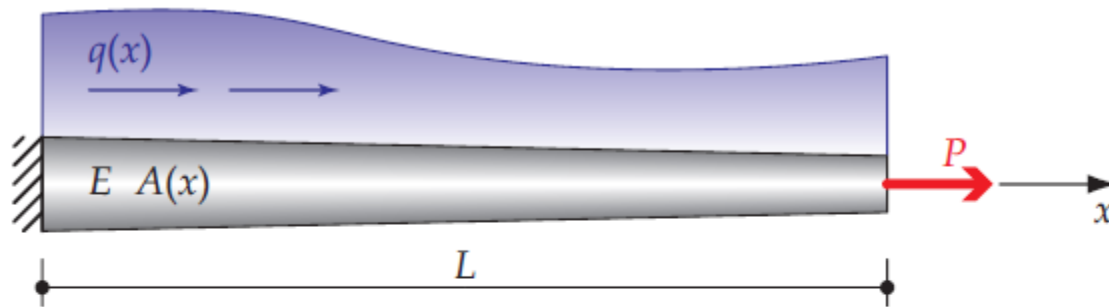
$$\Pi = U - L, \quad (23)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_V g_i u_i dV - \frac{1}{2} \int_S t_i u_i dS, \quad (24)$$

lub

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS. \quad (25)$$

Sformułowania globalne



Rys. 5: Pręt rozciągany

W przypadku sformułowania globalnego pręta rozciąganego, musimy wyznaczyć całkowitą energię potencjalną pręta Π

$$\Pi = U - L_q - L_P, \quad (26)$$

gdzie U jest energią sprężystą pręta, L_q jest pracą obciążenia ciągłego a L_P to praca obciążenia skupionego.

Sformułowania globalne

Energia sprężysta wynosi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dv, \quad (27)$$

wykorzystując dodatkowo

$$dv = A(x) \, dx, \quad (28)$$

$$\sigma_x(x) = E \varepsilon_x(x), \quad (29)$$

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (30)$$

możemy napisać

$$U = \frac{1}{2} \int_L EA(x) \varepsilon^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_L EA(x) \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 \, dx. \quad (31)$$

Dla $EA = \text{const.}$ będziemy mogli napisać

$$U = \frac{1}{2} EA \int_L \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 \, dx. \quad (32)$$

Sformułowania globalne

Praca obciążenia ciągłego wynosi

$$L_q = \int_L q(x)u(x) dx, \quad (33)$$

a praca obciążenia skupionego na końcu pręta

$$L_P = Pu(L). \quad (34)$$

Ostatecznie, całkowita energia potencjalna pręta wynosi

$$\Pi = U - L_q - L_P = \frac{1}{2}EA \int_L \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_L q(x)u(x)dx - Pu(L). \quad (35)$$

Rozwiązaniem tak sformułowanego zadania będzie taka funkcja przemieszczenia $u(x)$, dla której energia potencjalna Π osiągnie minimum.

Spostrzeżenie: zależność na energię potencjalną Π nie zawiera drugiej pochodnej funkcji przemieszczeń $\frac{d^2u}{dx^2}$, równanie różniczkowe zawierało!

Sformułowania wariacyjne

Przykład budowy słabego równania wariacyjnego

- Rozważmy problem brzegowy (w sformułowaniu lokalnym)

$$x^2 u'' + 2xu' + u + 1 = 0 \quad (36)$$

z warunkami brzegowymi

$$(p.w.b.) u(1) = 1, \quad u'(2) = 1 \quad (n.w.b.)$$

(p.w.b.) = podstawowy warunek brzegowy

(n.w.b.) = naturalny warunek brzegowy

w obszarze

$$x \in (1,2)$$

To samo równanie możemy zapisać w formie

$$\frac{d(x^2 u')}{dx} + u + 1 = 0 \quad (37)$$

Sformułowania wariacyjne

1. Mnożymy równanie (37) (lub 36) przez tzw. funkcję wagową $v(x)$, wystarczająco gładką i spełniającą jednorodny p.w.b. ($v(1)=0$) i całkujemy w obszarze rozwiązania

$$\int_1^2 v \left(\frac{d(x^2 u')}{dx} + u + 1 \right) dx = 0 \quad (38)$$

2. Całkujemy przez części w celu zrównania rzędu pochodnych funkcji pierwotnej $u(x)$ i funkcji wagowej $v(x)$

Wzór całkowania przez części

$$\int_a^b v \cdot w'' dx = v \cdot w' \Big|_a^b - \int_a^b v' \cdot w' dx \quad (39)$$

$$(vx^2 u') \Big|_{x=2} - (vx^2 u') \Big|_{x=1} + \int_1^2 (-v' x^2 u' + vu + v) dx = 0 \quad (40)$$

lub
$$4v(2)u'(2) - v(1)u'(1) + \int_1^2 (-v' x^2 u' + vu + v) dx = 0 \quad (41)$$

Sformułowania wariacyjne

3. Wprowadzamy do (41) warunki brzegowe: $u'(2) = 1$ i $v(1) = 0$, otrzymując końcową postać tzw. *słabego równania wariacyjnego*:

$$\int_1^2 (-v'x^2u' + vu + v)dx + 4v(2) = 0 \quad (42)$$

z podstawowym warunkiem brzegowym $u(1)=1$. Naturalny warunek brzegowy został wprowadzony do równania (42).

Wyprowadzone zostało słabe sformułowanie wariacyjne problemu (37). Słabe, bowiem:

- Wyjściowe równanie różniczkowe jest spełnione w sensie całkowym
- Obniżone jest wymaganie dotyczące ciągłości funkcji $u(x)$
- Wymagane jest tylko spełnienie podstawowego warunku brzegowego

To samo sformułowanie otrzymujemy dla równania (36).

Sformułowania wariacyjne

Uwaga: Występowanie niejednorodnego p.w.b. (u nas $u(1)=1$) może w obliczeniach numerycznych prowadzić do niejednoznaczności rozwiązania (przestrzeń rozwiązania nie jest liniowa). Dlatego *zawsze* będziemy transformować wyjściowy problem brzegowy do problemu z jednorodnymi p.w.b. i taki „nowy” problem rozwiązywać.

Przykład:

Dany jest problem brzegowy:

$$\begin{aligned} -y'' + \pi^2 y &= 2\pi^2 \sin(\pi x), & x \in (0,1) \\ y(0) &= 1, & y'(1) = 0.5 \end{aligned} \quad (43)$$

Przyjmujemy rozwiązanie w formie: $y = u + u_0$

u_0 - funkcja spełniająca *niejednorodny* p.w.b. (musimy „zgadnąć” np.

$u_0(x) = x + 1$ bo $u_0(1) = 0 + 1 = 1$.

