POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

Wprowadzenie do programu SMath Studio Desktop

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA, INŻYNIERII ŚRODOWISKA I ARCHITEKTURY POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Karol Pereta

Wiesław Bielak

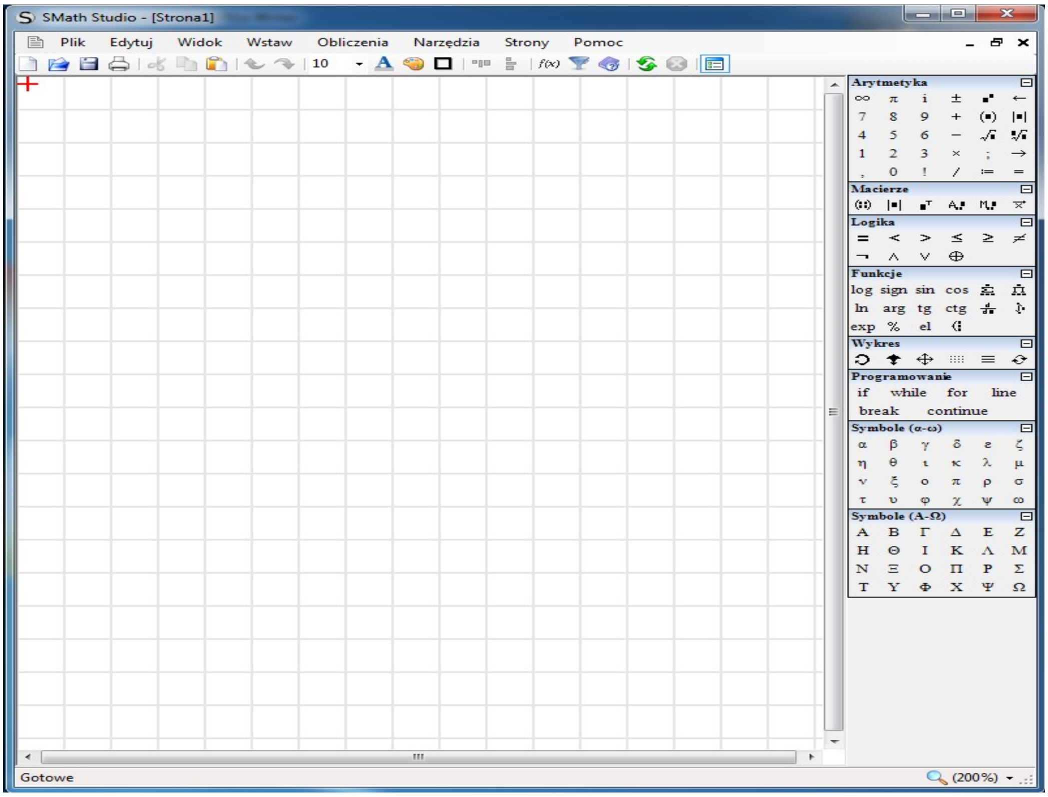
Grzegorz Piątkowski

Marzec 2016 r.

1. SMath Studio – środowisko pracy

SMath Studio jest darmowym programem wspomagającym obliczenia matematyczne. Jest dobrą alternatywą dla komercyjnego oprogramowania firmy MathSoft znanego pod nazwą Mathcad.

Okno dialogowe programu odzwierciedla kratkowaną kartę z zeszytu formatu A4 (Rys. 1). Wyrażenia zapisane w SMath Studio są zdecydowanie czytelniejsze od tych samych wyrażeń zapisanych w arkuszu kalkulacyjnym. Podobnie jak w arkuszu kalkulacyjnym zmiana danych wejściowych, powoduje automatyczne przeliczenie dalszych części arkusza obliczeniowego, wykorzystujących powyższe dane i wyświetlenie aktualnego wyniku (musi być włączona opcja z menu: **Obliczenia → Autoobliczenia**). Program pozwala wykonywać obliczenia zarówno numeryczne jak i symboliczne (niestety w przypadku tych drugich program ma bardzo ograniczone możliwości), wyniki możemy przedstawiać w formie wielorakich wykresów. Dokument programu SMath Studio pozwala także na tworzenie opisów (dla wyrażeń i zmiennych) dzięki czemu program jeszcze bardziej przypomina zwykłą kartkę papieru.



Rys. 1. Okno programu SMath Studio

Z prawej strony okna (Rys. 1) widoczne są paski narzędzi służące do wprowadzania różnego rodzaju znaków: arytmetycznych, macierzy, znaków logicznych, funkcji, wykresów, programowania oraz symboli greckich.

Wszystkie funkcje można odszukać w *Menu głównym* lub na jednym z pasku narzędziowym, dodatkowo większość najczęściej wykorzystywanych funkcji można wywołać za pomocą skrótów klawiszowych.

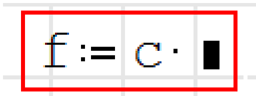
Wszystkie elementy wprowadzane do dokumentu nazywać będziemy **regionami**. Każdy z regionów zajmuje pewien minimalny dla niego obszar dokumentu. W zależności od charakteru wprowadzonego elementu rozróżniamy:

- regiony równań – zawierają definicję zmiennych, równania oraz wyrażenia algebraiczne,
- regiony tekstu – będące komentarzem w dokumencie,

- regiony wykresów – zawierają dwu- i trójwymiarowe wykresy,
- regiony graficzne – zawierają rysunki różnych formatów.

Każdy z regionów w dokumencie można swobodnie przesuwać, kopiować lub kasować w celu uzyskania pożądanej postaci dokumentu. Edycję regionu najwygodniej dokonujemy myszką. Naciskając LPM spowodujemy pojawienie się w tym obszarze pionowej kreski, która określa **punkt wstawienia.** Wewnątrz regionu możemy poruszać się za pomocą klawiszy nawigacji [←], [↑], [→], [↓], [*Home*], [*End*]. Klawisz spacja służy do zmiany zakresu edycji regionu.

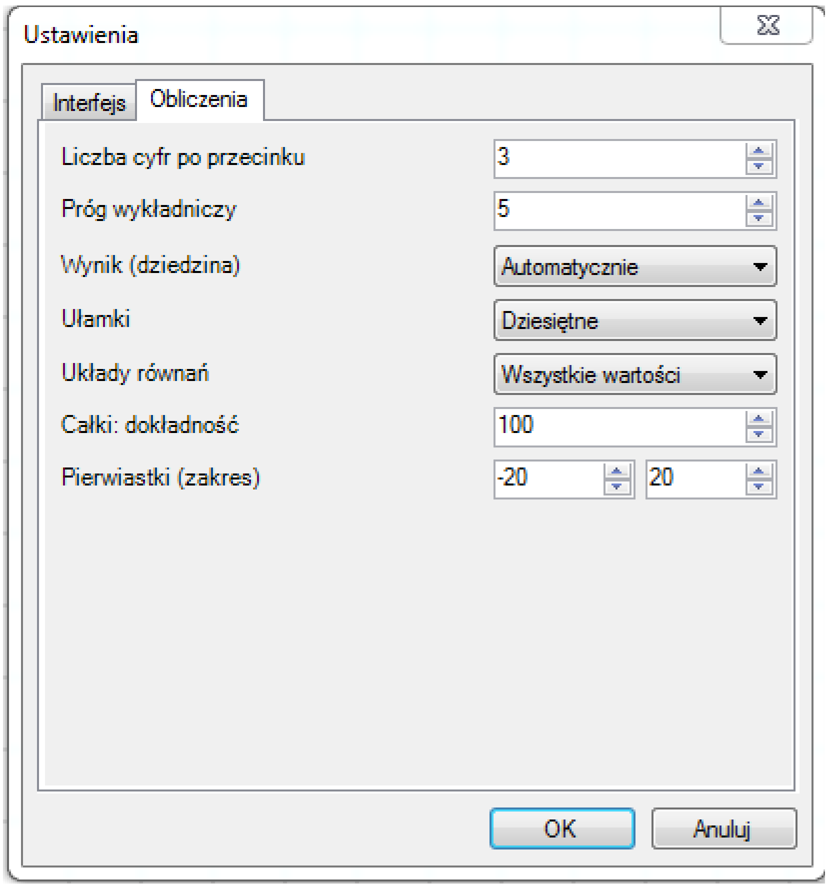
Program interpretuje wprowadzane regiony w naturalnym porządku zapisu, tj. z góry na dół. Cecha ta wymusza zdefiniowanie zmiennej użytej w równaniu powyżej regionu z równaniem. W programie we wszystkich niedokończonych definicjach zmiennych, równań czy na wykresach pojawia się **ramka braku** (Rys. 2) w postaci czerwonej ramki wokół regionu zmiennej. Aby zmienna była zdefiniowana, należy poprawnie uzupełnić wszystkie puste pola w regionie.



