

Rozdział 4

Elementy aproksymacji i interpolacji funkcji

4.1. Uwagi wstępne

W tym rozdziale przedstawimy w sposób zwięzły podstawowe pojęcia i metody *teorii aproksymacji* i jej szczególnego przypadku, *aproksymacji interpolacyjnej*, którą będziemy krótko nazywać *interpolacją* [4]. Aproksymację, jak wiemy, wykorzystujemy kiedy dana funkcja ma złożoną postać lub dana jest w postaci dyskretnej, lub gdy w ogóle jest nieznana, jak to ma miejsce przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. W każdym z tych przypadków poszukujemy innej, na ogół prostej funkcji, która dobrze przybliży funkcję pierwotną. W zasadzie ograniczymy się tylko do aproksymacji wielomianowej i to w takim zakresie, który będzie nam potrzebny w następnych rozdziałach podręcznika. Wzory i równania wyprowadzimy w zapisie wskaźnikowym oraz w zapisie macierzowym, wykorzystując operacje rachunku macierzowego, zestawione w dodatku D.

4.2. Aproksymacja optymalna

Zadanie aproksymacji optymalnej w bazie jednomianów polega na dobraniu wielomianu aproksymacyjnego

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^m a_k x^k = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} \quad (4.1)$$

gdzie:

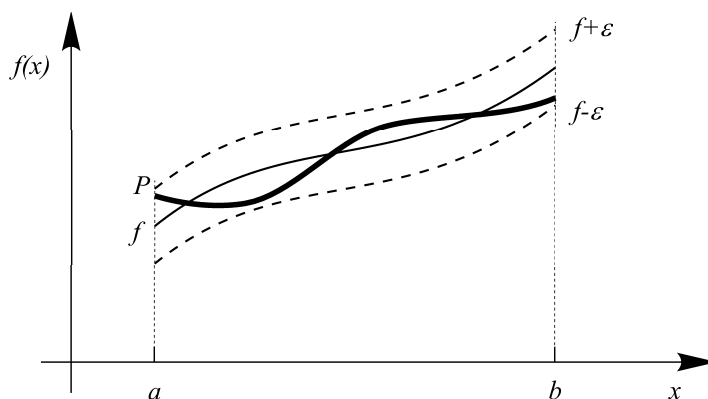
$\mathbf{p} = [1 \ x \dots \ x^m]$ – macierz jednowierszowa jednomianów,

$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \dots \ a_m]^T$ – wektor nieznanych parametrów aproksymacji,

w taki sposób, aby przybliżał on daną funkcję $f(x)$ w pewnym sensie najlepiej. Tak sformułowane zadanie może być rozwiązane jeśli ustalimy stopień wielomianu m oraz przyjmiemy kryterium, według którego będziemy oceniać jakość aproksymacji.

Przyjęcie określonego stopnia m wielomianu aproksymacyjnego jest trudne, zależne od wielu czynników, i może decydować o jakości aproksymacji. Kryteriów oceny aproksymacji jest wiele, w podręczniku ograniczymy się do *metody najmniejszych kwadratów*, formułującej kryterium najczęściej wykorzystywane.

W dalszym ciągu przedstawimy metodę najmniejszych kwadratów dla tzw. aproksymacji ciągłej i aproksymacji punktowej. *Aproksymacją ciągłą* nazwiemy aproksymację funkcji $f(x)$ określonej w pewnym przedziale, natomiast w *aproksymacji punktowej* będziemy aproksymować dyskretny zbiór wartości funkcji $f(x)$, danych w tzw. węzłach aproksymacji $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Rys.4.1. Interpretacja graficzna twierdzenia Weierstrassa

W podręczniku najczęściej będziemy wykorzystywali funkcje aproksymacyjne w postaci wielomianów algebraicznych (4.1). Skuteczność takiej aproksymacji ciągłej wynika z twierdzenia Weierstrassa.

Twierdzenie 1 (Weierstrassa).

Jeśli $f(x)$ jest funkcją określoną i ciągłą w przedziale $[a, b]$ i dane jest $\varepsilon > 0$, to wówczas istnieje wielomian $P(x)$, określony w $[a, b]$, taki że

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } x \in [a, b]$$

Z twierdzenia tego wynika ważny wniosek, że zawsze możemy wyznaczyć taki wielomian $P(x)$, który będzie wystarczająco bliski danej funkcji, rys. 4.1.

4.3. Aproksymacja ciągła

Funkcję $f(x) \in C[a, b]$ aproksymujemy w metodzie najmniejszych kwadratów wielomianem P_m , stopnia najwyżej m , wykorzystując warunek minimalizacji błędu ε w sensie normy L_2 (patrz dodatek A)

$$\varepsilon = \|f(x) - P_m(x)\|_0 = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx \quad (4.2)$$

Podstawiając (4.1) do (4.2) otrzymamy funkcję

$$\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^m a_k x^k \right)^2 dx \quad (4.3a)$$

która po wprowadzeniu zapisu macierzowego ma postać

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \int_a^b (f(x) - \mathbf{p}(x)\mathbf{a})^2 dx \quad (4.3b)$$

Nieznane parametry aproksymacji a_i , $i = 0, 1, \dots, m$, obliczymy z warunku koniecznego minimum ε

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = 0 \quad \text{dla każdego } i = 0, 1, \dots, m \quad (4.4)$$

Ponieważ

$$\varepsilon = \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right)^2 dx$$

to otrzymujemy

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = -2 \int_a^b x^i f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^{i+k} dx \quad (4.5)$$

Wykorzystując (4.5) w (4.4) otrzymujemy tak zwany *układ $m + 1$ równań normalnych*

$$\sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^{i+k} dx = \int_a^b x^i f(x) dx \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.6a)$$

dla obliczenia niewiadomych a_i , $i = 0, 1, \dots, m$. Są to równania liniowe, które zawsze mają rozwiązanie jednoznaczne pod warunkiem, że $f \in C[a, b]$ i $a \neq b$. Odpowiednikiem równań (4.6a) w zapisie macierzowym jest równanie

$$\left[\int_a^b \mathbf{p}^T(x) \mathbf{p}(x) dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \mathbf{p}^T(x) f(x) dx \quad (4.6b)$$

Przykład 4.1. Obliczymy metodą najmniejszych kwadratów aproksymację funkcji $f(x) = \sin \pi x$ w przedziale $[0, 1]$.

Wielomian aproksymacyjny przyjmujemy w formie

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Wykorzystując (4.6a) dostaniemy układ równań

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx &= \int_0^1 x \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx &= \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx \end{aligned} \quad (4.7a)$$

lub stosując zapis macierzowy (4.6b)

$$\left[\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} [1 \ x \ x^2] dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \sin \pi x dx \quad (4.7b)$$

Wykonując nakazane całkowania otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0,050465 \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4,12251$$

Wielomian aproksymacyjny ma postać

$$P_2(x) = -4,12251x^2 + 4,12251x - 0,050465$$

Błąd aproksymacji (4.3) wynosi

$$\varepsilon = \int_0^1 (\sin \pi x + 4,12251x^2 - 4,12251x + 0,050465)^2 dx = 0,01$$

Zauważmy, że elementy macierzy układu równań (4.7) obliczyć można z ogólnego wzoru

$$\int_a^b x^{i+k} dx = \frac{b^{i+k+1} - a^{i+k+1}}{i+k+1}$$

Tak obliczone elementy tworzą tzw. *macierz Hilberta*, która jest źle uwarunkowana i przy jej obliczaniu występuje duży błąd obcięcia, co ma znaczenie przy rozwiązywaniu dużego układu równań.