$u(x)$ - funkcja spełniająca *jednorodny* p.w.b. (stąd $y = u + x + 1$, oraz

$y' = u' + 1$, $y'' = u''$)

Metoda residuów ważonych

Rozważmy równanie operatorowe

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ dla } x \in \omega \\ u &= 0 \text{ na brzegu } \partial\omega \end{aligned} \quad (44)$$

Budujemy równanie wariacyjne (całkowe)

$$\int_{\omega} v(Au - f) d\omega = 0 \quad (45)$$

Szukamy rozwiązania przybliżonego (aproksymacyjnego) przyjmując:

$$\text{dla funkcji pierwotnej: } u \cong \sum_{k=1}^N \varphi_k c_k = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^T \boldsymbol{\varphi}^T \quad (46)$$

$$\text{dla funkcji wagowej: } v \cong \sum_{k=1}^N \theta_k d_k = \boldsymbol{\theta} \mathbf{d} \equiv \mathbf{d}^T \boldsymbol{\theta}^T$$

gdzie, d_k i c_k parametry aproksymacji,

θ_k - funkcje bazowe, spełniające *jednorodne p.w.b.*

φ_k - funkcje bazowe, spełniające *wszystkie warunki brzegowe*

Podstawiamy (46) do (45)

Metoda residuów ważonych

$$\int_{\omega} \mathbf{d}^T \boldsymbol{\theta}^T (A\boldsymbol{\varphi} \mathbf{c} - f) d\omega = 0 \quad (47)$$

$$\mathbf{d}^T \left\{ \int_{\omega} \boldsymbol{\theta}^T A \boldsymbol{\varphi} d\omega \mathbf{c} - \int_{\omega} \boldsymbol{\theta}^T f d\omega \right\} = 0 \quad (48)$$

dla $\mathbf{d}^T \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{c}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\omega} \boldsymbol{\theta}^T A \boldsymbol{\varphi} d\omega \\ \mathbf{F} &= \int_{\omega} \boldsymbol{\theta}^T f d\omega \end{aligned} \quad (49)$$

Jeśli przyjmiemy $\varphi_k = \theta_k$, $k=1..N$, to otrzymamy metodę residuów ważonych w sformułowaniu *Bubnowa-Galerkina* i równania (49) są wówczas:

Metoda residuów ważonych

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int_{\omega} \boldsymbol{\varphi}^T A \boldsymbol{\varphi} d\omega \\ \mathbf{F} &= \int_{\omega} \boldsymbol{\varphi}^T f d\omega\end{aligned}\tag{50}$$

Jeśli operator A (u nas takie będą) jest dodatnio określony to w równaniu (45) można wykonać całkowanie przez części otrzymując *słabe sformułowania wariacyjne* i wówczas w metodzie Bubnowa-Galerkina funkcje bazowe muszą spełniać tylko *jednorodne p.w.b. (n.w.b. wystąpi w funkcjonale)*. Powoduje to znaczne poszerzenie przestrzeni funkcji bazowych φ_k . Takie postępowanie będziemy nazywać *metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym* lub w słabym sformułowaniu wariacyjnym.

Metoda residuów ważonych

Algorytm rozwiązania problemu metodą Bubnowa-Galerkina w słabym sformułowaniu wariacyjnym:

- Transformacja problemu brzegowego do problemu z jednorodnymi p.w.b.
- Budowa słabego równania wariacyjnego (tzn. z wyciąkowaniem przez części)
- Przyjęcie N funkcji bazowych φ_k spełniających *jednorodne podstawowe warunki brzegowe*
- Ułożenie i rozwiązanie układu N równań metody Bubnowa-Galerkina ze względu na nieznane parametry c_k
- Końcowe rozwiązanie: $y = \sum_{k=1}^N \varphi_k c_k + u_0$

Przykład: Obliczyć metodą B-G w sformułowaniu słabym funkcję przemieszczenia $u(x)$ osi pręta rozciąganego o długości L

$$\begin{aligned}EAu''(x) + q(x) &= 0, \\ u(0) &= 0, EAu'(L) = P\end{aligned}$$

Wprowadzenie do metody elementów skończonych (MES)

Klasyczne metody wariacyjne (np. metoda Bubnowa-Galerkina):

- mogą być efektywnie wykorzystane tylko do rozwiązania problemów z małą liczbą stopni swobody. Spowodowane jest to w głównej mierze z trudnościami w doborze funkcji wagowych
- funkcje aproksymacyjne (wagowe) zmieniają się w zależności od rozwiązywanego problemu (nie tylko zależą od równania ale także od warunków brzegowych i obszaru rozwiązania) , przez to rozwiązania *nie może być zautomatyzowane*

Oznacza to, że poprawa efektywności metody wariacyjnej zależy od tego czy możliwe jest, dla danej klasy problemów, konstruowanie funkcji aproksymacyjnych dla dowolnych obszarów z wariacyjnie zgodnymi warunkami brzegowymi. Takie możliwości stwarza *metoda elementów skończonych*

Wprowadzenie do metody elementów skończonych (MES)

Metoda elementów skończonych jest procedurą wariacyjną, w której funkcje bazowe są wyznaczane w obszarze zastąpionym przez zbiór prostych podobszarów, na jakie został podzielony cały obszar rozwiązania. Podobszary te, nazywane *elementami skończonymi*, mają zwykle proste geometryczne kształty, co ułatwia budowanie funkcji aproksymacyjnych. Funkcje te nie zależą od danych warunków brzegowych i innych danych definiujących problem. Wszystko to powoduje, że MES w wyjątkowo dobry sposób nadaje się do *obliczeń komputerowych* dzięki łatwości jej zalgorytmizowania.

Podstawowe etapy procedury MES

Rozwiązanie typowego problemu metodą elementów skończonych jest realizowane w następujących etapach:

- ❑ Podział obszaru rozwiązania na podobszary czego wynikiem jest zastąpienie obszaru rozwiązania zbiorem *elementów skończonych* (dyskretyzacja). Typ elementu zależy od obszaru i rodzaju rozwiązywanego równania różniczkowego.
- Ustalenie liczby węzłów i elementów skończonych, tworzących tzw. *siatkę skończenie elementową*
- Wygenerowanie współrzędnych węzłów siatki i *tablicy topologii* (lub incydencji), która zawiera relację między numerami elementów i węzłów siatki

Podstawowe etapy procedury MES

- ❑ Wyznaczenie równań MES dla elementów:
 - sformułowanie równania wariacyjnego w obszarze elementu skończonego jedną z metod wariacyjnych (np. metodą Bubnowa-Galerkina)
 - Aproksymacja nieznanymi funkcjami w elementach skończonych
- ❑ Złożenie (agregacja) elementów w jeden układ, czyli budowa układu równań przy wykorzystaniu warunku zgodności zmiennych węzłowych (co oznacza, że wartości tych zmiennych we wspólnym węźle przynależnym do różnych elementów skończonych muszą być takie same). W rezultacie otrzymujemy układ równań MES całego problemu.