Rys. 2. Znacznik braku

2. Obliczanie wartości zmiennych

Przy obliczaniu wyrażeń matematycznych wpisujemy w regionie treść interesującego nas wyrażenia. Domyślnym separatorem dziesiętnym w programie SMath Studio jest przecinek. Dokładność i forma wyświetlanych wyników może być modyfikowana w *Menu Narzędzia →Ustawienia* widoczne na Rys. 3.



Rys. 3. Modyfikowanie wyświetlania wyników

$$\sqrt[3]{\frac{2,113 \cdot 10^{4}}{331+3^{6}}}$$

Rys. 4. Obliczenie wartości pierwiastka

Aby obliczyć w SMath Studio wartość pierwiastka przedstawionego na Rys. 4. należy wykonać następujące czynności:

1. Z paska narzędzi *Arytmetyka* wybrać pierwiastek n-stopnia
2. Wprowadzić z klawiatury 2,113*10^4 a następnie wcisnąć spację do momentu widocznego na Rys. 5.

$$2,113 \cdot 10^{4}$$

Rys. 5. Licznik przyszłego ułamka

3. Wstawić kreskę ułamkową klawiszem[/]
4. Napisać z klawiatury 331+3^6
5. LPM wskazać stopień pierwiastka i wpisać 3
6. Ostatnim krokiem jest wciśnięcie znaku równości [=]

Przy pomocy skrótów klawiszowych można znacznie przyspieszyć wprowadzanie równań. Poniżej zebrane zostały podstawowe skróty klawiszowe i operatory:

[Ctrl] + [=]	Równe w sensie logicznym	**Wprowadzamy [a] następnie [shift]**	Wartość bezwzględna
[Ctrl] + [9]	Mniejsze lub równe	**[Ctrl] + [Shift] + [P]**	Liczba Pi
[Ctrl] + [.]	Symbolicznie równa się	**[Ctrl] + [3]**	Różne od (lewa strona nie równa prawej)
[Ctrl] + [6]	Indeks górny	**[Ctrl] + [0]**	Większe lub równe
[.]	Tekstowy indeks dolny	**Wpisujemy int**	Całka oznaczona
[Ctrl] + [1]	Transponowanie	**Wpisujemy sum a następnie [TAB]**	Suma wyrażeń
[Ctrl] + [\ ]	n-ty pierwiastek	**[\ ]**	Iloczyn wyrażeń
[Ctrl] + [Z]	nieskończoność	**[^]**	Do potęgi

Ćwiczenie 2.1: Obliczyć wartości następujących wyrażeń i porównać ich wyniki.

1.	$\sqrt[5]{\frac{123^{4}+3!}{10\cdot\pi+4^{6}}}$	**8,888**
2.	$\int_{0}^{2\cdot\pi}\frac{2\cdot x\cdot\lvert\sin(x)\rvert}{4\cdot\pi+x^{2}}\,dx$	**0,928**
3.	$\ln\left(\sqrt{\frac{76}{23+5^{4}}}+100\right)=4,609$	**4,609**
4.	$\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{5\cdot n+5^{n}}{(n+1)!}\right)$	**26,417**

3. Obliczenia symboliczne

W omawianym programie można wykonywać obliczenia symboliczne tj. przekształcenia i obliczenia na wzorach bez podstawiania wartości numerycznych. Można obliczać pochodne oraz różnego typu równania. Żeby otrzymać rozwiązanie, wynik obliczenia należy zastosować symbol [→] z belki *Arytmetyka* lub nacisnąć [Ctrl] + [.].

Aby obliczyć pochodną należy postępować wg poniższych punktów:

1. Do obliczania pochodnej pierwszego rzędu należy wpisać polecenie *diff*, a następnie zatwierdzić klawiszem [TAB]
   - Do obliczania pochodnej pierwszego rzędu można również wybrać symbol pochodnej z belki *Funkcje* $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$.
2. Do obliczenia pochodnych wyższych rzędów należy wpisać polecenie *diff* wcisnąć strzałkę w dół wybierając funkcję *diff(3)*, a następnie zatwierdzić wybórw klawiszem [TAB]
3. Wpisać funkcję
4. Uzupełnić różniczkę
5. Wstawić symbol [→] z belki *Arytmetyka* lub alternatywnie [Ctrl] + [.]

Przykład obliczeń symbolicznych pochodnej funkcji x^3 przedstawiono na Rys. 6.

$$\frac{d^{2}}{dx^{2}}\left(x^{3}\right)=6\cdot x$$

Rys. 6. Obliczenie pochodnych

Ćwiczenie 3.1: Obliczyć wartości następujących wyrażeń i porównać wyniki.

Nr	Wyrażenie	Wynik
1.	$\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\cdot x^{2}\right)$	$x\cdot(1+2\cdot\ln(x))$

2.	$\frac{d^2}{dx^2}\left(tg(x)+x^5\right)$	$\frac{2\cdot\left(5\cdot x^3\cdot\cos(x)^2\cdot(2\cdot\cos(x)-x\cdot\sin(x))+\sin(x)\cdot\left(1+5\cdot x^4\cdot\cos(x)^2\right)\right)}{\cos(x)^3}$
3.	$\frac{d}{dx}\left(x^5+2\cdot x^4\right)$	$x^3\cdot(x+4\cdot(2+x))$

4. Definiowanie zmiennych i funkcji

W SMath Studio w obliczeniach szczególnie wygodne jest stosowanie zmiennych (Rys. 7). Definicja zmiennej polega na przypisaniu konkretnej wartości liczbowej lub innych zmiennych w postaci wyrażenia.

$$a := 15$$

$$b := 25$$

$$c := a + b$$

Rys. 7. Definicja zmiennych

W programie są rozróżniane wielkości liter, dlatego też zmienne o nazwach *aaa* oraz *Aaa* dla programu są dwiema różnymi zmiennymi. Bardzo wygodną formą zapisywania zmiennych jest stosowanie indeksów dolnych (Rys. 8). Zapisu indeksu dolnego dokonujemy po zastosowaniu [.] (kropki).

$$w_{max} := 441$$

Rys. 8. Nazwa zmiennej z indeksem

Nazwy zmiennych oraz funkcji nie mogą rozpoczynać się cyfrą. W nazwach zmiennych swobodnie można stosować indeksy dolne, natomiast stosowanie indeksów górnych powinno być zarezerwowane dla wykładników potęg lub innych operatorów. Stosowanie greckich liter alfabetu umożliwia pasek o nazwie *Symbole*. Oprócz zmiennych, którym przypisana jest jedna wartość liczbowa można definiować zmienne zakresowe. Zmienna zakresowa definiowana jest jako ciąg arytmetyczny. W definicji zmiennej zakresowej należy podać następujące parametry:

1. Wartość początkową ciągu
2. Skok wartości zmiennej jeżeli chcemy aby była to wartość inna niż 1 (jeżeli chcemy, aby zmienna zmieniała swoją wartość o 2, to w drugim polu musimy podać wartość o dwa większą od początkowej)
3. Wartość końcową