W dalszym ciągu uogólnimy wyprowadzone równania na przypadek aproksymacji w innej przestrzeni funkcji bazowych niż przestrzeń jednomianów. Wymaga to jednakże podania dwóch definicji i jednego twierdzenia.

Definicja 1. Zbiór funkcji $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ nazwiemy *liniowo niezależnym* w przedziale $[a, b]$, gdzie $b > a$, jeśli warunek

$$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_m u_m(x) = 0 \quad \text{dla każdego } x \in [a, b]$$

ma miejsce tylko dla $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$. W przeciwnym przypadku zbiór funkcji jest *liniowo zależny*.

Definicja 2. Funkcję wagową w w przedziale $[a, b]$ nazwiemy dowolną nieujemną funkcją całkowalną w tym przedziale.

Funkcję wagową będziemy też nazywać *funkcją testową* i jej celem jest rozłożenie wagi (lub: ważności) aproksymacji w różnych miejscach przedziału $[a, b]$, co powinno poprawić jakość aproksymacji.

Twierdzenie 2.

Jeśli u_i jest wielomianem stopnia i , dla każdego $i = 0, 1, \dots, m$, to wówczas zbiór funkcji $\{u_0, \dots, u_m\}$ jest liniowo niezależny w przedziale $[a, b]$, gdzie $a < b$.

Przyjmijmy teraz, że $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ jest zbiorem funkcji bazowych liniowo niezależnych w przedziale $[a, b]$ i w jest funkcją wagową w $[a, b]$ oraz $f \in C[a, b]$. Parametry $a_i, i = 0, 1, \dots, m$, funkcji aproksymacyjnej

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} \quad (4.8)$$

obliczymy minimalizując błąd z wagą $w(x)$

$$\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) \right]^2 dx \quad (4.9a)$$

który w zapisie macierzowym ma formę

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \int_a^b w(x) \left[(f(x) - \mathbf{p}(x)\mathbf{a}) \right]^2 dx \quad (4.9b)$$

gdzie:

$\mathbf{p}(x) = [u_0, u_1, \dots, u_m]$ – macierz jednowierszowa funkcji bazowych.

Układ równań normalnych, otrzymany z warunku koniecznego minimum ε , ma postać analogiczną do (4.6)

$$\int_a^b w(x) f(x) u_i(x) dx = \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b w(x) u_k(x) u_i(x) dx \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, m \quad (4.10a)$$

lub w postaci macierzowej

$$\left[\int_a^b w(x) \mathbf{p}^T(x) \mathbf{p}(x) dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \mathbf{p}^T(x) w(x) f(x) dx \quad (4.10b)$$

Przykładami funkcji bazowych $\mathbf{p}(x)$ są *wielomiany trygonometryczne*, *wielomiany Legendre'a* lub *wielomiany Czebyszewa*.

Czytelników zainteresowanych dalszymi studiami problematyki aproksymacji ciągłej odsyłamy do podręcznika z metod numerycznych [4, 6].

4.4. Aproksymacja punktowa

W aproksymacji punktowej funkcja $f(x)$ dana jest w formie dyskretnej w postaci zbioru wartości funkcji $\mathbf{F} = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T$ (gdzie oznaczono $f_i \equiv f(x_i)$) w węzłach aproksymacji $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

W ogólnym przypadku, wielomian aproksymacyjny $P_m(x)$ można wybrać w postaci *wielomianu uogólnionego*

$$\begin{aligned} P_m(x) &= a_m u_m(x) + a_{m-1} u_{m-1}(x) + \dots + a_0 u_0(x) = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie $\mathbf{p}(x)$ jest macierzą jednowierszową funkcji bazowych $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$, znanych i liniowo niezależnych

$$\mathbf{p}(x) = [u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)]$$

Odpowiednikiem błędu ε (4.2) w metodzie najmniejszych kwadratów jest teraz błąd

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \mathbf{p}(x_i) \mathbf{a}]^2 \quad (4.12)$$

Warunek konieczny minimum funkcji $\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m)$ napiszemy od razu w formie równania macierzowego

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} : \left[\sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \right] \mathbf{a} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) f(x_i) \quad (4.13)$$

Jest to liniowy układ równań normalnych, który ma rozwiązanie jednoznaczne pod warunkiem, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$. Przyjmując oznaczenia macierzy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \quad \mathbf{B} = \left[\mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \dots \mathbf{p}^T(x_n) \right] \quad (4.14)$$

równanie (4.13) możemy napisać w zwartej formie

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{F} \quad (4.15)$$

Podstawiając do (4.11) rozwiązanie $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}$ otrzymamy wzór na wielomian uogólniony

$$P_m(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{N}(x) \mathbf{F} \quad (4.16)$$

gdzie zdefiniowano *macierz jednowierszową funkcji*

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.17)$$

We wzorze (4.16) współczynnikami kombinacji liniowej funkcji $N_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ są obecnie znane wartości funkcji $f(x_i)$, zawarte w wektorze \mathbf{F} . Ponieważ zwykle funkcja $f(x)$ ma jakiś sens fizyczny (na przykład jest to funkcja temperatury, przemieszczenia, naprężenia, ...) to elementy wektora \mathbf{F} nazywa się *fizycznymi stopniami swobody*. Elementy zawarte w wektorze \mathbf{a} będziemy natomiast nazywać *matematycznymi stopniami swobody*.

W przypadku, kiedy wielomian aproksymacyjny stopnia $m < n$ ma postać

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (4.18)$$

tzn. funkcje bazowe są jednomianami, układ równań normalnych w formie

$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \mathbf{p}^T(x_2) \mathbf{p}^T(x_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 536 \end{bmatrix}$$

Równanie $\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{F}$ jest w formie

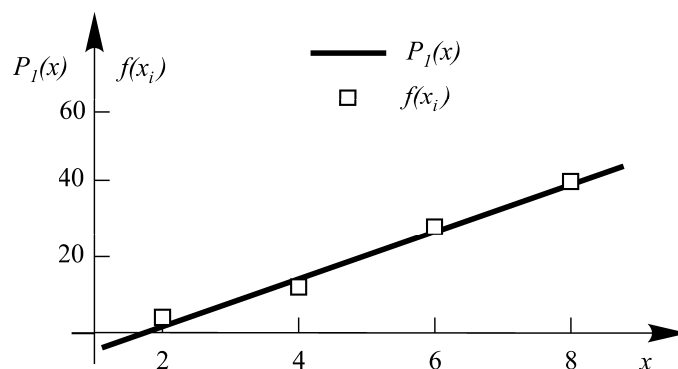
$$\begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 536 \end{bmatrix}$$

i ma rozwiązanie $a_0 = -12,50$ i $a_1 = 6,55$.

Wielomian aproksymacyjny wynosi

$$P_1(x) = -12,50 + 6,55x$$

Wynik obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 4.2.