Podstawowe etapy procedury MES

- ❑ Uwzględnienie warunków brzegowych, czyli wprowadzenie podstawowych i naturalnych warunków brzegowych do zagregowanego układu równań.
- ❑ Rozwiązanie układu równań ze względu na niewiadome węzłowe
- ❑ Obliczenie dodatkowych wielkości np. obliczenie wartości funkcji rozwiązania i ich pochodnych w innych niż węzły punktach obszaru.

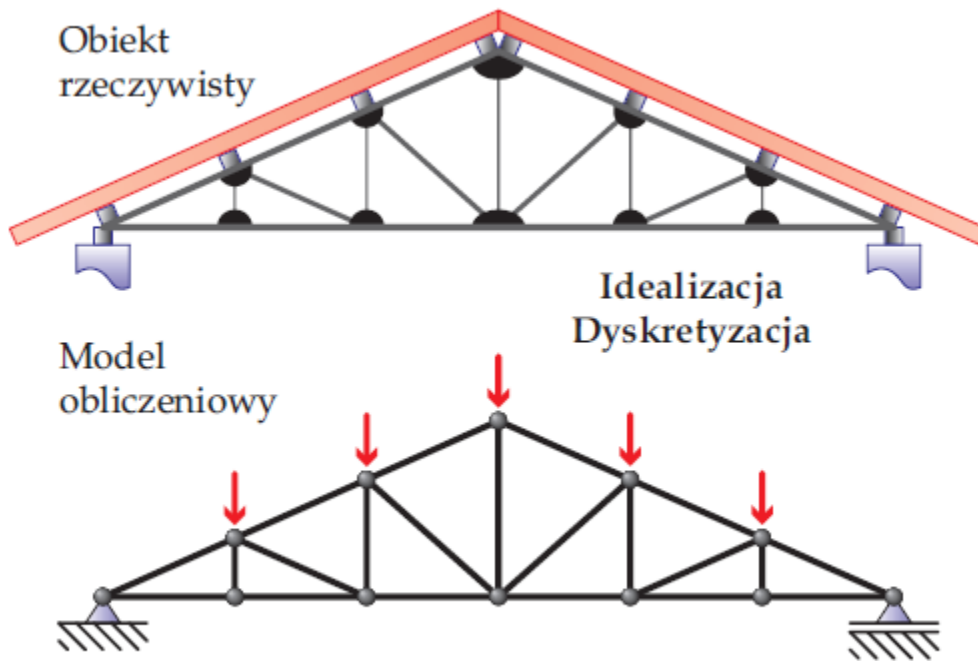
Interpretacja MES: fizyczna i matematyczna

- ❑ Fizyczna: podział konstrukcji na komponenty (elementy) i złożenie w jeden układ dyskretny zgodnie z zasadami równowagi

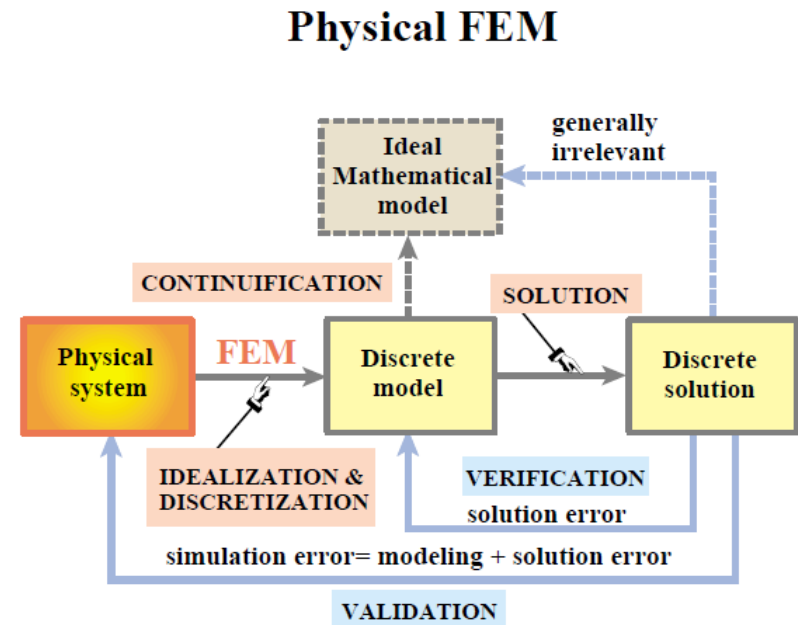
Dla potrzeb zrozumienia podstawowych etapów procedury MES, znalezienia pewnych cech charakterystycznych ilustrujących metodę MES i zdefiniowania pewnych pojęć związanych z MES, tymczasowo potraktujemy metodę jako sposób bezpośredniego budowania równań równowagi konstrukcji, przez rozważenie równowagi pewnych podobszarów, a następnie ich złożenie w jeden, globalny układ równań równowagi.

- ❑ Matematyczna: rozwiązanie problemu brzegowego metodą wariacyjną (np. Bubnowa – Galerkina) z lokalnie definiowanymi funkcjami wagowymi.

Interpretacja MES: fizyczna

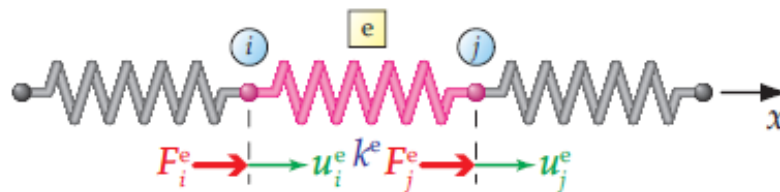


Rys. 16: Idealizacja i dyskretyzacja konstrukcji



Interpretacja MES: fizyczna

Przykładem najprostszego elementu skończonego może być sprężyna o sztywności k .



Rys. 17: Najprostszy element skończony

Podstawowe parametry elementu skończonego:

- węzły: i, j (oznaczenie **lokalne**, związane z elementem skończonym),
- sztywność: k^e ,
- przemieszczenia w węzłach: u_i^e, u_j^e (oznaczenie **lokalne**),
- siły w węzłach: F_i^e, F_j^e (oznaczenie **lokalne**).

Interpretacja MES: fizyczna

Związek siły z przemieszczeniem możemy napisać w postaci

$$F^e = k^e \cdot \Delta u^e,$$
$$\Delta u^e = u_j^e - u_i^e.$$

Korzystając z warunku równowagi, możemy napisać

$$F_i^e + F_j^e = 0 \Rightarrow F_j^e = -F_i^e = F^e,$$

i dla każdego z dwóch węzłów

$$F_i^e = -F^e = -k^e (u_j^e - u_i^e) = k^e \cdot u_i^e - k^e \cdot u_j^e,$$
$$F_j^e = F^e = k^e (u_j^e - u_i^e) = -k^e \cdot u_i^e + k^e \cdot u_j^e.$$

Zapiszmy ten układ w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Po oznaczeniu

$$\mathbf{K}^e \equiv \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}^e \equiv \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^e \equiv \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix},$$

układ równań będzie miał formę

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e,$$

gdzie:

- \mathbf{K}^e – macierz sztywności elementu skończonego,
- \mathbf{u}^e – wektor przemieszczeń elementu skończonego,
- \mathbf{F}^e – wektor sił węzłowych elementu (obciążenie, reakcje).