Na Rys. 9 przedstawiono dwa warianty definiowania zmiennej zakresowej. Zmienna definiowana jest za pomocą polecenia **range.** Do wyboru są dwie grupy tej funkcji: **range (2)** – zmienna zakresowa ze skokiem co 1, **range (3)** – zmienna zakresowa, w której wartość skoku możemy zdefiniować.

$$z := 1 \,..\, 4 \qquad x := 1 ; 4 \,..\, 10$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Rys. 9. Zmienne zakresowe

SMath Studio umożliwia definiowanie funkcji dostępnych w pasku narzędzi, widniejących pod znakiem *f(x)*. Program umożliwia definicje własnych funkcji (Rys. 10), także w tym celu należy:

1. Wpisać nazwę funkcji
2. Określić argument (gdy funkcja ma więcej argumentów rozdzielamy ją znakiem [;])
3. Wpisać znak przypisania [Shift] + [;]
4. Wpisać równanie funkcyjne.

$$f_1(x) := \ln\left(x^3 + 3\right) \qquad g_1(x ; y) := \ln\left(x^2 + y\right)$$

Rys. 10. Definicja funkcji

Aby obliczyć wartość funkcji dla konkretnych wartości argumentów należy powyżej definicji podać wartości tych argumentów. Wartości te podajemy jako zmienne o nazwach argumentów. Można też wstawić bezpośrednio wartości jako argumenty do funkcji (Rys. 11).

$$x := 2 \qquad y := 3$$

$$g_1(x ; y) := \ln\left(x^2 + y\right)$$

$$g_1(x ; y) = 1{,}946 \qquad g_1(5 ; 4) = 3{,}367$$

Rys. 11. Wartości funkcji g_1

Wartość funkcji można również wyznaczyć dla zmiennych zakresowych (Rys. 12).

$$r := 1..10 \qquad W(r) := 2\cdot\pi\cdot r$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad W(r) = \begin{pmatrix} 6,283 \\ 12,566 \\ 18,85 \\ 25,133 \\ 31,416 \\ 37,699 \\ 43,982 \\ 50,265 \\ 56,549 \\ 62,832 \end{pmatrix}$$

Rys. 12. Wartość funkcji dla zmiennej zakresowej

Ćwiczenie 4.1 Zdefiniować zmienne i obliczyć wartość wyrażenia:

$$alfa := 12 \qquad \beta_1 := \sqrt{3} \qquad w_{min} := 65 \qquad \frac{alfa\cdot\beta_1}{w_{min}}$$

Ćwiczenie 4.2 Zdefiniować zmienne, obliczyć wartości wyrażeń oraz wyświetlić i porównać wyniki:

$$z_{dop} := 1..6 \qquad \varphi_2 := 11;22..66 \qquad z_{dop}\cdot\varphi_2 \qquad \varphi_2\cdot z_{dop}$$

$$\varphi_2 + z_{dop} \qquad z_{dop} + \varphi_2$$

5. Obliczenia na jednostkach

Program umożliwia nadawanie wartościom niemianowanym sensu fizycznego przez dodanie im standardowych jednostek. Wyniki działań na zmiennych z jednostkami podawany jest przez program w postaci wartości z jednostką. Jednostkę wyniku możemy ustalić dowolnie. Możemy także stosować własne, zdefiniowane wcześniej jednostki.

Do obliczeń warto stosować nazwy zmiennych, które są ogólnie przyjęte przy danym zagadnieniu. Definicja zmiennej M będącej celem obliczeń przedstawiona została na Rys. 13.

$$a := 10\ m$$

$$P := 1000\ N$$

$$M := P \cdot a$$

$$M = 10000\ J$$

Rys. 13. Definicja zmiennych mianowanych, wynik mianowany

Wyświetlenie wyniku obliczeń, czyli wartości obliczonej zmiennej M, został przedstawiony w podstawowej jednostce (dla przyjętego systemu jednostek) – w naszym przypadku są to **[J = Dżule]** – podstawowa dla systemu **SI** jednostka energii. Czarne pole za literą **[J]** służy do wprowadzenia innej jednostki – wbudowanej lub zdefiniowanej przez użytkownika. Po wciśnięciu znaku równości obliczenia zostaną przeprowadzone automatycznie. Aby zmienić jednostkę należy kliknąć w czarnym polu i z klawiatury wpisać *N*, zatwierdzić klawiszem **[TAB]** następnie wprowadzić [*], wybrać z klawiatury *m* a następnie zatwierdzić klawiszem **[TAB]**. Ostatnim krokiem jest zatwierdzenie całości przyciskiem [**ENTER]** (Rys. 14). Dla nazw jednostek można stosować przedrostki jako mnożniki zmniejszające (litery: *d*, *c*, *i* i inne) lub zwiększające (litery: *h*, *k*, *M* i inne). Na Rys. 15 przedstawiono przykład zastosowania przedrostka zwiększającego *k* równego 1000.

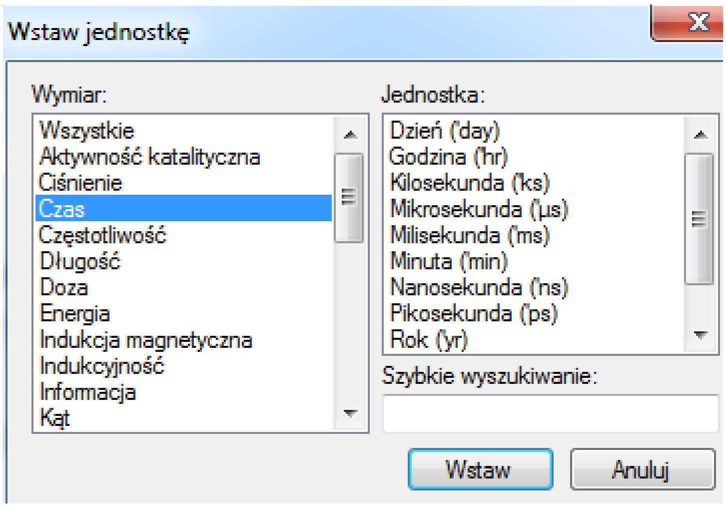
$$M = 10000\ N\ m$$

Rys. 14. Wynik ze zmienioną jednostką

$$M = 10\ kN\ m$$

Rys. 15. Wynik z jednostką poprzedzoną przedrostkiem

Jeżeli użytkownikowi nie jest znana jednostka wbudowana, to może on posłużyć się poleceniem Wstaw→Jednostki. Doskonałym przykładem może być jednostka czasu: **[godzina]**, którą w programie SMath Studio zapisuje się jako **[hr]** (Rys. 16).



Rys. 16.Okno służące do wyboru wbudowanych jednostek

Przy korzystaniu z jednostek należy pamiętać o stosowaniu jednostek zmiennych we wzorach, zwłaszcza przy operacjach addytywnych. Program w przypadku niezgodności informuje nas o błędzie przy próbie wyświetlenia wartości zmiennej (Rys. 17).

$$a := 10\ m$$

$$P := 1000\ N$$

$$M := P + a$$

$$\boxed{M = \blacksquare}$$

Jednostki nie pasują.

Rys. 17. Niezgodność jednostek sygnalizowana przez program

Przy wprowadzaniu argumentów funkcji trygonometrycznych program interpretuje wpisane przez nas wartości liczbowe jako podane w mierze radialnej. Wartości dla miar stopniowych uzyskujemy podając miarę kąta z jednostką stopnie (z ang. *deg*), (Rys. 18).

$$\mathrm{tg}(45\ deg)$$

Rys. 18. Jednostki w funkcjach trygonometrycznych

ĆWICZENIE 5.1: Zdefiniować własną jednostkę jak na przykład [MPa].

ĆWICZENIE 5.2: Przeliczyć prędkość auta wynoszącą 90km/h na jednostki używane w USA czyli mila/h – zastosować wbudowane jednostki.