Rys.4.2. Wyniki obliczeń w przykładzie 4.2

Przykład 4.3. Zastosujemy aproksymację kwadratową $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ do danych z tab. 4.2

Obecnie $n = 4$ i $m = 2$. Podobnie jak w przykładzie 4.2 niewiadome parametry aproksymacji $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$ obliczymy korzystając z równania macierzowego (4.15). Potrzebne do obliczeń wektory i macierze mają postać

$$\mathbf{p} = [1 \ x \ x^2]$$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$f(x_i)$	1,0000	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

Tabela 4.2. Dane do przykładu 4.3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 1 & \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 & \sum_{i=0}^4 x_i^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 1,875 \\ 2,5 & 1,875 & 1,5625 \\ 1,875 & 1,5625 & 1,3828 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}^T(x_0) \dots \mathbf{p}^T(x_4)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0,50 & 0,75 & 1,00 \\ 0 & 0,0625 & 0,25 & 0,5625 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BF} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,2840 \\ 1,6487 \\ 2,1170 \\ 2,7183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,7680 \\ 5,4514 \\ 4,4015 \end{bmatrix}$$

Równanie $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{BF}$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 1,875 \\ 2,5 & 1,875 & 1,5625 \\ 1,875 & 1,5625 & 1,3828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,7680 \\ 5,4514 \\ 4,4015 \end{bmatrix}$$

a jego rozwiązanie wynosi $a_0 = 1,0052$, $a_1 = 0,8641$, $a_2 = 0,8437$.

Wielomian aproksymacyjny jest

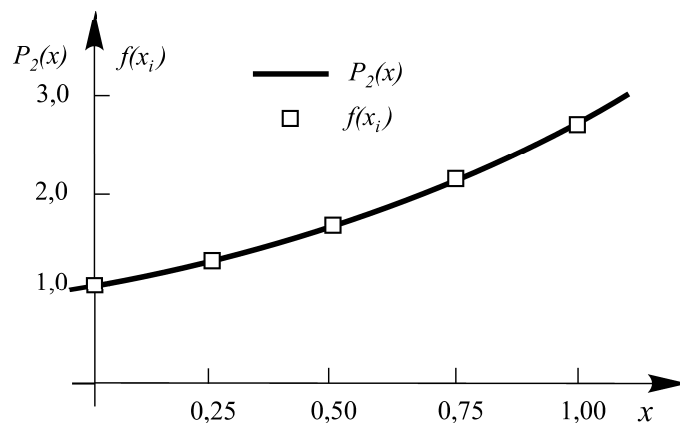
$$P_2(x) = 1,0052 + 0,8641x + 0,8437x^2$$

Na rys. 4.3 porównano wynik obliczeń z danymi z tab. 4.2.

Błąd

$$\sum_{i=0}^4 [f(x_i) - P_2(x_i)]^2 = 2,76 \cdot 10^{-4}$$

jest najmniejszym błędem, jaki można uzyskać dla kwadratowego wielomianu aproksymacyjnego.

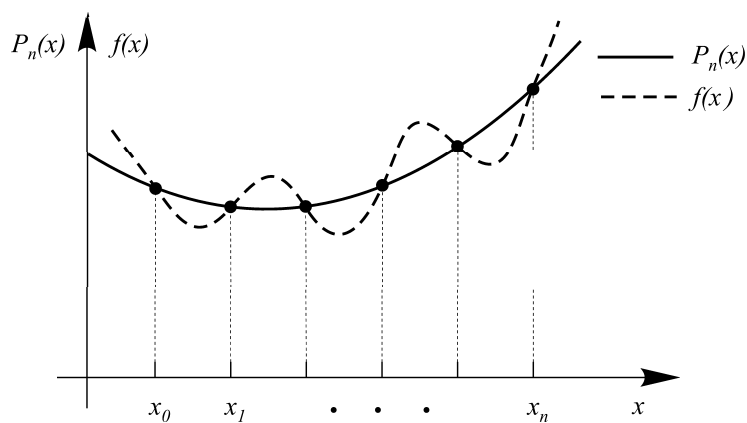


Rys.4.3. Wyniki obliczeń w przykładzie 4.3

4.5. Interpolacja

4.5.1. Interpolacja Lagrange'a funkcji jednej zmiennej

Interpolacja funkcji $f(x)$ jest szczególnym przypadkiem aproksymacji, który ma miejsce dla $m = n$. Wówczas w węzłach interpolacji $x = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n]$ wartość funkcji interpolacyjnej $P(x)$ jest dokładnie równa funkcji interpolowanej $f(x)$, rys. 4.4

Rys.4.4. Interpolacja funkcji $f(x)$

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.20)$$

Wzory i równania wprowadzone w punkcie 4.4 są oczywiście ważne również i dla interpolacji, po uwzględnieniu, że $m = n$. Prościej jednakże sposobem jest bezpośrednio wykorzystanie warunków (4.20).

Jeśli funkcję interpolacyjną wybierzemy w postaci wielomianu uogólnionego (4.11), to równania (4.20) przybierają postać

$$\mathbf{p}(x_i) \mathbf{a} = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.21a)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\mathbf{B}^T \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (4.21b)$$

gdzie wykorzystano definicję (4.14) macierzy \mathbf{B}

$$\mathbf{B}^T = [\mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \dots \mathbf{p}^T(x_n)]^T = \begin{bmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \dots & u_n(x_n) \end{bmatrix}$$

oraz wektorów \mathbf{a} i \mathbf{F}

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T \quad \mathbf{F} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_n]^T$$

Podstawiając rozwiązanie równania (4.21b) $\mathbf{a} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{F}$ do wielomianu interpolacyjnego (4.11) otrzymamy

$$P_n(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a} = \mathbf{p}(x) (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{N}(x) \mathbf{F} \quad (4.22)$$

gdzie obecnie $\mathbf{N}(x)$ zawiera funkcje liniowo niezależne i tworzy *nową bazę interpolacyjną*

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) (\mathbf{B}^T)^{-1} = [N_0(x) \ N_1(x) \ \dots \ N_n(x)] \quad (4.23)$$

z fizycznymi stopniami swobody zawartymi w wektorze \mathbf{F} .

Jeśli bazę $\mathbf{p}(x)$ przyjmujemy w postaci jednomianowej

$$\mathbf{p}(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n]$$

to układ równań (4.21) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

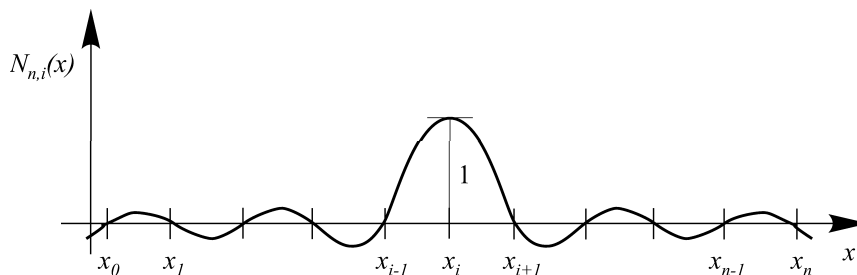
Ponadto, baza $\mathbf{N}(x)$ jest wówczas tzw. *bazą Lagrange'a*

$$\mathbf{N}(x) = [N_{n,0}(x) \ N_{n,1}(x) \ \dots \ N_{n,n}(x)]$$

utworzoną z wielomianów bazowych Lagrange'a stopnia n o postaci ogólnej

$$\begin{aligned} N_{n,i}(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Na rys. 4.5 pokazano wykres funkcji Lagrange'a $N_{n,i}(x)$.



