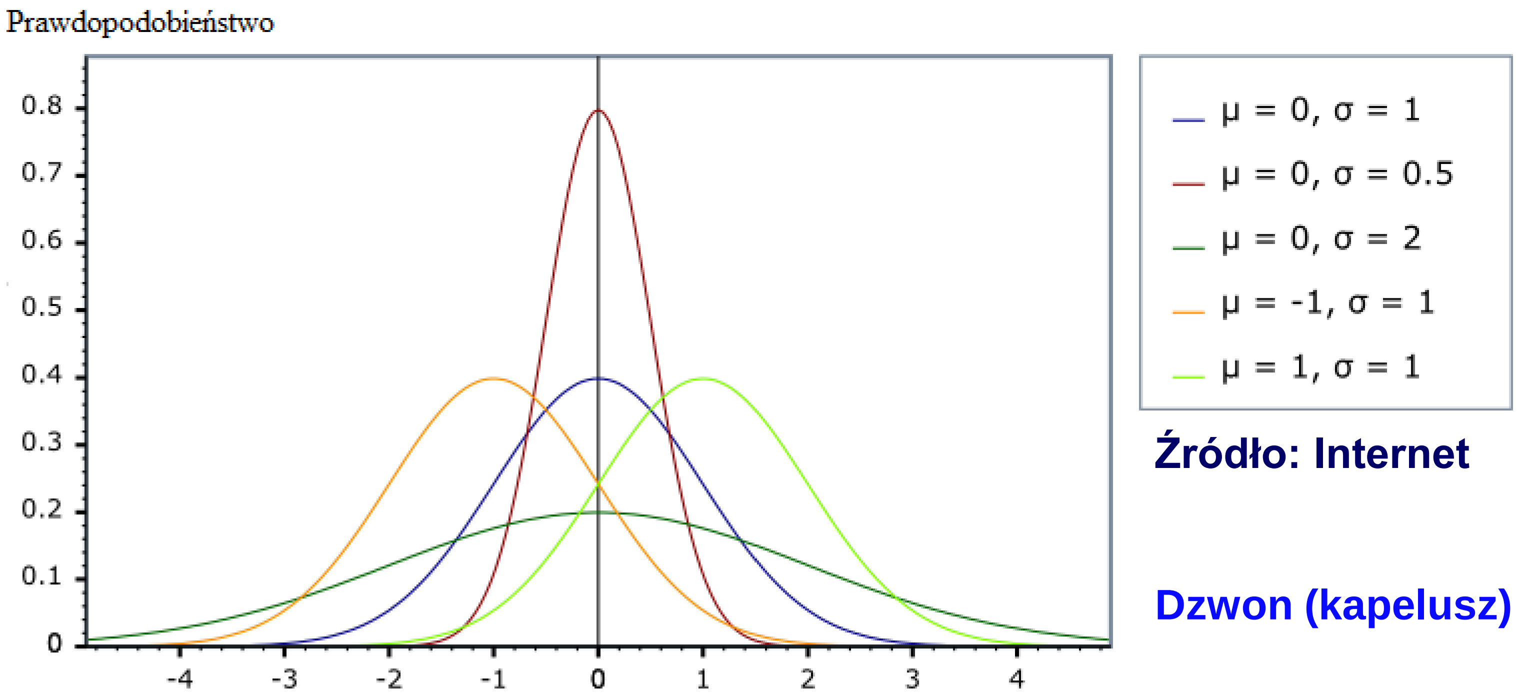
Metody matematyczne w transporcie

Testy istotności różnic między parametrami cechy dla dwóch populacji

Marzena Nowakowska
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego

Charakterystyka rozkładu normalnego



Źródło: Internet

Dzwon (kapelusz) Gaussa

- **Rozkład jest symetryczny; wartości cechy rozkładają się tak samo z lewej i prawej strony średniej; dominanta = mediana =średnia**
- **68,27% wyników jest w przedziale (m-σ, m+σ)**
- **95,45% wyników jest w przedziale (m-2σ, m+2σ)**
- **99,73% wyników jest w przedziale (m-3σ, m+3σ)**

Znaczenie rozkładu normalnego

Jednym z najważniejszych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, uzasadniającym powszechne występowanie w przyrodzie rozkładów zbliżonych do rozkładu normalnego jest Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG).

Idea wszystkich wariantów CTG: że rozkład sumy wielu zmiennych losowych zmierza do rozkładu normalnego.

To oznacza, że jeżeli liczba składowych zmiennych losowych tworzących sumę (nową zmienną losową) jest dostatecznie duża, to rozkład tej zmiennej można aproksymować rozkładem normalnym.