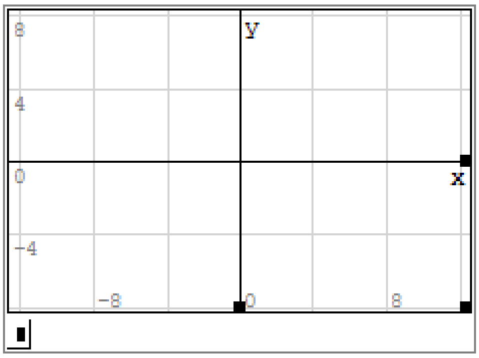
ĆWICZENIE 5.3: Obliczyć moment zginający w środku rozpiętości belki wolno podpartej obciążonej ciężarem własnym z wykorzystaniem jednostek.

ĆWICZENIE 5.4: Obliczyć energię potencjalną ciała sztywnego o konkretnej masie na znanej wysokości.

ĆWICZENIE 5.5: Obliczyć siłę wyporu na ciało zanurzone w cieczy.

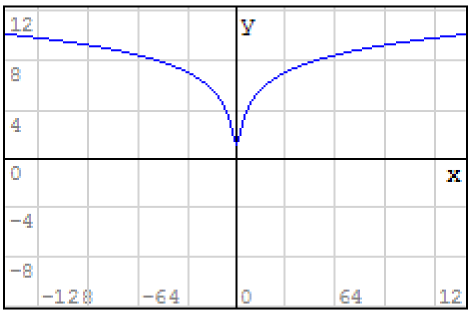
6. Wstawianie i formatowanie wykresów

Oprócz obliczeń numerycznych i symbolicznych program umożliwia użytkownikowi graficzną prezentację wyników w postaci wykresów. W programie można wykorzystać dwa rodzaje wykresów – 2D i 3D. Przed uruchomieniem kreatora wykresów poleceniem z paska narzędzi, (*Wstaw→Wykres)* należy zdefiniować funkcje, której wykres chcemy obejrzeć. Dobrze jest też zdefiniować zakres argumentów funkcji chociaż nie jest to konieczne. Po wstawieniu obszaru wykresu należy w aktywnym polu wpisać nazwę funkcji (Rys. 19).



$$x := -100 ; -90 .. 100$$

$$F(x) := \ln\left(x^2 + 3\right)$$



F(x)

Rys. 19. Tworzenie wykresu funkcji

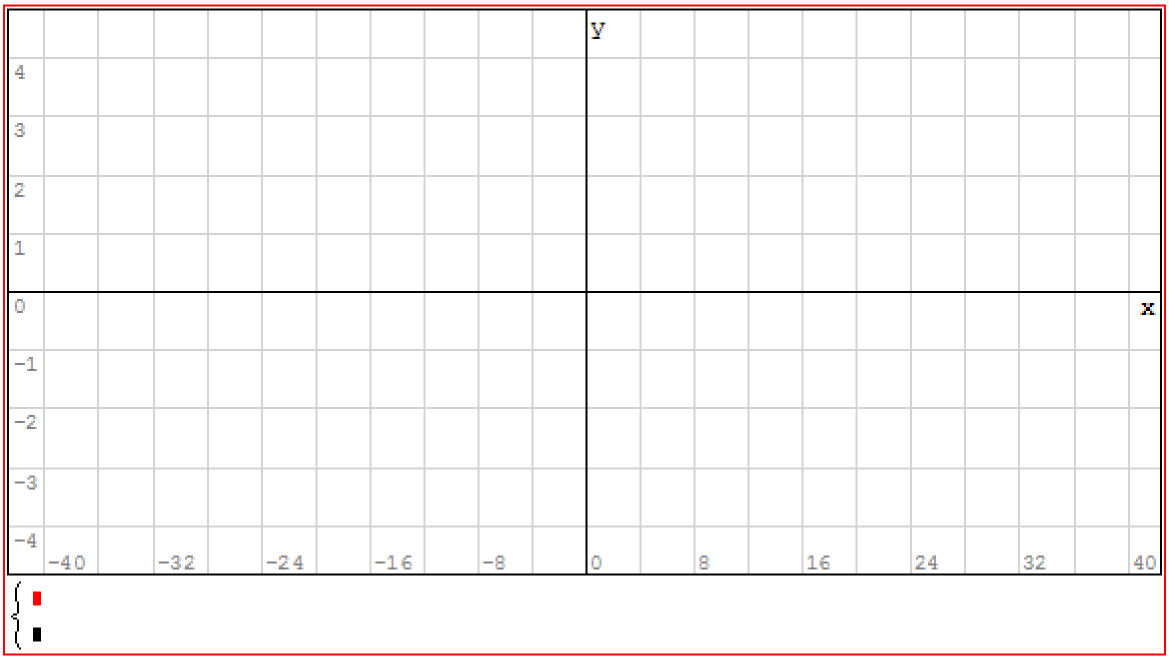
W przypadku programu SMath Studio zmiana zakresu osi jest możliwa za pomocą klawisza [Ctrl] lub [Shift] z pomocą [scroll'a].

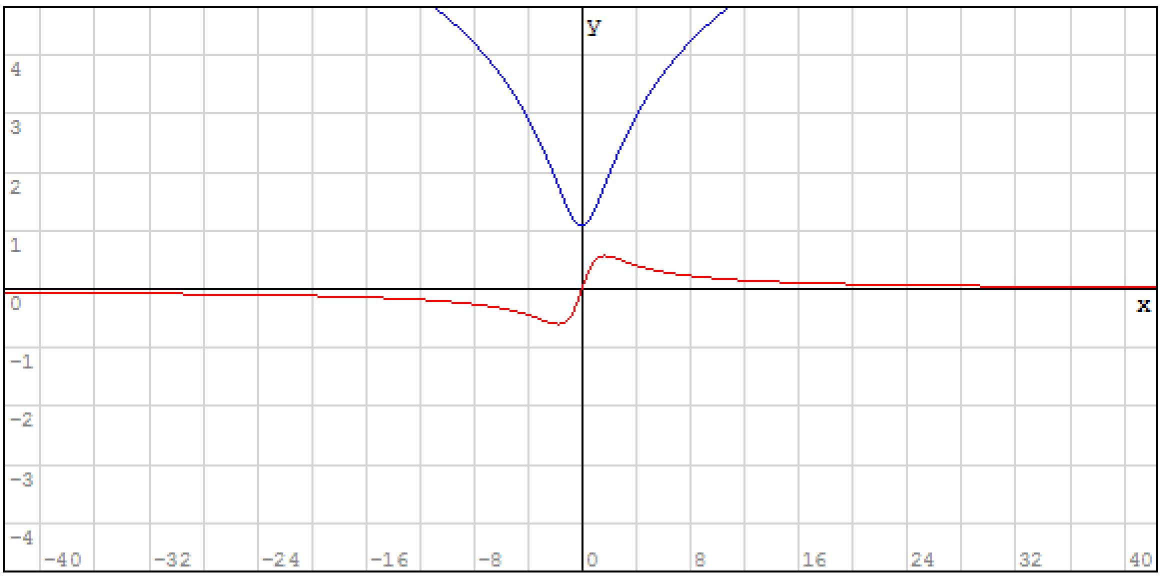
Na jednym wykresie można przedstawić przebieg kilku różnych funkcji w tym samym zakresie odciętych (Rys. 20). W takim przypadku w aktywnym polu należy z belki *Funkcje* wybrać ikonę , a następnie w puste pola wpisać nazwy wcześniej zdefiniowanych funkcji.

$x := -100 ; -90 .. 100$

$F(x) := \ln\left(x^2 + 3\right)$

$f(x) := \frac{d}{dx} \ln\left(x^2 + 3\right)$





F(x)
f(x)

Rys. 20. Wykres dwóch funkcji

Ćwiczenie 6.1: Narysować wykres funkcji F(x) i jej pochodnej oraz sformatować jego wygląd tak, tak jak pokazano to na Rys. 20.