Rys.4.5. Wykres funkcji Lagrange'a $N_{n,i}(x)$

Z interpretacji wzoru (4.22) oraz własności interpolacji Lagrange'a ($N_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}$, gdzie δ_{ki} jest deltą Kroneckera o własności $\delta_{ki} = 1$ dla $k = i$ oraz $\delta_{ki} = 0$ dla $k \neq i$) wynika ważna równość

$$\sum_{k=0}^n N_{n,k}(x) = 1 \quad (4.25a)$$

wyrażająca tzw. warunek kompletności rzędu zerowego dla funkcji bazowych. Ogólnie, warunek kompletności rzędu p jest postaci

$$\sum_{k=0}^n N_{n,k}(x) x_k^p = x^p, \quad p = 0, 1, \dots, n \quad (4.25b)$$

Jeśli funkcje bazowe spełniają warunki kompletności do rzędu p to oznacza to, że przez ich kombinację liniową można dokładnie przedstawić dowolny wielomian algebraiczny aż do stopnia p włącznie. W praktyce warunki kompletności (zwłaszcza najprostszy rzędu zerowego) wykorzystujemy do sprawdzenia poprawności wyników obliczeń funkcji bazowych Lagrange'a.

Błąd interpolacji Lagrange'a wyraża wzór

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (4.26)$$

gdzie $f \in C^{n+1}[a, b]$ i $\xi \in (a, b)$.

Przykład 4.4. Wyprowadzić wzór na liniowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a $P_1(x)$ ($n = 1$).

Dane: węzły interpolacji $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1)$,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach: $\mathbf{F} = [f_0 \ f_1]^T$.

Wielomian interpolacyjny (4.22) ma postać

$$P_1(x) = N_0(x)f_0 + N_1(x)f_1 = \mathbf{N}(x)\mathbf{F}$$

Funkcje bazowe obliczymy najpierw z wzoru (4.23), gdzie

$$\mathbf{p}(x) = [1 \ x] \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{B}^T)^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{bmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymując

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) (\mathbf{B}^T)^{-1} = [1 \ x] \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{bmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} & \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{bmatrix}$$

Ten sam wynik oczywiście otrzymamy wykorzystując wprost wzór (4.24).

Przyjmując $x_0 = 0$ oraz $x_1 = L$ mamy

$$N_{1,0}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_{1,1}(x) = \frac{x}{L} \quad (4.27)$$

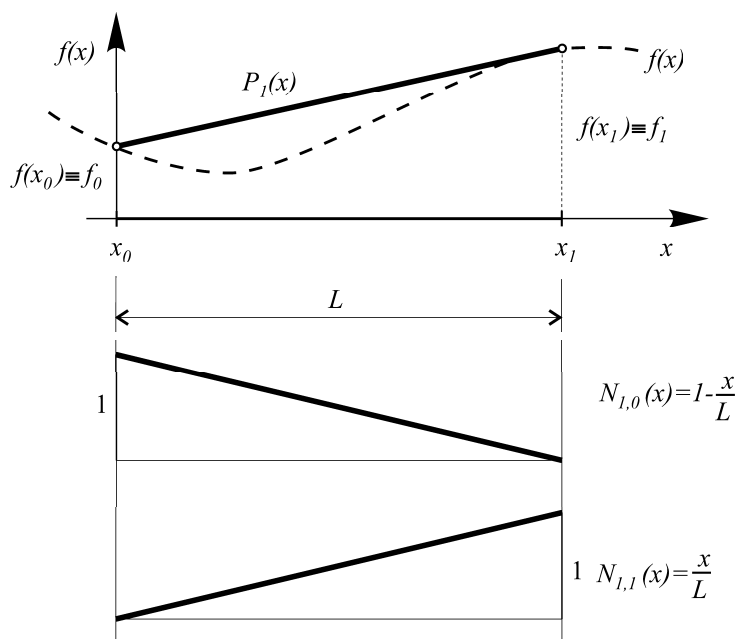
Powyższe funkcje spełniają warunki kompletności rzędu zerowego i rzędu pierwszego ponieważ

$$\sum_{k=0}^1 N_{1,k}(x) = 1 - \frac{x}{L} + \frac{x}{L} = 1$$

oraz

$$\sum_{k=0}^1 N_{1,k}(x)x_k = \left(1 - \frac{x}{L}\right)x_0 + \frac{x}{L}x_1 = 0 + x = x$$

Na rys. 4.6 pokazano wykresy liniowych funkcji bazowych Lagrange'a (4.27).



Rys.4.6. Liniowa interpolacja Lagrange'a

Przykład 4.5. Wyprowadzić wzór na kwadratowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a $P_2(x)$ ($n = 2$).

Dane: węzły interpolacji $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach: $\mathbf{F} = [f_0 \ f_1 \ f_2]^T$.

Wielomian interpolacyjny (4.22) jest w formie

$$P_2(x) = N_0(x)f_0 + N_1(x)f_1 + N_2(x)f_2 = \mathbf{N}(x)\mathbf{F} \quad (4.28)$$

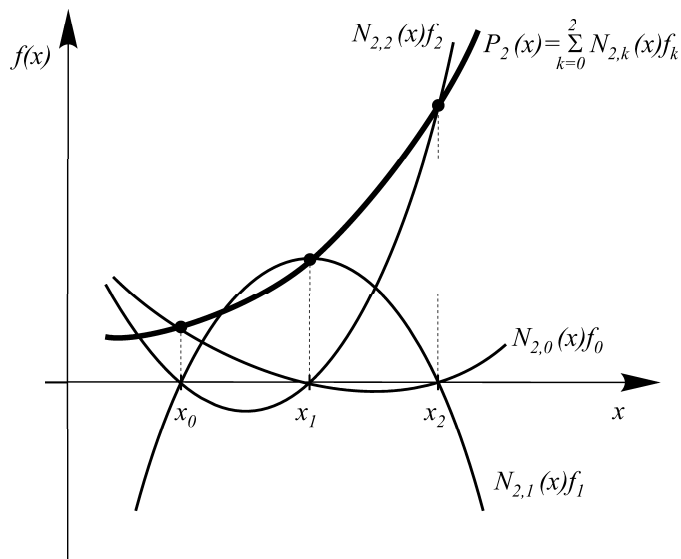
Funkcje bazowe $N_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ znowu można obliczyć z wzoru (4.23), co już jednak jest bardziej kłopotliwe (można potraktować to jako ćwiczenie), dlatego skorzystamy od razu z wzoru (4.24) otrzymując

$$N_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$N_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