Interpretacja MES: fizyczna

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix},$$

Spostrzeżenia:

- macierz sztywności \mathbf{K}^e jest symetryczna $\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}^e)^T$,
- policzmy wyznacznik macierzy sztywności

$$|\mathbf{K}^e| = k^e \cdot k^e - (-k^e)(-k^e) = (k^e)^2 - (k^e)^2 = 0,$$

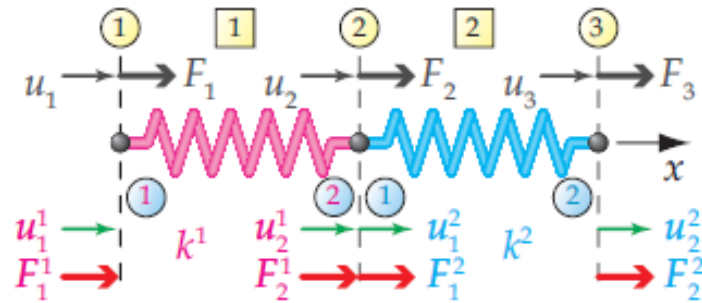
Co to oznacza? Czy możemy rozwiązać równania? Jaka jest interpretacja

Warto zaznaczyć, że wystarczy podać tylko jeden warunek brzegowy dla przemieszczenia u^e , żeby rozwiązać równania.

Jeżeli $u_i^e = 0$ (zamocowaliśmy koniec i sprężyny), to $u_j^e = \frac{F^e}{k^e}$.

Interpretacja MES: fizyczna

Rozważmy układ dwóch sprężyn



Rys. 18: Dyskretyzacja układu dwóch sprężyn

Dla każdego elementu skończonego, możemy napisać układ równań równowagi (używamy oznaczeń **lokalnych**)

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

W każdym węźle oznaczymy przemieszczenia (korzystamy z warunku zgodności przemieszczeń w węźle 2)

$$u_1 = u_1^1,$$

$$u_2 = u_2^1 = u_1^2,$$

$$u_3 = u_2^2,$$

i siły, korzystając z warunku równowagi

$$F_1 = F_1^1,$$

$$F_2 = F_2^1 + F_1^2,$$

$$F_3 = F_2^2,$$

co prowadzi do zależności

$$F_1 = k^1 u_1 - k^1 u_2,$$

$$F_2 = -k^1 u_1 + k^1 u_2 + k^2 u_2 - k^2 u_3,$$

$$F_3 = -k^2 u_2 + k^2 u_3.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Po przekształceniu otrzymamy

$$F_1 = k^1 u_1 - k^1 u_2,$$

$$F_2 = -k^1 u_1 + (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3,$$

$$F_3 = -k^2 u_2 + k^2 u_3.$$

Wykorzystując powyższe równania, równania równowagi dla elementów skończonych w zapisie macierzowym będą miały postać

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv u_1^1 \\ u_2 \equiv u_2^1 = u_2^2 \\ u_3 \equiv u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \equiv F_1^1 \\ F_2 \equiv F_2^1 + F_1^2 \\ F_3 \equiv F_2^2 \end{bmatrix},$$

lub krótko

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F},$$

gdzie:

- \mathbf{K} – globalna macierz sztywności,
- \mathbf{u} – globalny wektor przemieszczenia,
- \mathbf{F} – globalny wektor sił węzłowych.

Interpretacja MES: fizyczna

Zapiszmy wkład równań równowagi dla elementu skończonego, rozszerzając macierze i wektory w taki sposób, aby zawierały wszystkie globalne przemieszczenia

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} k^1 u_1 - k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_1^1 \\ -k^1 u_1 + k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_2^1 \\ 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0 \end{cases},$$

i w podobny sposób dla drugiego elementu skończonego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Po dodaniu układów otrzymamy

$$\left(\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix},$$

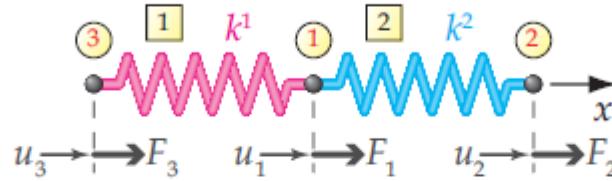
czyli taki sam wynik jak poprzednio.

Powyższa operacja składania **lokalnych** (dla pojedynczych elementów skończonych) układów równań równowagi do jednego **globalnego** (dla wszystkich elementów skończonych) układu równań równowagi nazywa się **agregacją**.

Interpretacja MES: fizyczna

Należy zwrócić szczególną uwagę na sposób **numerowania węzłów**, który istotnie wpływa na wynikowe równania równowagi.

Jeśli ponumerujemy węzły jak na rysunku



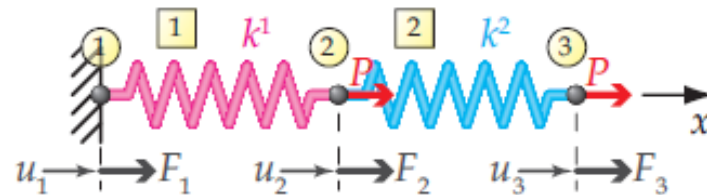
Rys. 19: Inna numeracja węzłów

nowe macierze sztywności i nowy układ równań będą miały postać

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} k^1 & 0 & -k^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k^1 & 0 & k^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 & 0 \\ -k^2 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} k^1 + k^2 & -k^2 & -k^1 \\ -k^2 & k^2 & 0 \\ -k^1 & 0 & k^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Rozwiążmy układ dwóch sprężyn, z zamocowaną sprężyną 1 i obciążony dwiema siłami P .



Rys. 20: Układ dwóch sprężyn

Rozszerzone układy równań równowagi MES dla poszczególnych sprężyn będą miały postać

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Po agregacji układ równań dla układu sprężyn można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \equiv P \\ F_3 \equiv P \end{bmatrix},$$

\Downarrow

$$\begin{cases} k^1 \cdot 0 - k^1 u_2 + 0 \cdot u_3 = F_1 \\ -k^1 \cdot 0 + (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3 = P \\ 0 \cdot 0 - k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases}.$$

Układ równań zawierający tylko zmienne pierwotne będzie miał postać

$$\begin{bmatrix} k^1 + k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix},$$

\Downarrow

$$\begin{cases} (k^1 + k^2) u_2 - k^2 u_3 = P \\ -k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Po pewnych przekształceniach otrzymamy

$$\begin{cases} k^1 u_2 = 2P \\ -k^2 u_2 + k^2 u_3 = P \end{cases}.$$

i dodatkowo

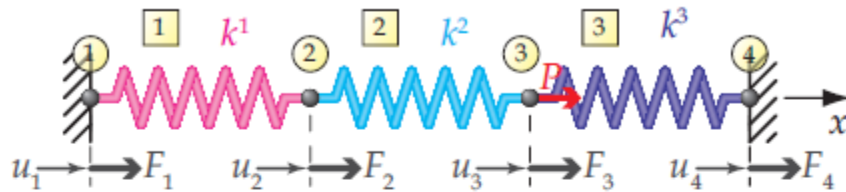
$$-k^1 u_2 = F_1.$$

Rozwiązanie układu wynosi

$$u_2 = \frac{2P}{k^1}, \quad u_3 = \frac{2P}{k^1} + \frac{P}{k^2}, \quad F_1 = -2P.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Rozważmy układ trzech sprężyn.