7. Obliczenia na macierzach

Wprowadzanie wektorów i macierzy można wykonać z menu *Wstaw→Macierz,* kombinacją klawiszy [Ctrl] + [M] albo wybrać ikonę z belki *Macierze.* Po wykonaniu jednej z powyższych opcji należy określić rozmiar macierzy (domyślnie 3x3) a następnie wprowadzić elementy macierzy (Rys. 21).

$$K := \begin{pmatrix} 5 & 20 & -30 \\ 120 & 15 & 30 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rys. 21. Przykłady macierzy

Wartości poszczególnych elementów macierzy możemy uzyskać wykorzystując indeksacje elementów macierzy Rys. 22. Indeks macierzowy wprowadza się przy pomocy funkcji *el(2), el(3).* W pierwszej funkcji, w pierwszym polu wprowadzamy nazwę macierzy natomiast w drugim nr elementu, który chcemy wywołać (numeracja elementów rozpoczyna się od lewego górnego rogu i rośnie aż do prawego dolnego rogu – od lewej do prawej, od góry do dołu). Funkcja *el(2)* umożliwia wyświetlenie żądanego elementu przez wprowadzenie nr wiersza i kolumny, w których znajduje się dany argument.

$$K := \begin{pmatrix} 5 & 20 & -30 \\ 120 & 15 & 30 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$K_{1} = 5 \qquad L_{7} = 4$$

$$K_{5} = 15 \qquad L_{8} = 10$$

$$K_{1\,2} = 20 \qquad L_{2\,1} = 5$$

$$K_{2\,2} = 15 \qquad L_{2\,2} = 9$$

Rys. 22. Elementy macierzy

Program umożliwia wykonywanie działań na macierzach, oczywiście zgodnych z zasadami rachunku macierzowego. Oprócz podstawowych działań dostępnych w pasku *Macierze* można wykorzystać kilka dodatkowych funkcji:

- col(K;n) – wyświetli n – tą kolumnę macierzy K,
- cols(K) – zwraca liczbę kolumn macierzy/wektora,
- identity(n) – zwraca macierz jednostkową (n x n – jedynki na przekątnej, zera poza),
- length(K) – zwraca liczbę elementów w macierzy, zwraca skalar,
- matrix(x;y) – zwraca zerową macierz o podanym rozmiarze – x – liczba wierszy, y – liczba kolumn,
- minor(K;i;j) – zwraca dopełnienie elementu [i;j] macierzy,
- rank(K) – zwraca rząd macierzy,
- rows(K) – zwraca liczbę wierszy macierzy,
- submatrix(K;i;j;k;n) – zwraca macierz K od i-tego do j-tego wiersza i od k-tej do n-tej kolumny,
- minor(K;i;j) – zwraca podmacierz danej macierzy, powstałą z usunięcia podanego wiersza i podanej kolumny.

Ćwiczenie 7.1: Zdefiniuj macierze i wykonaj na nich działania.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A^{-1}, A^{T}, $A^{-1} \cdot A$, $A^{-1} \cdot B$, $A \cdot B$

8. Rozwiązywanie równań i układów równań

SMath Studio umożliwia między innymi rozwiązywanie równań oraz układów równań.

Równania wielomianowe

Funkcja *polyroots*() poszukuje pierwiastków, tj. miejsc zerowych wielomianu zdefiniowanego w następujący sposób:

$c_0 \cdot x^0 + c_1 \cdot x^1 + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n$.

Jako argument funkcji musimy podać wektor ze współczynnikami c_i wielomianu (Rys. 23).

$$V := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,351 \\ 1,851 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,351 \\ 1,851 \end{pmatrix}$$

Rys. 23. Pierwiastki wielomianu

Ćwiczenie 8.1 Znajdź pierwiastki wielomianów:

$$2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 + 53 \cdot x - 60 \qquad 5 \cdot d^6 + 5 \cdot d^5 + 4 \cdot d^4 + 3 \cdot d^3 + 2 \cdot d^2 + d + 1$$

Miejsca zerowe dowolnej funkcji

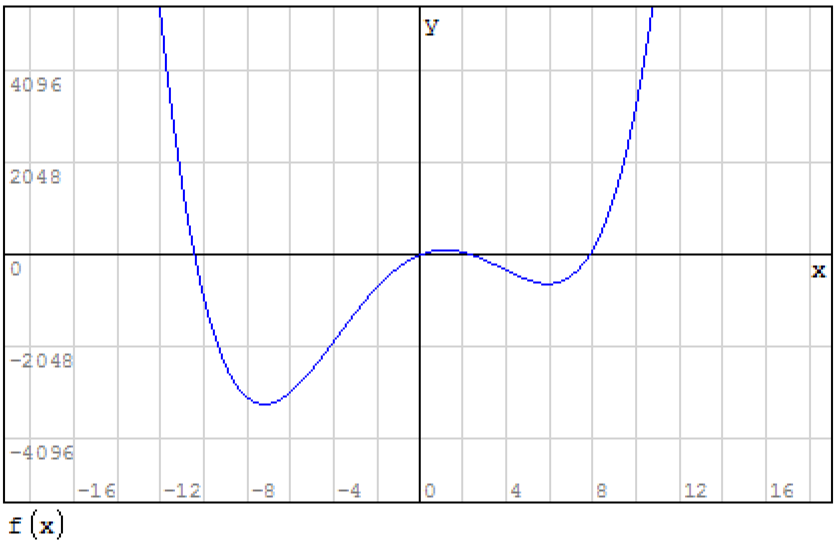
Polecenie *solve()* pozwala w sposób numeryczny znaleźć pierwiastki rzeczywiste zadanej funkcji (Rys. 24). W ten sposób można wyznaczyć miejsca zerowe dowolnej funkcji, w odróżnieniu od polecenia *polyroots()* rozwiązującego tylko równanie wielomianowe.

Argumentami polecenia *solve(2)* są nazwa funkcji i nazwa zmiennej, dla których nastąpi poszukiwanie rozwiązania. W bardziej rozbudowanej wersji *solve(4)* są cztery argumenty, dodatkowo początek i koniec zakresu poszukiwania rozwiązania.

Często, dobrze jest wygenerować dodatkowo wykres analizowanej funkcji, w celu określenia liczby miejsc zerowych w danym zakresie.

$$f(x) := x^4 - 87 \cdot x^2 + 202 \cdot x + \sin(x)$$

$$\text{solve}(f(x) ; x) = \begin{pmatrix} -10{,}323 \\ 0 \\ 2{,}505 \\ 7{,}82 \end{pmatrix}$$



Rys. 24. Zastosowanie funkcji ***solve()***

Ćwiczenie 8.2: Znajdź wszystkie miejsca zerowe funkcji:

$z(x) := x^3 - e^x + 200$
$f(x) := -x^4 + 20 \cdot x^3 + 300 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 15$

Rozwiązanie układu równań liniowych

Do rozwiązania układów równań liniowych należy stosować metodę macierzową. Wymaga to zdefiniowania macierzy współczynników przy niewiadomych oraz wektora (macierzy jednokolumnowej) wyrazów wolnych, a następnie wykonania operacji na tych macierzach.