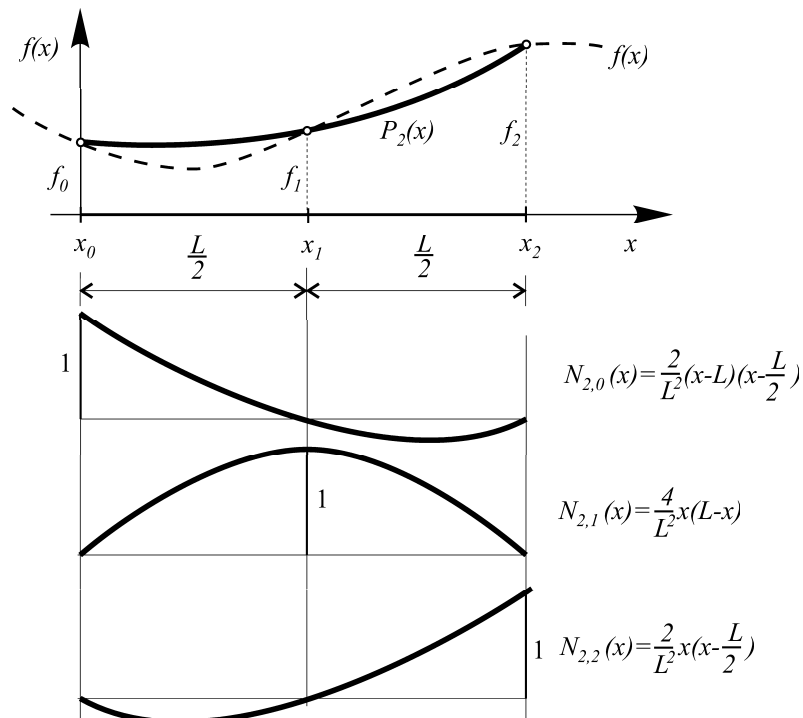
Na rys. 4.7 zilustrowano graficznie wzór (4.28).



Rys.4.7. Interpretacja graficzna kwadratowego wielomianu interpolacyjnego
Przyjmując $x_0 = 0$ oraz $x_1 = \frac{L}{2}$ i $x_2 = L$ dostaniemy

$$\begin{aligned} N_{2,0}(x) &= \frac{2}{L^2} (x - L) \left(x - \frac{L}{2}\right) \\ N_{2,1}(x) &= \frac{4}{L^2} x (L - x) \\ N_{2,2}(x) &= \frac{2}{L^2} x \left(x - \frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Na rys. 4.8 narysowano kwadratowe funkcje bazowe Lagrange'a (4.29).



Rys.4.8. Kwadratowa interpolacja Lagrange'a

Przykład 4.6. Wyprowadzić wzór interpolacyjny Lagrange'a stopnia drugiego przybliżający funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$, przyjmując węzły interpolacji $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$ i $x_2 = 4$.

Wykorzystując wzory z przykładu 4.5 obliczymy

$$N_{2,0}(x) = \frac{(x - 2,5)(x - 4)}{(2 - 2,5)(2 - 4)} = x^2 - 6,5x + 10$$

$$N_{2,1}(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2,5 - 2)(2,5 - 4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32)$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x - 2)(x - 2,5)}{(4 - 2)(4 - 2,5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4,5x + 5)$$

Wartości funkcji $f(x)$ w węzłach interpolacji wynoszą

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} = 0,5 \\ f_1 &\equiv f(x_1) = f(2,5) = \frac{1}{2,5} = 0,4 \\ f_2 &\equiv f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} = 0,25 \end{aligned}$$

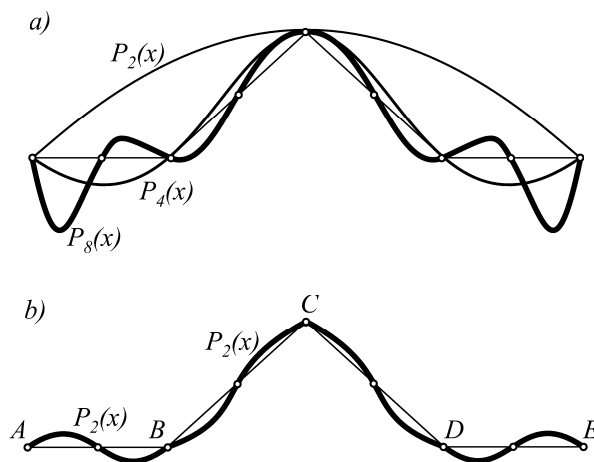
Wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia drugiego ma postać

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{k=0}^2 N_{2,k}(x) f(x_k) = (x^2 - 6,5x + 10) \cdot 0,5 + \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32) \cdot 0,4 + \\ &\quad + \frac{1}{3}(x^2 - 4,5x + 5) \cdot 0,25 = 0,05x^2 - 0,425x + 1,15 \end{aligned}$$

Dla przykładu, $P_2(3) = 0,325$, a $f(3) = \frac{1}{3} \cong 0,333$.

Z powyższego przykładu wynika, że obliczony wielomian interpolacyjny dobrze przybliża funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$. Nie zawsze jednak tak jest, co widzimy rozważając interpolację pokazaną na rys. 4.9a. Na rysunku tym funkcją interpolowaną jest prosta łamana A–B–C–D–E, a funkcjami interpolacyjnymi są wielomiany stopnia drugiego $P_2(x)$, czwartego $P_4(x)$ i ósmego $P_8(x)$. Jak widać, w przypadku wielomianu interpolacyjnego $P_8(x)$ jakość interpolacji w skrajnych przedziałach trudno uznać za zadowalającą: różnice pomiędzy $f(x)$ i $P_8(x)$ są duże. Ten efekt pogarszania się jakości interpolacji wielomianami wysokiego stopnia w skrajnych przedziałach znany jest jako tzw. *efekt Rungego*. Dlatego zazwyczaj interpolację funkcjami wielomianowymi ograniczamy do wielomianów niskiego stopnia. Pewnym wyjściem jest zastosowanie *interpolacji sklejaney*, która jest złożona przedziałami z wielomianów niskiego stopnia. Pokazano to na rys.4.9b, gdzie wielomian interpolacyjny jest złożony z czterech wielomianów stopnia drugiego. Taka idea interpolacji sklejaney jest wykorzystywana we współczesnych metodach komputerowych, na przykład w metodzie elementów skończonych, przedstawionej w rozdziale szóstym.

Innym problemem w stosowaniu interpolacji Lagrange'a jest to, że jest ona klasy C^0 , przez co rozumiemy, że w węzłach interpolacji spełniony jest tylko warunek zgodności wartości funkcji interpolowanej z funkcją interpolującą, natomiast nie ma ciągłości w węzłach przynajmniej pierwszych pochodnych (punkty B, C i D na 4.9b). Ten warunek spełnia interpolacja Hermita, opisana w p. 4.6.



Rys.4.9. a) efekt Rungego, b) interpolacja sklejana

4.5.2. Interpolacja Lagrange'a funkcji dwóch zmiennych

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji $f(x, y)$ obliczać będziemy podobnie jak to miało miejsce przy interpolacji funkcji jednej zmiennej, pamiętając jednakże, że obecnie funkcje i macierze funkcyjne zależą od dwóch zmiennych (x, y) . Przepisując wzór (4.22) mamy

$$P_n(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{F} \quad (4.30)$$

gdzie macierz funkcji bazowych Lagrange'a wyrażona jest wzorem

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{p}(x, y) (\mathbf{B}^T)^{-1} \quad (4.31)$$

Zastosowanie powyższych wzorów zilustrujemy dwoma przykładami interpolacji funkcji nad obszarem trójkątnym i prostokątnym.