Wniosek praktyczny: jeżeli liczba zmiennych losowych (nie próby) nieograniczenie wzrasta, to przy bardzo ogólnych założeniach, rozkład sumy tych zmiennych (nowej zmiennej) dąży do rozkładu normalnego.

Empiryczne zmienne losowe mają na ogół rozkład zbliżony do normalnego. Spotykane w praktyce zmienne losowe mogą być przeważnie traktowane jako sumy znacznej liczby zmiennych losowych, z których żadna nie ma dominującego wpływu na wielkość tej sumy.

Podstawowe pojęcia teorii estymacji

Przedmiotem teorii estymacji jest wnioskowanie o wartości parametru lub parametrów, od których zależy rozkład badanej zmiennej losowej.

Estymacja polega na oszacowaniu wartości nieznanego parametru *PA* populacji, na podstawie *n* wyników zaobserwowanych w próbie. Przykłady parametrów: średnia, wariancja, proporcja, parametry strukturalne w zależności regresyjnej.

Zadaniem **estymacji przedziałowej** jest konstrukcja przedziału liczbowego, zwanego przedziałem ufności, który z określonym prawdopodobieństwem (jak największym) będzie zawierał prawdziwą wartość parametru. Ww. prawdopodobieństwo nosi nazwę współczynnika ufności i określa się je w procentach jako wartości wyrażoną zależnością $(1-\alpha)$, α – prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju. Im większa tego współczynnika, tym szerszy przedział ufności, więc mniejsza dokładność estymacji parametru.

Zadaniem **estymacji punktowej** jest znalezienie wartości liczbowej U_n zwanej estymatorem, którą będzie można uznać za najlepsze przybliżenie parametru *PA* populacji.

Estymator = statystyka szacująca wartość parametru.
Statystyka = zmienna losowa będąca funkcją zbioru wartości z próby.

Cechy najlepszego estymatora

Estymator U_n parametru PA jest najlepszy jeśli posiada trzy własności:

- **Jest nieobciążony, czyli $E(U_n) = PA$**

  Oznacza to, że jeśli dla serii prób wyznaczy się wartości estymatora U_n, to średnia z tych wartości jest równa szacowanemu parametrowi.

- **Jest zgodny, czyli jest stochastycznie zbieżny do PA**

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n \to \infty} P(|U_n - PA| < \varepsilon) = 1$$

  Oznacza to, że gdy liczebność próby rośnie, to prawdopodobieństwo, że wartość estymatora U_n różni się dowolnie mało od wartości parametru PA zbliża się do jedności.

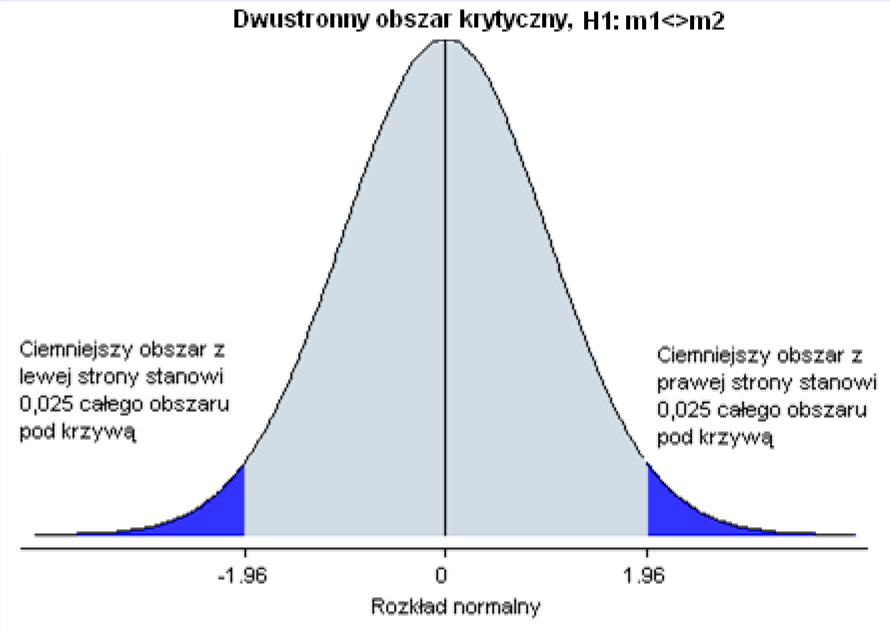
- **Jest najefektywniejszy, czyli ma najmniejszą wariancję.**