Rys. 21: Układ trzech sprężyn

Przyjmijmy następujące dane:

- sztywności sprężyn:
 $k^1 = 100 \text{ N/mm}$,
 $k^2 = 200 \text{ N/mm}$,
 $k^3 = 100 \text{ N/mm}$,
- siła $P = 500 \text{ N}$.

Macierze sztywności elementów będą wynosiły odpowiednio

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix},$$

a globalna macierz sztywności

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100 + 200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200 + 100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Globalny układ równań MES

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \equiv 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \equiv 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \equiv 0 \\ F_3 \equiv 500 \\ F_4 \end{bmatrix}.$$

Układ równań zawierające tylko zmienne pierwotne będzie wynosił

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \end{bmatrix},$$

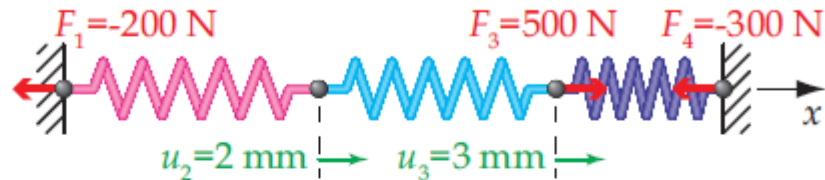
i dodatkowo

$$\begin{cases} -100u_2 = F_1 \\ -100u_3 = F_4 \end{cases}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Rozwiązanie układu wynosi

$$u_2 = 2 \text{ mm}, \quad u_3 = 3 \text{ mm}, \quad F_1 = -200 \text{ N} \quad F_4 = -300 \text{ N}.$$



Rys. 22: Przemieszczenia i reakcje

Sprawdźmy poprawność obliczonych reakcji:

$$P + F_1 + F_4 = 0 \Rightarrow 500 - 200 - 300 = 0.$$

Jakie wartości osiągają siły F_1^2 i F_2^2 działające na sprężynę 2:

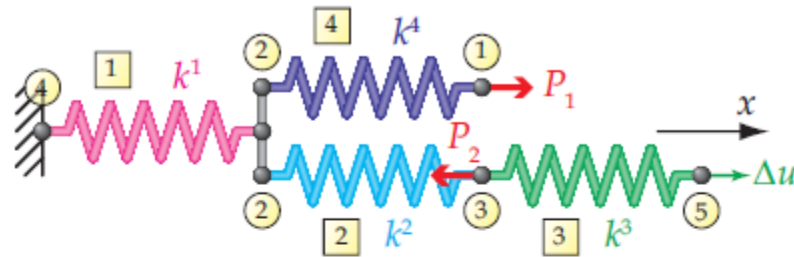
$$\mathbf{K}^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{F}^2,$$

$$\begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \equiv u_1^2 \\ u_3 \equiv u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

Procedura agregacji raz jeszcze.



Rys. 23: Układ czterech sprężyn

Zbudujmy macierz topologii łączącą **lokalne numery węzłów** elementów skończonych i i j z **globalnymi numerami węzłów**.

Tabela 2: Macierz topologii

Element	Węzeł $i = 1$	Węzeł $j = 2$
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

Interpretacja MES: fizyczna

Element	Węzeł $i = 1$	Węzeł $j = 2$
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

Macierze sztywności poszczególnych elementów wynoszą

$$\mathbf{K}^1 = \begin{array}{c} 4 \quad 2 \\ 4 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array},$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{array}{c} 3 \quad 5 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} k^3 & -k^3 \\ -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}, \quad \mathbf{K}^4 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} k^4 & -k^4 \\ -k^4 & k^4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}.$$

Interpretacja MES: fizyczna

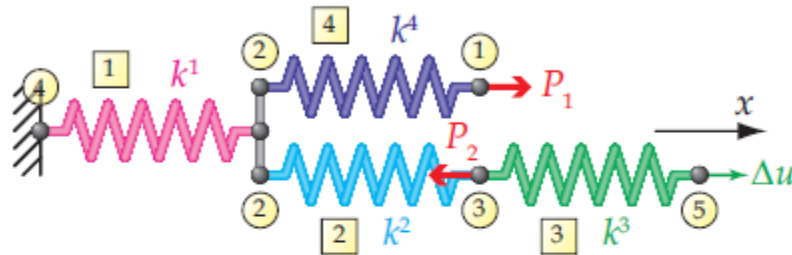
$$\mathbf{K}^1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 \\ -k^1 & k^1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} , \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} , \quad \mathbf{K}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} , \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} ,$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} k^3 & -k^3 \\ -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} , \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} , \quad \mathbf{K}^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} k^4 & -k^4 \\ -k^4 & k^4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} . \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \end{array} .$$

Zagregowana macierz sztywności będzie miała postać

$$\mathbf{K} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} . \end{array}$$