Na Rys. 25 przedstawiono układ równań linowych zapisany z użyciem operatora logicznego **=** (CTRL+=). Dodatkowo, zastosowanie polecenia *sys()* umożliwia zapisanie równań spiętych klamrą, co przedstawia Rys. 26.

$$5 \cdot x + 6 \cdot y - 4 \cdot z = 20$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot z = 12$$
$$x - y + z = 0$$

Rys. 25: Układ równań liniowych

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 6 \cdot y - 4 \cdot z = 20 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot z = 12 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Rys. 26: Układ równań liniowych zapisany poprzez polecenie ***sys()***

Zapisanie układu równań nie jest konieczne z punktu widzenia działania programu i dalszych czynności mających doprowadzić do ustalenia wartości niewiadomych. Oznacza to, że niezależnie od tego w jakiej formie zostanie zapisany (lub nie zapisany) układ równań liniowych konieczne jest zdefiniowanie odpowiednich macierzy. W przykładzie z Rys. 27 zdefiniowano zmienną **WN** jako macierz współczynników przy niewiadomych oraz zmienną **WW** jako wektor (macierz jednokolumnową) wyrazów wolnych .

$$WN := \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad WW := \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rys. 27: Macierze definiujące układ równań liniowych

Rozwiązanie, zmienna **R**, uzyskuje się obliczając macierz odwrotną do macierzy współczynników i mnożąc ją przez wektor wyrazów wolnych, co pokazuje Rys. 28.

$$R := WN^{-1} \cdot WW$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

Rys. 28: Rozwiązanie układu równań liniowych

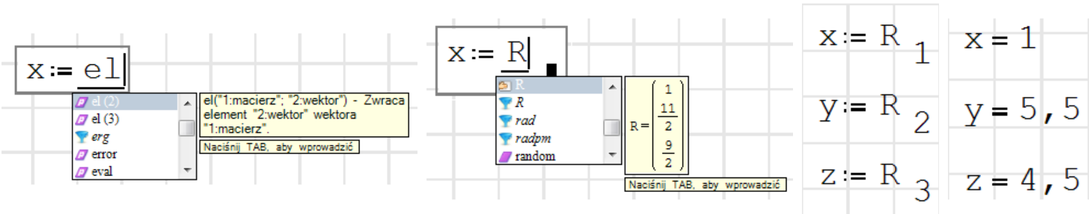
Macierz odwrotną można również obliczyć używając polecenia *invert()*, patrz Rys. 29.

$$WN^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,125 & 0,75 \\ -0,0625 & 0,5625 & -1,375 \\ -0,1875 & 0,6875 & -1,125 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{invert}(WN) = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,125 & 0,75 \\ -0,0625 & 0,5625 & -1,375 \\ -0,1875 & 0,6875 & -1,125 \end{pmatrix}$$

Rys. 29: Sposoby obliczania macierzy odwrotnej

Niekiedy zachodzi konieczność użycia w dalszych obliczeniach wartości wyznaczonych niewiadomych. Można na podstawie uzyskanego rozwiązania przechowywanego w zmiennej **R** zdefiniować zmienne **x**, **y** i **z** poprzez użycie polecenia *el(2)*. Kolejne etapy takiego definiowania pokazano na Rys. 30.



Rys. 30: Deklaracja zmiennych na podstawie rozwiązania R

Ćwiczenie 8.3: Rozwiąż układy równań liniowych:

$$\begin{cases} 12x+20y-5z=37 \\ -5x-y+20z=53 \\ 3x+7y-2z=11 \end{cases}$$

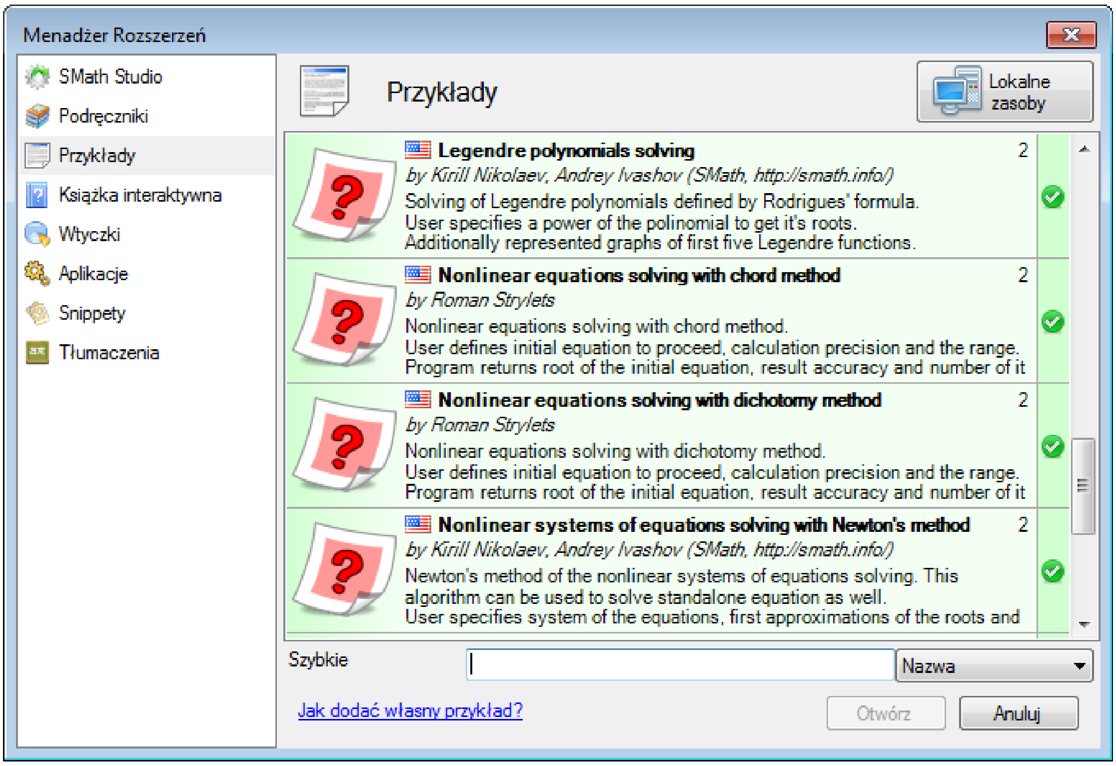
$$\begin{cases} 5N_1+6N_2-2N_3=65 \\ 6N_1+N_2=36 \\ -2N_1+8N_2+3N_3=32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b-4c-20=0 \\ 16a+10b-36z=0 \\ 6a+b+c=0 \end{cases}$$

Rozwiązanie równań nieliniowych i układów równań nieliniowych

Rozwiązywanie układów równań nieliniowych jest możliwe poprzez użycie wielu procedur numerycznych. W przykładach dostępnych we wbudowanej pomocy programu SMath Studio zawarto trzy z takich metod – patrz Rys. 31. W bardzo łatwy sposób można zaadaptować do swoich potrzeb te przykłady poprzez zmianę definicji funkcji **f(x)**.

Realizacja odpowiednich procedur numerycznych wymaga użycie funkcji programistycznych wbudowanych do programu SMath Studio.



Rys. 31: Przykładowe metody rozwiązywania układów równań nieliniowych

9. Programowanie

Instrukcja warunkowa *if*

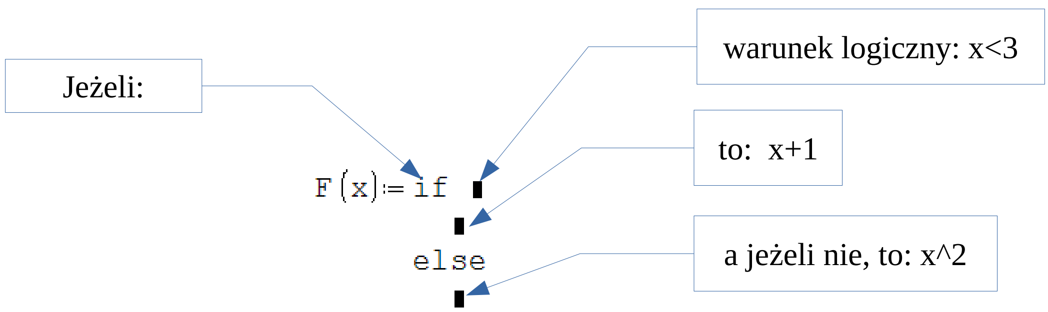
Niektóre funkcje określone są w sposób przedziałowy, tj. w zależności od tego w jakim zakresie znajduje się ich argument (Rys. 32). Wartości takiej funkcji można obliczyć wykorzystując instrukcję warunkową *„jeżeli” (*polecenie *if).*

Budowa i działanie instrukcji warunkowej jest analogiczne jak w arkuszu kalkulacyjnym.