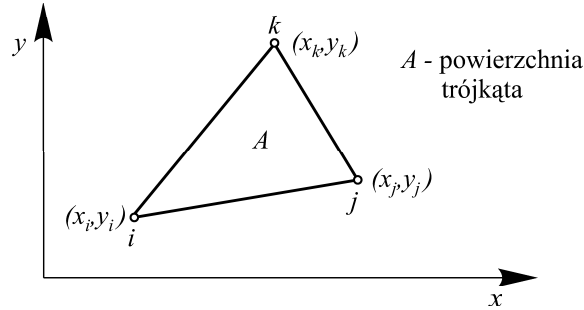
Przykład 4.7. Wyprowadzić wzór interpolacyjny Lagrange'a nad obszarem trójkątnym z trzema węzłami.

Dane: węzły interpolacji $\mathbf{x} = ((x_i, y_i) (x_j, y_j) (x_k, y_k))$,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:

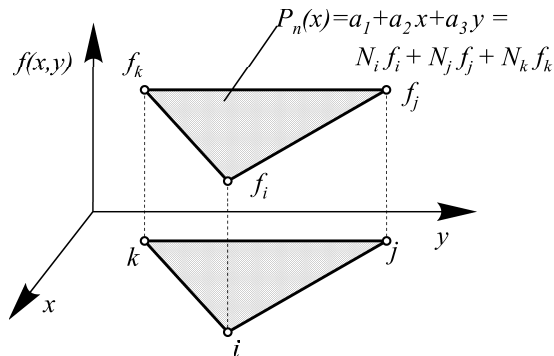
$$\mathbf{F} = [f(x_i, y_i) \equiv f_i \quad f(x_j, y_j) \equiv f_j \quad f(x_k, y_k) \equiv f_k]^T.$$

Na rys. 4.10 pokazano rozważany trójkąt z numeracją węzłów i współrzędnymi węzłów.



Rys.4.10. Obszar trójkątny z trzema węzłami

Interpolację funkcji możemy też wyrazić poprzez matematyczne stopnie swobody wykorzystując wzór (4.11) (dla $m = n$), co zostało pokazane na rys. 4.11. Należy zauważyć, że numeracja węzłów i, j, k jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara.



Rys.4.11. Interpolacja liniowa funkcji $f(x, y)$ nad obszarem trójkątnym

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów (4.30) i (4.31) napiszemy potrzebne wektory i macierze.

Macierz jednowierszowa jednomianów

$$\mathbf{p}(x, y) = [1 \ x \ y]$$

Macierz \mathbf{B}^T i jej odwrotność

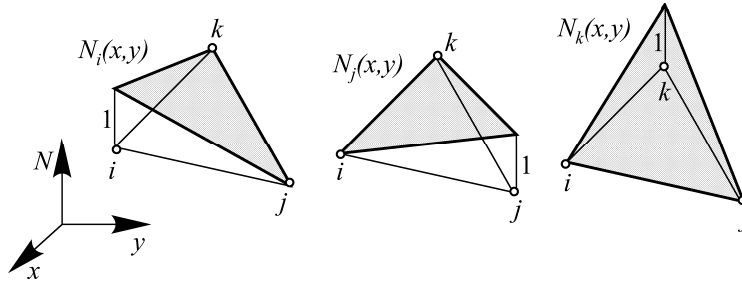
$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^T)^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

gdzie A jest powierzchnią trójkąta lub $2A$ jest wyznacznikiem macierzy \mathbf{B}^T . Znak wyznacznika się zmienia, jeśli węzły zostaną ponumerowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Funkcje bazowe Lagrange'a otrzymamy ze wzoru (4.31) (pomijając w dalszym ciągu pierwszy dolny indeks)

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{aligned} \quad (4.32)$$



Rys.4.12. Liniowe funkcje bazowe Lagrange'a nad obszarem trójkątnym

Funkcje te możemy również zapisać w zwartej postaci

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \quad \beta_i = y_j - y_k \quad \gamma_i = x_k - x_j \quad i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (4.33)$$

ze zmianą indeksów wg permutacji podstawowej $i \rightarrow j \rightarrow k$. Funkcje bazowe (4.32) spełniają oczywiście warunek kompletności $\sum_k^3 N_k(x, y) = 1$. Na rys. 4.12 pokazano wykresy funkcji bazowych (4.32).

Wzór interpolacyjny Lagrange'a przyjmuje formę

$$P_2(x, y) = N_i(x, y) f_i + N_j(x, y) f_j + N_k(x, y) f_k$$

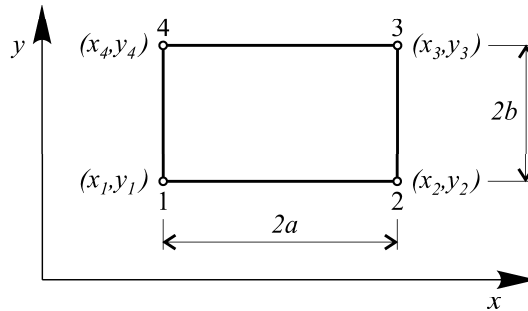
Przykład 4.8. Wyprowadzić funkcje bazowe Lagrange'a nad obszarem prostokątnym z czterema węzłami.

Dane: węzły interpolacji $\mathbf{x} = ((x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) (x_4, y_4))$,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:

$$\mathbf{F} = [f(x_1, y_1) \equiv f_1 \quad f(x_2, y_2) \equiv f_2 \quad f(x_3, y_3) \equiv f_3 \quad f(x_4, y_4) \equiv f_4]^T.$$

Rozważany obszar prostokątny jest pokazany na rys. 4.13.



Rys.4.13. Obszar prostokątny z czterema węzłami

Macierz jednowierszową jednomianów przyjmiemy w postaci

$$\mathbf{p}(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad xy]$$

Można byłoby zamiast bazowego elementu kwadratowego xy wybrać x^2 lub y^2 . Wybór xy jest jednak preferowany ponieważ implikuje to, że zależność funkcji interpolacyjnych od x i y jest podobna, tzn. że aproksymacja jest tego samego typu w tych kierunkach. Pomimo tego, że w macierzy $\mathbf{p}(x, y)$ występuje element kwadratowy xy to zmiana funkcji bazowych w kierunkach x i y (dla odpowiednio $y = const.$ i $x = const.$) jest liniowa. Z tego powodu taka interpolacja jest nazywana *interpolacją dwuliniową*.