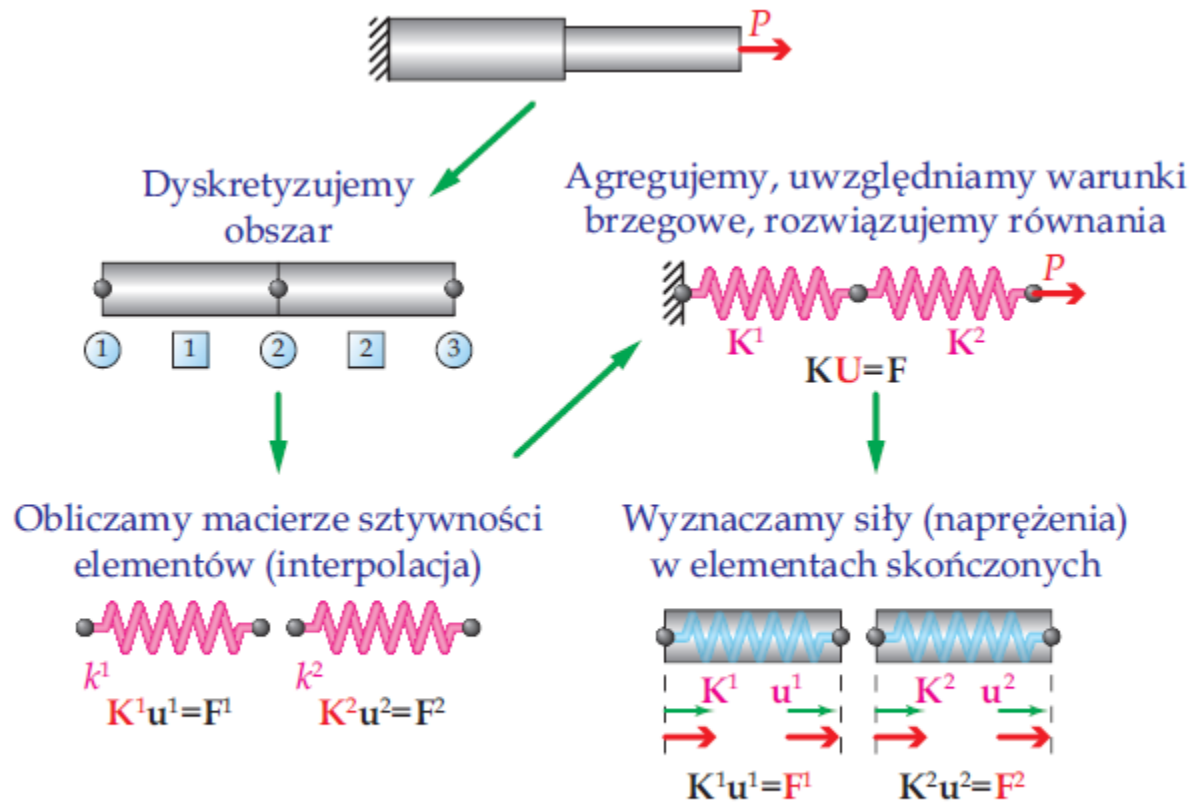
Interpretacja MES: fizyczna



Końcowy, globalny układ równań

$$\begin{bmatrix}
 k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\
 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\
 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\
 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \equiv 0 \\
 U_5 \equiv \Delta u
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \equiv P_1 \\
 F_2 \equiv 0 \\
 F_3 \equiv -P_2 \\
 F_4 \\
 F_5
 \end{bmatrix}
 .$$

Interpretacja MES: fizyczna



Rys. 24: Etapy procedury MES

Interpretacja MES: matematyczna

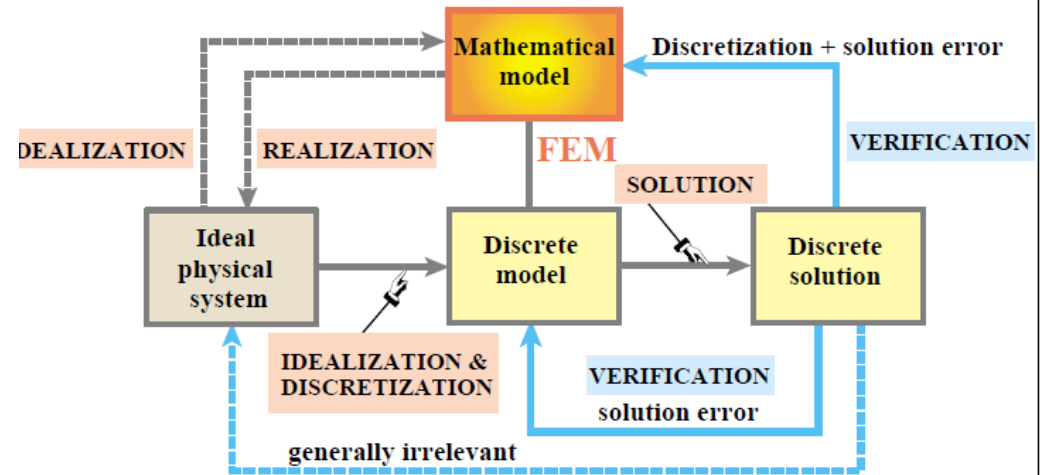
$$\frac{d}{dx} \left(EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0,$$

$$0 < x < L,$$

$$u(x = 0) = 0,$$

$$N(x = L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P.$$

Mathematical FEM



$$\Pi = U - L_q - L_P = \frac{1}{2} EA \int_L \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_L q(x) u(x) dx - Pu(L).$$

Interpretacja MES: matematyczna

Rozważmy problem brzegowy (w sformułowaniu lokalnym)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

z warunkami brzegowymi

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

w obszarze

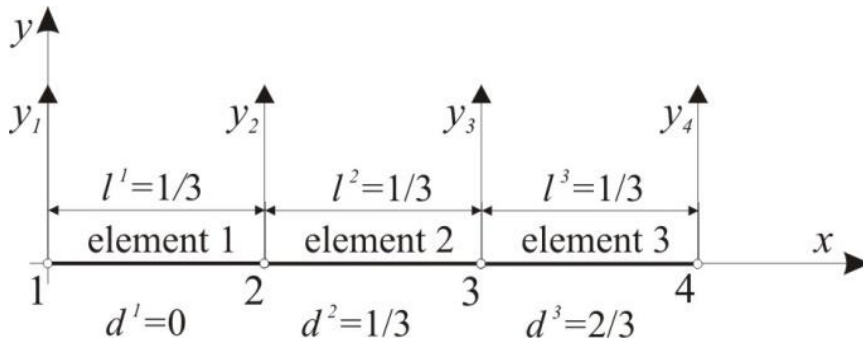
$$x \in (0,1)$$

Rozwiązanie dokładne

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Interpretacja MES: matematyczna

- Podział obszaru rozwiązania na podobszary czego wynikiem jest zastąpienie obszaru rozwiązania zbiorem *elementów skończonych* (dyskretyzacja).



Ustalenie liczby węzłów i elementów skończonych, tworzących tzw. *siatkę skończenie elementową*

Wygenerowanie współrzędnych węzłów siatki i *tablicy topologii* (lub incydencji), która zawiera relację między numerami elementów i węzłów siatki

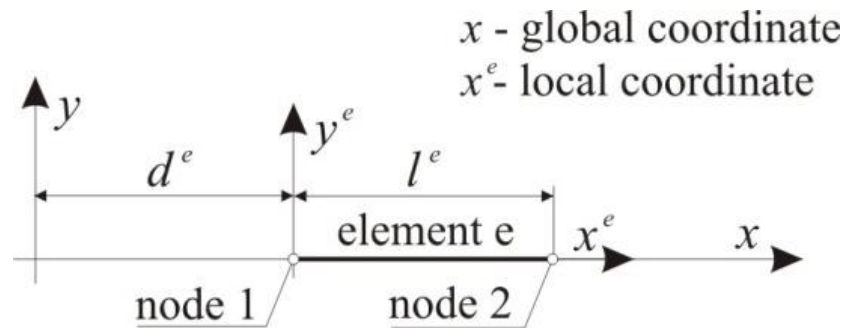
Węzeł	x
1	0
2	1/3
3	2/3
4	1

Element	(1) węzeł	(2) węzeł
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Interpretacja MES: matematyczna