Na Rys. 33 przedstawiono definicję funkcji F(x) za pomocą polecenia *if* w programie SMath Studio.

$$F(x) := \begin{cases} x+1 & x<3 \\ x^{2} & x \ge 3 \end{cases}$$

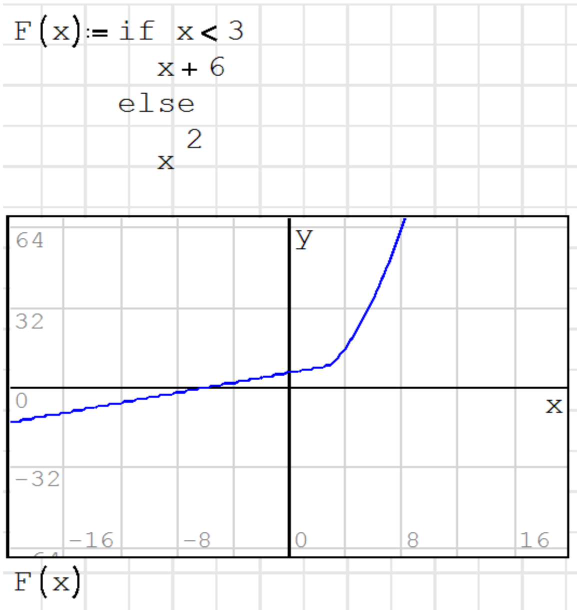
Rys. 32. Przykład funkcji o zmiennej postaci



*Rys. 33. Zastosowanie polecenia **if** do definicji funkcji*

Przykład 9a

Na Rys. 34 przedstawiono schemat działania polecenia *if* – jeżeli argument funkcji F(x) jest mniejszy od 3 to wartości funkcji obliczane będą zgodnie z formułą x+1, jeżeli argument funkcji będzie większy bądź równy 3 to funkcja przyjmować będzie wartości x^2.



Rys. 34. Zastosowanie funkcji „if" wraz z wykresem wartości funkcji F(x)

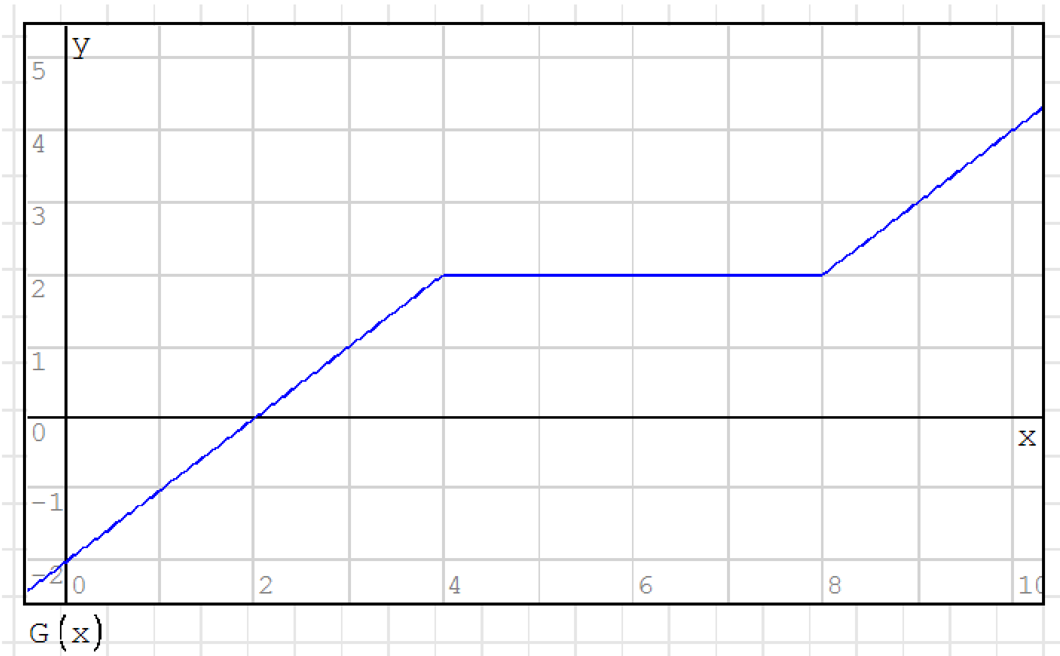
Przykład 9b

W przypadku wielu przedziałów zmienności funkcji definicję funkcji można zrealizować poprzez użycie polecenia warunkowego *if* jako argumentu innego polecenia warunkowego *if*. Przykład realizacji dla funkcji trzy-przedziałowej **G(x)** przedstawia Rys. 35.

$$G(x)=\begin{cases} x-2 & dla\ \ x<4 \\ 2 & dla\ \ 4\leqslant x\leqslant 8 \\ x-6 & dla\ \ x>8 \end{cases}$$

```
G(x) := if x < 4
            x - 2
        else
            if | x ≥ 4
               | x ≤ 8
                2
            else
                x - 6
```

Linia bloku instrukcji z Menu Programowanie (line)



*Rys. 35. Funkcja **if** wewnątrz funkcji **if** wraz z wykresem wartości funkcji G(x)*

Pętla iteracyjna *for*

Użycie pętli iteracyjnej *for* (**określanej również mianem pętli zakresowej lub pętli licznikowej**) pozwala na wykonanie tych samych operacji ustaloną liczbę razy. Do działania pętli licznikowej *for* konieczna jest zmienna sterująca określająca ile razy polecenia ujęte w pętli zostaną wykonane.

Na przykładzie widocznym na Rys. 36 zmienna sterująca to zmienna **i**. Zmienna sterująca **i** została zdefiniowana jako zmienną zakresową **1 .. n**, gdzie zmienna **n** określa liczebność zbioru argumentów przechowywanych w zmiennej **x**. Wyznaczenie liczby elementów danej zmiennej jest możliwe dzięki użyciu polecenia *length()*.

W omawianym przykładzie zmienna **x** mieści się w zakresie <10, 20>, w który wchodzi 11 elementów, stąd **n = 11**. Po wprowadzeniu polecenia *for* musimy podać zakres, w którym przeprowadzamy obliczenia, w naszym przypadku **i ∈ 1 .. n** . Oznacza to iż pętla obliczy wartości funkcji **y** dla argumentów od $\mathbf{x_1}$ do $\mathbf{x_n}$. Jak widzimy $\mathbf{x_1 = 10}$, $\mathbf{x_2 = 11}$, itd. Gdy **i = 5** to pętla obliczy wartość funkcji **y** dla piątego elementu z zakresu zdefiniowanych argumentów **x**.

$$x := 10..20$$

$$n := \mathrm{length}(x)$$

$$n = 11$$

$$\text{for } i \in 1..n$$

$$\quad y_i := x_i + 1$$

Indeks dolny w tym przypadku otrzymujemy nie znakiem kropki [.], tylko znakiem [[], tj. lewy nawias kwadratowy, co jest jednoznaczne użyciu polecenia *el(2)*

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= 11 \\ x_{10} &= 19 \\ x_{11} &= 20 \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Rys. 36. Zastosowanie pętli „for”

Przykład 9c

$$
\begin{aligned}
& x := 1 \,..\, 10 \\
& n := \text{length}(x) \\
& \text{for } i \in 1 \,..\, n \\
& \quad y_{i,1} := \text{if } x_i \le 5 \\
& \qquad\qquad x_i \\
& \qquad\quad \text{else} \\
& \qquad\qquad x_i + 100
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
& z := 1 \,..\, 10 \\
& \text{for } j \in 1 \,..\, \text{length}(z) \\
& \quad q_j := \text{if } z_j \le 5 \\
& \qquad\qquad z_j \\
& \qquad\quad \text{else} \\
& \qquad\qquad z_j + 100
\end{aligned}
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 106 \\ 107 \\ 108 \\ 109 \\ 110 \end{pmatrix}
\qquad\qquad
q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 106 \\ 107 \\ 108 \\ 109 \\ 110 \end{pmatrix}
$$

