Metody matematyczne w transporcie

Zagadnienie transportowe

Marzena Nowakowska

Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Wiadomości wstępne

Zagadnienie transportowe ZT: zadanie programowania liniowego z dziedziny badań operacyjnych.

Twórca programowania liniowego: Leonid Witaliewicz Kantorowicz o (sformułowanie i rozwiązanie1934), rosyjski matematyk i ekonomista, laureat nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii w 1975.

Pierwsze opracowanie i publikacja ZT: 1941, autorstwa Franka Laurena Hitchcocka, amerykańskiego matematyka i fizyka $\rightarrow$ klasyczne zadanie transportowe.

Początkowo (II-WŚ): różne warianty rozwiązań dotyczących organizacji i zabezpieczenia środków dla działań bojowych.

Czasy pokoju: przemysł, gospodarka rolna, handel, transport, organizacja służby zdrowia itp.

Pojęcia podstawowe

Podstawowe typy ZT:

- zagadnienie transportowe zamknięte i otwarte
- zagadnienie transportowo-produkcyjne
- zagadnienie lokalizacji produkcji
- zagadnienie minimalizacji pustych przebiegów

Kryterium optymalizacji:

- minimalizacja łącznych kosztów transportu
- minimalizacja tras lub czasu transportu

Metoda rozwiązania – iteracyjny algorytm transportowy (stosowane do zadania zbilansowanego):

- wyznaczenie rozwiązania początkowego dopuszczalnego
- w kolejnych krokach poprawianie rozwiązania

Sformułowanie problemu zagadnienia transportowego zamkniętego

- Danych jest m dostawców A_1 , A_2 , ..., A_m i każdy z nich oferuje określoną wielkość zasobów jednorodnego towaru w ilości a_i , i=1, 2, ..., m
- Istnieje n odbiorców B_1 , B_2 , ..., B_n, z których każdy zgłasza zapotrzebowanie na ten towar równe b_j , j=1, ..., n
- Jednostkowy koszt przewozu produktu od i-tego dostawcy do j-tego punktu odbioru wynosi c_{ij} , i = 1, 2, ..., m oraz j = 1, 2, ..., n
- Łączna suma zapotrzebowań jest równa łącznej sumie podaży
- Należy znaleźć zbiór liczb x_{ij} nieujemnych określających wielkość przewozu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, tak aby łączny koszt transportu był jak najniższy

Model matematyczny

Spełnione są warunki ograniczające postaci

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Występuje zrównoważenie podaży i popytu

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Wielkość dostaw jest nieujemna

$x_{ij} \geq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz $j = 1, 2, \ldots, n$

Znaleźć takie wartości x_{ij}, aby funkcja celu FC określająca całkowity koszt przewozu osiągnęła wartość minimalną

$$FC = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

c_{ij} – koszt przewozu jednostki towaru od i do j

Jest to odmiana zagadnienia programowania liniowego: zarówno funkcja celu jak i ograniczenia mają postać liniową

Prezentacja zagadnienia w formie macierzowej

B_j / A_i	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	**...**	$\mathbf{B_n}$	a_i
$\mathbf{A_1}$	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	$\mathbf{a_1}$
$\mathbf{A_2}$	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	$\mathbf{a_2}$
...	…	…	…	…	**...**
$\mathbf{A_i}$	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{in}	$\mathbf{a_i}$
...	…	…	…	…	**...**
$\mathbf{A_m}$	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	$\mathbf{a_m}$
b_j	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	**...**	$\mathbf{b_n}$	

Suma elementów i-tego wiersza macierzy przedstawia sumę dostaw pochodzących od dostawcy A_i.
Suma elementów j-tej kolumny macierzy odpowiada sumie dostaw do odbiorcy B_j.
Wewnętrzna cześć tabeli stanowi macierz kosztów.
Ostatnia kolumna tabeli zawiera wielkości zasobów.
Ostatni wiersz tabeli zawiera wielkości zapotrzebowań.