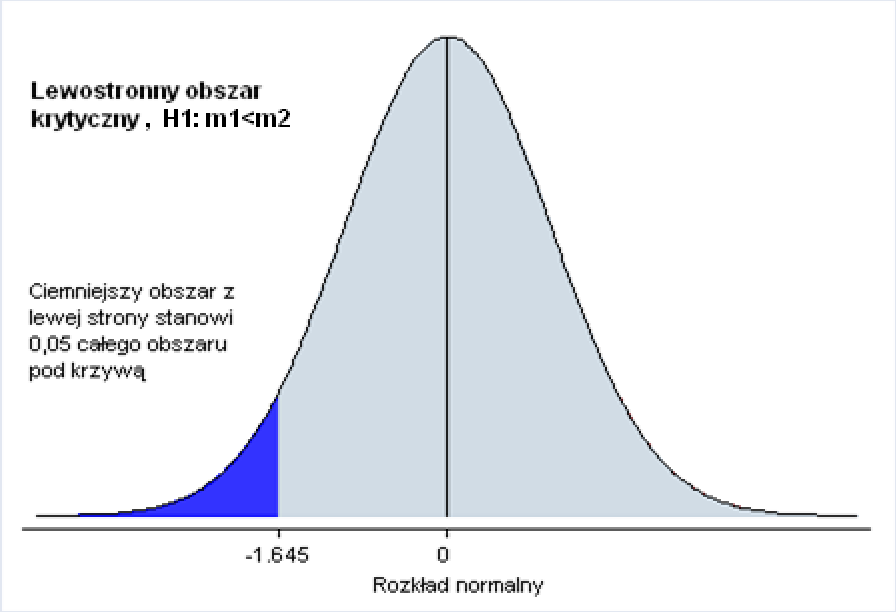
  Oznacza to, że jego wartości są bardziej skupione wokół jego wartości średniej niż wartości innych estymatorów.

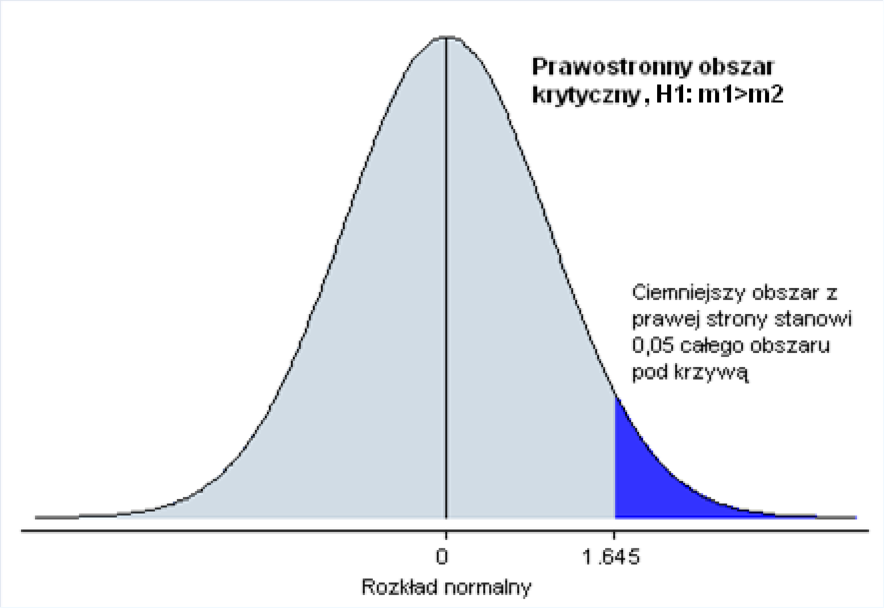
Obszary krytyczne

Treść H0: m1 = m2
m1 – nieznana wartość parametru
m2 – przypuszczenie na temat wartości parametru (jaką wartość badacz chce sprawdzić)

Objaśnienie obszarów krytycznych dla α = 0,05 i statystyki testowej o określonym rozkładzie; tu – o rozkładzie normalnym.







Podstawowe pojęcia

- Dwie zbiorowości statystyczne
  populacje zależne i niezależne

- Test różnic między parametrami dla dwóch populacji:
  - założenie o normalności rozkładu cechy
  - postaci hipotez: zerowej i alternatywnej

Testy dla dwóch średnich populacji niezależnych

Próby niezależne są tworzone z danych pobieranych z dwóch niezależnych (nie związanych ze sobą) populacji.

Przykładem wykorzystania testu jest sprawdzenie istotności różnic w średniej płacy kobiet i mężczyzn na wybranych stanowiskach. Obie grupy są niezależne – nie ma powiązań między zarobkami dla którejkolwiek kobiety i któregokolwiek mężczyzny.