Funkcje bazowe interpolacji można obliczyć w sposób analogiczny jak to miało miejsce w przykładzie 4.7. Łatwiej jednak jest skorzystać ze wzoru

(4.24). Rozważmy na przykład węzeł 1 na rys. 4.13. Funkcja bazowa Lagrange'a w kierunku x jest następująca

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

natomiast w kierunku y jest

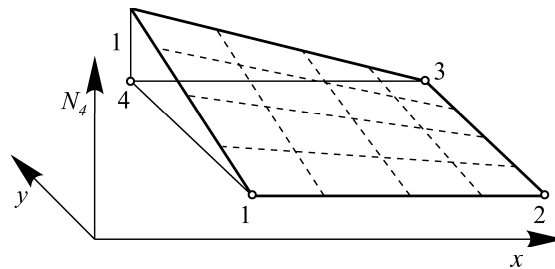
$$L_1(y) = \frac{y - y_4}{y_1 - y_4}$$

Funkcję bazową $N_1(x, y)$ obliczymy ze wzoru

$$N_1(x, y) = L_1(x) L_2(y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_4}{y_1 - y_4} = \frac{1}{4ab} (x - x_2)(y - y_4)$$

gdzie $2a = x_2 - x_1 = x_3 - x_4$ i $2b = y_4 - y_1 = y_3 - y_2$. Łatwo sprawdzić, że warunki interpolacji są spełnione: $N_1(x_1, y_1) = 1$ i $N_1(x_2, y_2) = N_1(x_3, y_3) = N_1(x_4, y_4) = 0$. Wyprowadzając w ten sposób pozostałe funkcje bazowe otrzymamy cztery funkcje bazowe Lagrange'a

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_2)(y - y_4) \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_1)(y - y_3) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_4)(y - y_2) \\ N_4(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_3)(y - y_1) \end{aligned} \tag{4.34}$$



Rys.4.14. Dwuliniowa funkcja bazowa Lagrange'a $N_4(x, y)$ nad obszarem prostokątnym

Na rys. 4.14 pokazano przykładowo wykres funkcji $N_4(x, y)$. Funkcja zmienia się liniowo dla linii równoległych do osi układu współrzędnych. Obecność członu xy w $\mathbf{p}(x, y)$ oznacza, że w każdym innym kierunku zmiana funkcji jest już nieliniowa.

Budowa funkcji bazowych Lagrange'a w obszarze dwuwymiarowym jest zadaniem trudnym, wymagającym dużego doświadczenia. Pomijając fakt, że obszar w którym dokonujemy interpolacji może mieć złożoną geometrię, istotnym jest wybór odpowiedniej macierzy $\mathbf{p}(x, y)$. Korzysta się w tym przypadku z *trójkąta Pascala*, w którym jednomiany są ułożone w sposób systematyczny, rys. 4.15. Dla interpolacji jednowymiarowej trójkąt Pascala degeneruje się do

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & x & & y \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Rys.4.15. Trójkąt Pascala

$1, x, x^2, x^3, \dots$. Jeśli w macierzy $\mathbf{p}(x, y)$ zawarte są wszystkie czony określonego rzędu (z jednej linii trójkąta Pascala) to otrzymujemy w efekcie *kompletny wielomian* interpolacji. Często, z przyczyn uzasadnionych, konstruuje się wielomiany niekompletne. Nie wchodząc w szczegóły powiemy tylko, że uzasadnioną przyczyną jest brak poprawy zbieżności interpolacji przy zwiększaniu stopnia wielomianu. Wówczas pomijamy te czony, które są tego przyczyną (tzw. czony pasożytnicze).

4.6. Interpolacja Hermite'a

W zastosowaniach praktycznych, w których operuje się zbiorami o dużej liczbie punktów węzłowych, interpolacja Lagrange'a z konieczności musi być stosowana w wersji sklejanej bowiem, jak już o tym mówiliśmy, tylko w ten sposób można uniknąć stosowania wielomianów interpolacyjnych zbyt wysokiego stopnia. Tak sklejona interpolacja nie zawsze jednak może sprostać

wymaganiom zastosowań, głównie z powodu występowania nieciągłości funkcji interpolacyjnej $P_n(x)$, będących konsekwencją dokonanych „sklejeń”. Tymczasem, wymagania dotyczące ciągłości nie tylko samej funkcji $f(x)$ lecz także jej pochodnych do danego rzędu m włącznie pojawiają się bardzo często i bywają bardzo istotne. Powstaje więc uzasadniona potrzeba odpowiedniego uogólnienia koncepcji interpolacji Lagrange'a. Takie uogólnione wielomiany mają tę własność, że dla danych $n + 1$ punktów węzłowych x_0, x_1, \dots, x_n i nieujemnych liczb całkowitych m_0, m_1, \dots, m_n , wielomianem aproksymującym funkcję $f(x) \in C^m[a, b]$, gdzie $m = \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$ i $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, jest wielomian stopnia co najwyżej

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + n$$

z własnością, że w każdym punkcie węzłowym x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, funkcja ta i jej wszystkie pochodne rzędu mniejszego lub równego m_i , $i = 0, 1, \dots, n$ są równe funkcji $f(x)$ i jej odpowiednim pochodnym. Stopień M wielomianu wynika stąd, że liczba warunków, które muszą być spełnione wynosi $\sum_{i=0}^n m_i + (n + 1)$ i właśnie wielomian stopnia M ma $M + 1$ współczynników. Powyższe stwierdzenia podsumujemy w definicji.

Definicja 3. Niech x_0, x_1, \dots, x_n jest zbiorem $n + 1$ punktów węzłowych w przedziale $[a, b]$ i m_i są nieujemnymi liczbami całkowitymi związanymi z punktami x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, oraz

$$m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i \quad \text{i} \quad f(x) \in C^m[a, b]$$

Wielomianem uogólnionym, aproksymującym funkcję $f(x)$ jest wielomianem $P(x)$ co najmniej takiego stopnia, że

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}$$

dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, n$ i $k = 0, 1, \dots, m_i$.

Zauważmy, że jeśli $n = 0$ to wielomian uogólniony jest wielomianem Taylora stopnia m_0 dla $f(x)$ w punkcie x_0 . Jeśli $m_i = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, to wielomian uogólniony jest wielomianem interpolacyjnym $f(x)$ w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , tzn. jest wielomianem Lagrange'a.

Wielomian uogólniony nazywa się *wielomianem Hermite'a* jeśli $m_i = 1$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, n$. Taki wielomian ma tę własność, że w punktach węzłowych x_0, x_1, \dots, x_n wartości funkcji $f(x)$ i $P(x)$ i ich pierwszych pochodnych są sobie równe.

Postać wielomianu Hermite'a jest określona dokładniej przez poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Jeśli $f \in C^1[a, b]$ i $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ są izolowanymi punktami węzłowymi, to wielomianem Hermite'a, co najmniej stopnia zapewniającego jego zgodność z funkcją f i jej pochodną f' , jest wielomian stopnia co najwyżej $2n + 1$ określony wzorem

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x) \quad (4.35)$$

gdzie funkcje bazowe interpolacji są równe

$$\begin{aligned} H_{n,j}(x) &= \left[1 - 2(x - x_j) N'_{n,j}(x_j) \right] N_{n,j}^2(x) \\ \hat{H}_{n,j}(x) &= (x - x_j) N_{n,j}^2(x) \end{aligned}$$

W powyższym twierdzeniu $N_{n,j}$ oznacza funkcję bazową Lagrange'a stopnia n dla punktu węzłowego x_j oraz $(\bullet)' \equiv \frac{d}{dx}(\bullet)$.