Ustalenie globalnego x i lokalnych x^e układów współrzędnych i transformacji między nimi

$$x = x^e + d^e$$



Element	d	l
1	0	1/3
2	1/3	1/3
3	2/3	1/3

Interpretacja MES: matematyczna

□ Wyznaczenie równań MES dla elementów:

- sformułowanie równania wariacyjnego w obszarze elementu skończonego metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym

$$v^e \left(\frac{d^2 y^e}{dx^{e2}} + \frac{\pi^2}{4} y^e \right) = v^e \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + d^e) \right) \right)$$

$$\int_0^{l^e} v^e \left(\frac{d^2 y^e}{dx^{e2}} + \frac{\pi^2}{4} y^e \right) dx^e - \int_0^{l^e} v^e \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + d^e) \right) \right) dx^e = 0$$

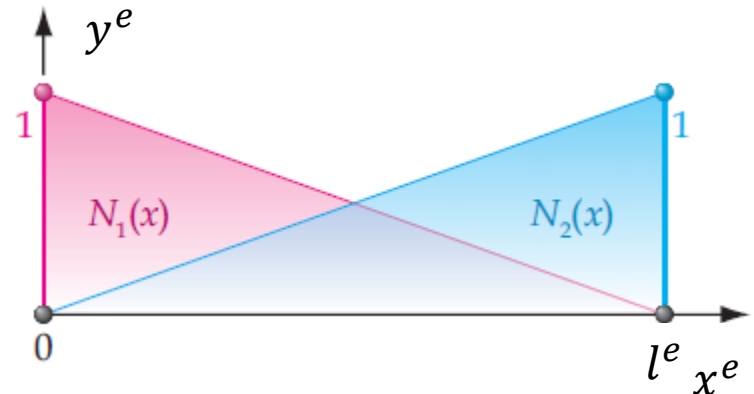
$$v^e \frac{dy^e}{dx} \Big|_0^{l^e} + \int_0^{l^e} - \frac{dv^e}{dx} \frac{dy^e}{dx} + v^e \frac{\pi^2}{4} y^e dx^e - \int_0^{l^e} v^e \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + d^e) \right) \right) dx^e = 0$$

Interpretacja MES: matematyczna

- Aproksymacja nieznanymi funkcji w elementach skończonych: *funkcje kształtu*
Funkcje kształtu muszą spełniać:
 - ✓ *Warunek ciągłości (dla rozważanego problemu: muszą to być funkcje klasy ciągłości C^1)*
 - ✓ *Funkcja aproksymowana musi spełniać podstawowe warunki brzegowe na brzegu elementu*
 - ✓ *Warunek Kroneckera (albo podziału jedności, kompletności): suma wartości w dowolnym punkcie elementu skończonego musi wynosić 1*

Funkcjami, które spełniają powyższe warunki są liniowe funkcje bazowe interpolacji Lagrange'a

$$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e) \quad N_2^e(x^e)] = \left[\frac{l^e - x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \right]$$

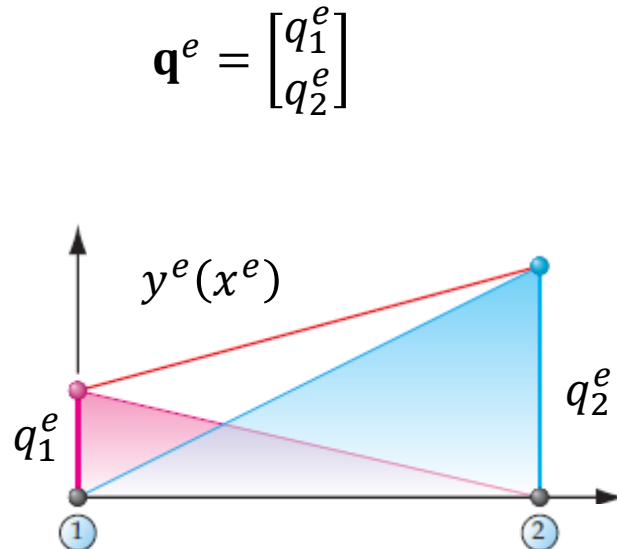


Interpretacja MES: matematyczna

Aproksymacja funkcji y^e w elemencie skończonym

$$y^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e)\mathbf{q}^e = \mathbf{q}^{eT}\mathbf{N}^e(x^e)^T$$

gdzie \mathbf{q}^e jest wektorem stopni swobody w elemencie skończonym



Interpretacja MES: matematyczna

Te same funkcje kształtu używamy do aproksymacji funkcji testowej v^e

$$v^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e)\mathbf{c}^e = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^e(x^e)^T$$

Liczymy pochodne

$$\frac{dy^e}{dx^e} = \frac{d\mathbf{N}^e(x^e)}{dx^e}\mathbf{q}^e = \mathbf{q}^{eT}\frac{d\mathbf{N}^e(x^e)^T}{dx^e} \quad \frac{dv^e}{dx^e} = \frac{d\mathbf{N}^e(x^e)}{dx^e}\mathbf{c}^e = \mathbf{c}^{eT}\frac{d\mathbf{N}^e(x^e)^T}{dx^e}$$

$$\frac{d\mathbf{N}^e(x^e)}{dx^e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{bmatrix}$$

Interpretacja MES: matematyczna

Wprowadzamy aproksymację do równania wariacyjnego, pierwszy człon tego równania przyjmuje postać

$$v^e \frac{dy^e}{dx} \Big|_0^{l^e} = \mathbf{c}^T \mathbf{N}^e (x^e)^T \frac{dy^e}{dx} \Big|_0^{l^e} = \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{dy^e}{dx} (l^e) - \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dy^e}{dx} (0) = \mathbf{c}^T \begin{bmatrix} -\frac{dy^e}{dx} (0) \\ \frac{dy^e}{dx} (l^e) \end{bmatrix}$$

Całe równanie

$$\mathbf{c}^T \begin{bmatrix} -\frac{dy^e}{dx} (0) \\ \frac{dy^e}{dx} (l^e) \end{bmatrix} + \mathbf{c}^T \int_0^{l^e} -\frac{d\mathbf{N}^{eT}}{dx^e} \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx^e \mathbf{q}^e - \mathbf{c}^T \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + d^e) \right) \right) dx^e = 0$$

Interpretacja MES: matematyczna

Zakładając $\mathbf{c}^T \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e - \mathbf{P}^{b,e}$$

Macierz sztywności
elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e} -\frac{d\mathbf{N}^{eT}}{dx^e} \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx^e$$

Wektor obciążenia
ciągłego elementu
skończonego

$$\mathbf{P}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + d^e) \right) \right) dx^e$$

Wektor obciążenia
brzegowego elementu
skończonego

$$\mathbf{P}^{b,e} = \begin{bmatrix} -\frac{dy^e}{dx}(0) \\ \frac{dy^e}{dx}(l^e) \end{bmatrix}$$