Przygotowanie Ms Excel do rozwiązania zadań programowania liniowego

Solver – pakiet do rozwiązywania zadań optymalizacji z wykorzystaniem procedury numerycznej – algorytmu SIMPLEKS

Standardowa instalacja nie udostępnia narzędzi pakietu oferowanych w ramach opcji *Analysis Toolpack*.

Opcję *Analysis Toolpack* dołacza się do programu wykonując następujące czynności:

- w oknie pakietu Office wybrać przycisk *Opcje Programu Excel*,
- przejść do pozycji *Dodatki* w lewym panelu okna i kliknąć przycisk *Przejdź*,
- w oknie *Dodatki* zaznaczyć pola wyboru: *Analysis ToolPak* i *Dodatek Solver*
- zaakceptować przyciskiem *OK* instalację pakietów,
- narzędzia są dostępne z menu głównego *Dane* w grupie *Analiza*

Uwaga: nie wolno scalać komórek w arkuszu przy definiowaniu projektu dla Solvera

Przykładowe zbilansowane ZT

Trzy składnice surowców wtórnych „Katowice”, „Bydgoszcz” i „Wrocław” dostarczają te surowce do trzech zakładów produkcyjnych „Pomorze”, „Śląsk” i „Tatry”.
W składnicach znajduje się kolejno 180, 80 i 200 ton surowca.
Zdolności przerobowe zakładów produkcyjnych wynoszą odpowiednio: 150, 200 i 110 ton.
Poniżej zestawiono, jaki jest koszt przewozu jednej tony surowca z każdej składnicy do kolejnych zakładów.

Zakłady / **Składnice**	Pomorze	Śląsk	Tatry	Oferta składnic
Katowice	10	6	3	180
Bydgoszcz	8	5	4	80
Wrocław	6	4	5	200
Zdolności przerobowe zakładów	150	200	110	

Określić ilości przewożonego towaru, tak aby koszty transportu były jak najmniejsze

DEMO

Model matematyczny zadania

x11 + x12 + x13 = 180 waga surowca ze składnicy Katowice do zakładów: Pomorze, Śląsk, Tatry
x21 + x22 + x23 = 80 waga surowca ze składnicy Bydgoszcz do zakładów: Pomorze, Śląsk, Tatry
x31 + x32 + x33 = 200 waga surowca ze składnicy Wrocław do zakładów: Pomorze, Śląsk, Tatry

x11 + x21 + x31 = 150 waga surowca przyjęta przez zakład Pomorze ze składnic zakładów: Katowice, Bydgoszcz, Wrocław
x12 + x22 + x32 = 200 waga surowca przyjęta przez zakład Śląsk ze składnic zakładów: Katowice, Bydgoszcz, Wrocław
x13 + x23 + x33 = 110 waga surowca przyjęta przez zakład Tatry ze składnic zakładów: Katowice, Bydgoszcz, Wrocław

x_{ij} >= 0 ilość surowca przewieziona ze składnicy i do zakładu j

Sumaryczna waga towaru oferowanego przez składnice: 180 + 80 + 200 = 460
Sumaryczna waga towaru potrzebnego zakładom 150 + 200 + 110 = 460
Podaż = popyt $\Rightarrow$ Zagadnienie jest zbilansowane.

Funkcja celu ma postać:
FC(x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33) =
10x11 + 6x12 + 3x13 + 8x21 + 5x22 + 4x23 + 6x31 + 4x32 + 5x33 $\rightarrow$ min

Poszukiwane wartości przewozów (niewiadome): x11 … x33, aby funkcja celu osiągnęła minimum.