Dodatkowo, jeśli $f \in C^{2n+2}[a, b]$ to błąd interpolacji Hermite'a wynosi

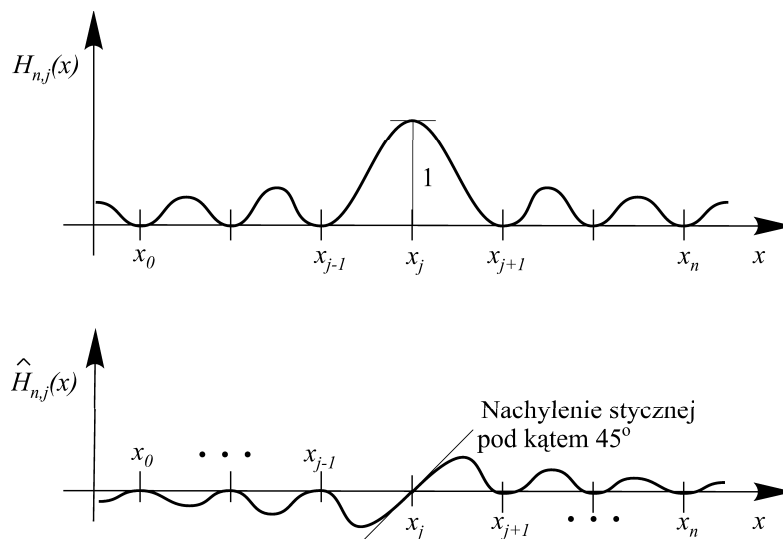
$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)) \quad (4.36)$$

gdzie $\xi \in (a, b)$.

W dowodzie twierdzenia, którego nie będziemy przytaczać, wykazuje się, że funkcje $H_{n,j}$ i $\hat{H}_{n,j}$ spełniają warunki

$$\begin{aligned} H_{n,j}(x_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} & \frac{d}{dx} H_{n,j}(x_k) &= 0 \quad \text{dla każdego } k \\ \hat{H}_{n,j}(x_k) &= 0 \quad \text{dla każdego } k & \frac{d}{dx} \hat{H}_{n,j}(x_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \end{aligned}$$

co jest zilustrowane na rys. 4.16.



Rys.4.16. Funkcje bazowe interpolacji Hermite'a

Przykład 4.9. Wyprowadzić wzór interpolacyjny Hermite'a dla dwóch punktów węzłowych.

Dane: węzły interpolacji (x_0, x_1)

wartości funkcji f w węzłach: $(f(x_0) \equiv f_0, f(x_1) \equiv f_1)$

wartości pochodnych funkcji f w węzłach: $(f'(x_0) \equiv f'_0, f'(x_1) \equiv f'_1)$

Wielomian interpolacyjny jest stopnia $2n + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ i ma postać

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 H_{1,j}(x) f_j + \sum_{j=0}^1 \hat{H}_{1,j}(x) f'_j$$

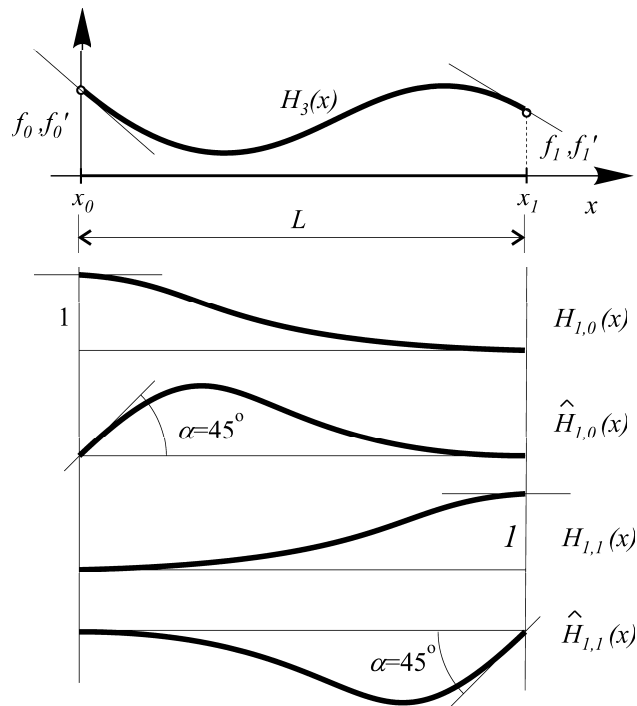
Funkcje bazowe wyznaczymy obliczając kolejno

$$N_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad N'_{1,0}(x) = \frac{1}{x_0 - x_1}$$

$$H_{1,0}(x) = \left[1 - 2(x - x_0) \frac{1}{x_0 - x_1} \right] \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 = (2\xi + 1)(\xi - 1)^2$$

gdzie oznaczono $\xi = (x - x_0)/L$, $L = x_1 - x_0$

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{1,0}(x) &= (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 = L \xi (\xi - 1)^2 \\ N_{1,1}(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad N'_{1,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \\ H_{1,1}(x) &= \left[1 - 2(x - x_1) \frac{1}{x_1 - x_0} \right] \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 = \xi^2 (3 - 2\xi) \\ \widehat{H}_{1,1}(x) &= (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 = L \xi^2 (\xi - 1)\end{aligned}$$



Rys.4.17. Funkcje bazowe interpolacji Hermite'a

Przyjmując $x_0 = 0$ mamy $L = x_1$ i wzory na funkcje bazowe interpolacji Hermite'a są w postaci

$$\begin{aligned}
 H_{1,0}(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & \widehat{H}_{1,0}(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
 H_{1,1}(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & \widehat{H}_{1,1}(x) &= x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Na rys. 4.17 pokazano wykresy tych funkcji.

Przykład 4.10. Obliczyć wzorem interpolacyjnym Hermite'a $f(1,5)$ dla danych z tabeli 4.3.

W tym przykładzie $n = 2$ i wielomian interpolacyjny jest stopnia $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ wyrażony wzorem

$$H_5(x) = \sum_{j=0}^2 H_{2,j}(x) f_j + \sum_{j=0}^2 \widehat{H}_{2,j}(x) f'_j$$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,3	0,620	-0,522
1	1,6	0,455	-0,570
2	1,9	0,282	-0,581

Tabela 4.3. Dane do przykładu 4.10

Obliczamy kolejno

$$\begin{aligned}
 N_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \\
 N'_{2,0}(x) &= \frac{100}{9}x - \frac{175}{9} \\
 N_{2,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \\
 N'_{2,1}(x) &= -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}
 \end{aligned}$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}$$

$$N'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

$$H_{2,0}(x) = \left[1 - 2(x-1,3) \cdot (-5)\right] \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2 = \\ (10x-12) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1 \cdot \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10 \cdot (2-x) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1,3) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1,6) \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1,9) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$H_5(x) = 0,620H_{2,0}(x) + 0,455H_{2,1}(x) + 0,282H_{2,2}(x) - 0,522\hat{H}_{2,0}(x) - \\ 0,570\hat{H}_{2,1}(x) - 0,581\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$H_5(1,5) = 0,620 \cdot \left(\frac{4}{27}\right) + 0,455 \cdot \left(\frac{64}{81}\right) + 0,282 \cdot \left(\frac{5}{81}\right) - 0,522 \cdot \left(\frac{4}{405}\right) - \\ 0,570 \cdot \left(-\frac{32}{405}\right) - 0,581 \cdot \left(-\frac{2}{405}\right) = 0,512$$

Interpolację Hermite'a można też stosować w wersji sklejanej. Funkcje interpolacyjne mogą być w ogólności sklejane z wielomianów różnych stopni w podprzedziałach na jakie podzielimy przedział $[a, b]$ będący dziedziną funkcji $f(x)$. Szczegóły takiej interpolacji funkcjami sklejonymi (ang. *spline interpolation functions*) można znaleźć w podręcznikach z metod numerycznych.