Interpretacja MES: matematyczna

Całkowanie macierzy i wektorów

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^1 &= \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \\ &= - \int_0^{1/3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{1/3} \\ \frac{1}{1/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{1/3} & \frac{1}{1/3} \end{bmatrix} + \frac{\pi^2}{4} \begin{bmatrix} \frac{1/3 - x^e}{1/3} \\ \frac{x^e}{1/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1/3 - x^e}{1/3} & \frac{x^e}{1/3} \end{bmatrix} dx^e \\ &= \begin{bmatrix} -2.726 & 3.137 \\ 3.137 & -2.726 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^1 = 0 \quad \mathbf{P}^1 &= \int_0^{1/3} \begin{bmatrix} \frac{1/3 - x^e}{1/3} \\ \frac{x^e}{1/3} \end{bmatrix} \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} x^e \right) \right) dx^e \\ &= \begin{bmatrix} 0.102 \\ 0.101 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Interpretacja MES: matematyczna

Całkowanie macierzy i wektorów

$$d^2 = 1/3 \quad \mathbf{P}^2 = \int_0^{1/3} \begin{bmatrix} 1/3 - x^e \\ 1/3 \\ x^e \\ 1/3 \end{bmatrix} \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + 1/3) \right) \right) dx^e$$
$$= \begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.093 \end{bmatrix}$$

$$d^3 = 2/3 \quad \mathbf{P}^3 = \int_0^{1/3} \begin{bmatrix} 1/3 - x^e \\ 1/3 \\ x^e \\ 1/3 \end{bmatrix} \left(\frac{\pi^2}{16} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x^e + 2/3) \right) \right) dx^e = \begin{bmatrix} 0.084 \\ 0.077 \end{bmatrix}$$

Interpretacja MES: matematyczna

Wektor brzegowy zapisujemy w globalnym układzie

$$\mathbf{p}^{b,1} = \begin{bmatrix} -\frac{dy}{dx}(0) \\ \frac{dy}{dx}(1/3) \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^{b,2} = \begin{bmatrix} -\frac{dy}{dx}(1/3) \\ \frac{dy}{dx}(2/3) \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^{b,3} = \begin{bmatrix} -\frac{dy}{dx}(2/3) \\ \frac{dy}{dx}(1) \end{bmatrix}$$

Interpretacja MES: matematyczna

- Agregacja globalnej macierzy sztywności

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.726 & 3.137 & 0 & 0 \\ 3.137 & -5.452 & 3.137 & 0 \\ 0 & 3.137 & -5.452 & 3.137 \\ 0 & 0 & 3.137 & -2.726 \end{bmatrix}$$

wektorów obciążenia

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.102 \\ 0.197 \\ 0.177 \\ 0.079 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^b = \begin{bmatrix} -\frac{dy}{dx}(0) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dy}{dx}(1) \end{bmatrix}$$

Macierz topologii

Element	(1) węzeł	(2) węzeł
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Interpretacja MES: matematyczna

- Budowa globalnego układu równań

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{P} - \mathbf{P}^b$$

gdzie \mathbf{Q} jest globalnym wektorem stopni swobody

$$\mathbf{Q} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T$$

- Wprowadzenie warunków brzegowych

$$y(0) = y_1 = 0$$

$$y(1) = y_4 = 0$$

- Rozwiązanie układu równań ze względu na niewiadome pierwotne i wtórne

$$y_2 = -0.082, y_3 = -0.08$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = -0.36, \frac{dy}{dx}(1) = 0.329.$$

Interpretacja MES: matematyczna

- Aproksymacja funkcji y w globalnym układzie współrzędnych

$$y^e(x) = \mathbf{N}^e(x - d^e)\mathbf{q}^e$$

Aproksymacja w elemencie 1

$$\begin{aligned} y^1(x) &= \mathbf{N}^1(x - d^1)\mathbf{q}^1 = \begin{bmatrix} \frac{l^1 - (x - d^1)}{l^1} & \frac{x - d^1}{l^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.082 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1/3 - x}{1/3} & \frac{x}{1/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.082 \end{bmatrix} = -0.246x \end{aligned}$$

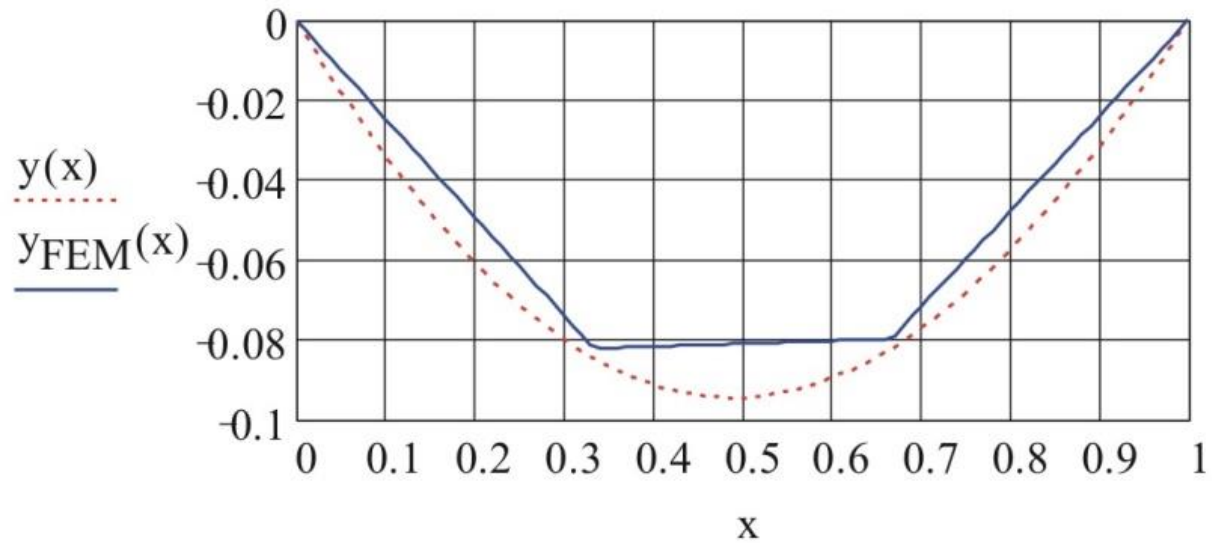
Podobnie w elemencie 2 i 3

$$y^2(x) = 0.006x - 0.084$$

$$y^3(x) = 0.24x - 0.24$$

Interpretacja MES: matematyczna

- Rozwiązanie numeryczne i dokładne



Interpretacja MES: matematyczna

□ Pochodne rozwiązania

$$\frac{dy^1}{dx}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.082 \end{bmatrix} = -0.246 \quad \frac{dy^2}{dx}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.082 \\ -0.08 \end{bmatrix} = 0.006$$

$$\frac{dy^3}{dx}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.08 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.24$$