Zagadnienie transportowe otwarte

Gdy nie zachodzi zrównoważenie podaży i popytu, ZT nazywa się otwartym lub niezbilansowanym.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Nadwyżka podaży

punkty odbioru nie są w stanie wchłonąć całej produkcji

Nadwyżka popytu

zdolność produkcyjna nie zaspokaja zapotrzebowania punktów odbioru

ZT otwarte sprowadza się do modelu zamkniętego następująco:

Wprowadza się fikcyjnego odbiorcę $B_{n+1,}$ który odgrywa rolę magazynu (wielkości „przewozu” do B_{n+1} informują, ile towaru będzie magazynowane u dostawców

Wprowadza się fikcyjnego dostawcę A_{m+1}, dla którego będzie wyznaczone, jaka ilość towaru nie zostanie wysłana do poszczególnych odbiorców

Nadwyżka podaży

Fikcyjny odbiorca $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	$\mathbf{B_{n+1}}$	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	$\mathbf{c_{1,\ n+1}}$	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	$\mathbf{c_{2,\ n+1}}$	a_2
...	...	...	...	...	...	
A_i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{in}	$\mathbf{c_{i,\ n+1}}$	a_i
...	...	...	...	...	...	
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	$\mathbf{c_{m,\ n+1}}$	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\mathbf{b_{n+1}}$	

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$$

Wielkość składowanego towaru

Koszty składowania u kolejnych dostawców

Nadwyżka podaży z warunkami dodatkowymi

Fikcyjny odbiorca

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	$\mathbf{B_{n+1}}$	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	$\mathbf{c_{1, n+1}}$	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	$\mathbf{c_{2, n+1}}$	a_2
...	...	...	...	...	...	
$\mathbf{A_i'}$	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{in}	$\mathbf{c'_{i, n+1}}$	$\mathbf{a_i'}$
$\mathbf{A_i''}$	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{in}	**M**	$\mathbf{a_i''}$
...	...	...	...	...	...	
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	$\mathbf{c_{m, n+1}}$	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\mathbf{b_{n+1}}$	

M – duża liczba dodatnia, np. 10x wartość największego kosztu jednostkowego

Wielkość składowanego towaru

Blokowanie trasy od i-tego dostawcy do fikcyjnego odbiorcy powoduje dostarczenie towaru w ilości $\mathbf{a_i''}$ do rzeczywistych odbiorców i realizację wywozu koniecznego (poza możliwością magazynowania u tego dostawcy – może zmagazynować tylko $\mathbf{a_i'}$ towaru).

Nadwyżka popytu

Wielkość niezaspokojonego popytu

Bj / Ai	B_1	B_2		B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
A_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{in}	a_i
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
$\mathbf{A_{m+1}}$	**0 (= $c_{(m+1)1}$)**	**0 (= $c_{(m+1)2}$)**		**0 = ($c_{(m+1)n}$)**	$\mathbf{a_{m+1}}$
bj	b_1	b_2		b_n	

Fikcyjny dostawca

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Jednostkowe koszty transportu nieistniejącego towaru, mogą to być też koszty oczekiwania (jednostkowe straty), w szczególności równe zero.

Nadwyżka popytu
polityka zaspokajania potrzeb
w warunkach niedostatecznej podaży

Realizacja zapotrzebowania koniecznego

A_i \ B_j	$\mathbf{B_1'}$	B_1''		$\mathbf{B_n'}$	B_n''	a_i
A_1	c_{11}	c_{11}		c_{1n}	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{21}		c_{2n}	c_{2n}	a_2
...	...	...		...	...	
A_i	c_{i1}	c_{i1}		c_{in}	c_{in}	a_i
...	...	...		...	...	
A_m	c_{m1}	c_{m1}		c_{mn}	c_{mn}	a_m
A_{m+1}	$M_{(m+1)\,1}$	0	0	$M_{(m+1)\,n}$	0	a_{m+1}
b_j	$\mathbf{b_1'}$	b_1''		$\mathbf{b_n'}$	b_n''	

Blokowanie tras (duże wartości M_{ij}) – niezrealizowanie fikcyjnych dostaw

Poziom minimalnego zapotrzebowania nie przekracza podaży ogólnej:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^{'}$$