H0: $m_1 = m_2$ **weryfikowana hipoteza zerowa**

Możliwe hipotezy alternatywne

H1: $m_1 \neq m_2$ **dwustronny obszar krytyczny**

H1: $m_1 < m_2$ **lewostronny obszar krytyczny**

H1: $m_1 > m_2$ **prawostronny obszar krytyczny**

Jeżeli wariancje obu populacji są równe, to test wykonuje się na podstawie statystyki o rozkładzie t-Studenta.

Jeżeli wariancje obu populacji są różne, to test wykonuje się na podstawie statystyki o aproksymowanym rozkładzie t-Studenta.

Liczba stopni swobody statystyki testowej jest równa $n_1 + n_2 - 2$, gdzie n_1 jest liczebnością jednej próby, a n_2 jest liczebnością drugiej próby.

Testy dla dwóch wariancji (populacje niezależne)

Jeżeli przyjąć założenie, że w obu populacjach rozkład badanej cechy jest normalny, to dla weryfikacji hipotezy zerowej o równości wariancji cechy dla tych populacji:

$$\mathbf{H0:}\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

wykorzystuje się statystykę F, która ma rozkład F-Snedecora o $(n_1-1)(n_2-1)$ stopniach swobody.

Testy dla dwóch średnich populacji zależnych

Próby zależne są tworzone z danych pochodzących jednej próby pobranej z jednej populacji. Dla tej próby wartość cechy jest zazwyczaj mierzona dwukrotnie (każdy element próby ma przypisane dwie wartości cechy – badania „przed i po”). W ten sposób powstają dwa szeregi statystyczne tworzące dwie próby.

Rodzaj ingerencji zależy od przedmiotu badań.
Można w ten sposób sprawdzać efektywność statystyczną leku (w badaniach medycznych), nawozu (przy opracowywaniu środków podnoszących efektywność produkcji roślinnej), sposobu karmienia, odzwyczajania od używek.

H0: $m_1 = m_2$ **weryfikowana hipoteza zerowa**

Możliwe hipotezy alternatywne

H1: $m_1 \neq m_2$ **dwustronny obszar krytyczny**

H1: $m_1 < m_2$ **lewostronny obszar krytyczny**

H1: $m_1 > m_2$ **prawostronny obszar krytyczny**

Statystyka testowa ma rozkład t-Studenta o *n-1* stopniach swobody, gdzie *n-1* jest liczebnością próby.

Przekształcenie testu dwustronnego w test jednostronny

Majac p-wartość dla hipotezy dwustronnej można łatwo (o ile to ma sens) wyznaczyć p-wartość dla hipotezy jednostronnej.

Jeżeli przez p0 oznaczy się p-wartość dla hipotezy dwustronnej, to dla hipotezy jednostronnej p-wartości można wyznaczyć jako p0/2, jeżeli hipoteza **alternatywna** jednokierunkowa jest „w tym kierunku, w którym są obserwacje” i 1 - p0/2 w przeciwnym przypadku.

Jeżeli średnia_próby(X) > średnia_próby(Y), to treść H1 jest taka, że $\mu(X) > \mu(Y)$.
Jeżeli średnia_próby(X) < średnia_próby(Y), to treść H1 jest taka, że $\mu(X) < \mu(Y)$.

Zapis symboliczny

Dla hipotezy zerowej H0: $\mu_1 = \mu_2$ i alternatywnej H1: $\mu_1 \neq \mu_2$ dane jest prawdopodobieństwo testowe:

$$p_0 = \text{p-wartość}(H1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0)$$

Dla testu jednostronnego hipotezę alternatywną formułuje się tak, aby otrzymać test jednostronny w kierunku wskazywanym przez dane. W takim przypadku wartość jest dana zaleznością:

p-value(H1: $\mu_1 - \mu_2$ (*właściwa relacja:* < *albo* >) **0) =** $p_0/2$

Procedura testowania - Enterprise Guide

Przygotować projekt: biblioteka, dane – zwrócić uwagę na strukturę zbioru

Sprawdzić normalność rozkładu cech

Wybrać rodzaj testu dla dwóch prób (dwupróbkowy – test dla średnich z populacji niezależnych; parzysty – test dla średnich z populacji zależnych)

Sformułować

- Hipotezę zerową
- Hipotezę alternatywną

Wykonać test

Wyniki:

- Miary statystyczne policzone dla prób
- Wyniki testów normalności
- Wyniki testu istotności różnic między średnimi, zawierające:
  - ✓ statystykę testową oraz liczbę stopni swobody
  - ✓ prawdopodobieństwo testowe

Wnioski