Przykład 9d

Samochód jedzie z prędkością 300km/h i nagle zaczyna hamować z przyspieszeniem równym 5m/s^2. Prędkość samochodu mierzono od chwili rozpoczęcia hamowania co 4s przez 28s. Podaj prędkość samochodu w 0s, 4s, 8s, 12s i 16s hamowania, kiedy prędkość zacznie przyjmować wartość ujemną przy pomocy odpowiedniej funkcji wstaw wartość 0.

$$t := 0\,s ; 4\,s\,..\,28\,s \qquad V_0 := 300\,\frac{km}{hr}$$

$$a := 5\,\frac{m}{s^2}$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\,s \\ 8\,s \\ 12\,s \\ 16\,s \\ 20\,s \\ 24\,s \\ 28\,s \end{pmatrix}$$

$n := \mathrm{length}(t)$

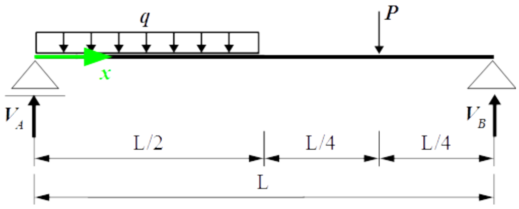
$n = 8$

```
for i ∈ 1 .. n
  V_i := if V_0 − a·t_i ≥ 0
            V_0 − a·t_i
         else
            0
```

$$V = \begin{pmatrix} 83{,}333\,\frac{m}{s} \\ 63{,}333\,\frac{m}{s} \\ 43{,}333\,\frac{m}{s} \\ 23{,}333\,\frac{m}{s} \\ 3{,}333\,\frac{m}{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Przykład 9e

Wyznacz zmienność (oblicz wartości funkcji i następnie narysuj wykresy) momentu zginającego i siły poprzecznej w belce obciążonej jak na Rys. 37.



Rys. 37: Rozważana belka

Wartości reakcji obliczamy wg następujących wzorów:

$$V_B = -V_A + q \cdot \frac{L}{2} + P \qquad V_A = \frac{q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot L + P \cdot \frac{L}{4}}{L}$$

DANE:

$L := 20\ m$

$q := 2\ \frac{kN}{m}$

$P := 4\ kN$

ROZWIĄZANIE:

OBLICZENIE REAKCJI

$$V_A := \frac{\left(q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot L + P \cdot \frac{L}{4}\right)}{L}$$

$V_A = 16\ kN$

$$V_B := -V_A + q \cdot \frac{L}{2} + P$$

$V_B = 8\ kN$

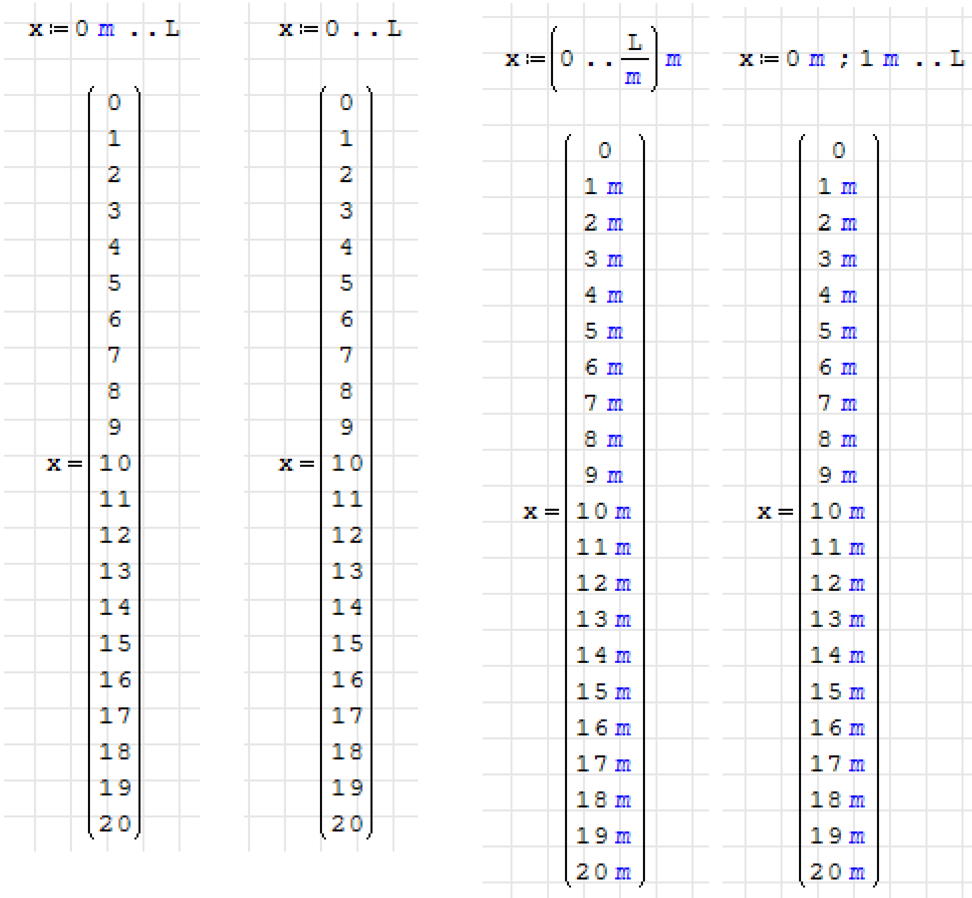
Funkcja momentu zginającego dla rozważanej belki jest następującą funkcją przedziałową:

$$M_y(x)=\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant\dfrac{L}{2} & V_A\cdot x-\dfrac{q\cdot x^2}{2} \\ \dfrac{L}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3L}{4} & V_A\cdot x-\dfrac{q\cdot L}{2}\cdot\left(x-\dfrac{L}{4}\right) \\ \dfrac{3L}{4}\leqslant x\leqslant L & V_A\cdot x-\dfrac{q\cdot L}{2}\cdot\left(x-\dfrac{L}{4}\right)-P\cdot\left(x-\dfrac{3L}{4}\right) \end{cases}$$

stąd zachodzi konieczność zdefiniowania zmiennej **x** jako zmiennej zakresowej $\langle \mathbf{0}\ \ \mathbf{L}\rangle$ oraz konieczność zastosowania wielopoziomowej funkcji *if* jako argumentu pętli licznikowej *for*.

Przy definiowaniu zmiennej zakresowej poleceniem *range(2)* przypisane zmiennej **L** jednostki sprawiają kłopot – zmienna zakresowa **x** „nie dziedziczy" jednostek po zmiennej **L**. Na Rys. 38a) pokazano dwa nieudane warianty definicji zmiennej **x**. Z kolei na Rys. 38b) pokazano dwa prawidłowe warianty definicji zmiennej **x**. Użycie polecenia *range(3)* umożliwia wygenerowanie zmiennej **x** z dowolnym przyrostem – w drugim przykładzie z Rys. 38b) zastosowano przyrost jednostkowy by uzyskać ten sam efekt co w trzech poprzednich przykładach.

a) b)



Rys. 38: Nieprawidłowe a) i prawidłowe b) sposoby definiowania zmiennej zakresowej z jednostką

ZASADNICZE OBLICZENIA

$x := \left(0 .. \frac{L}{m}\right) m$ Określenie zbioru punktów, dla których obliczone zostaną wartości funkcji M_y i Q_z

$n := \text{length}(x)$ Ustalenie liczebności zbioru argumentów

$n = 21$

Obliczenia wartości zmiennej M_y w trzech przedziałach zmienności zmiennej x

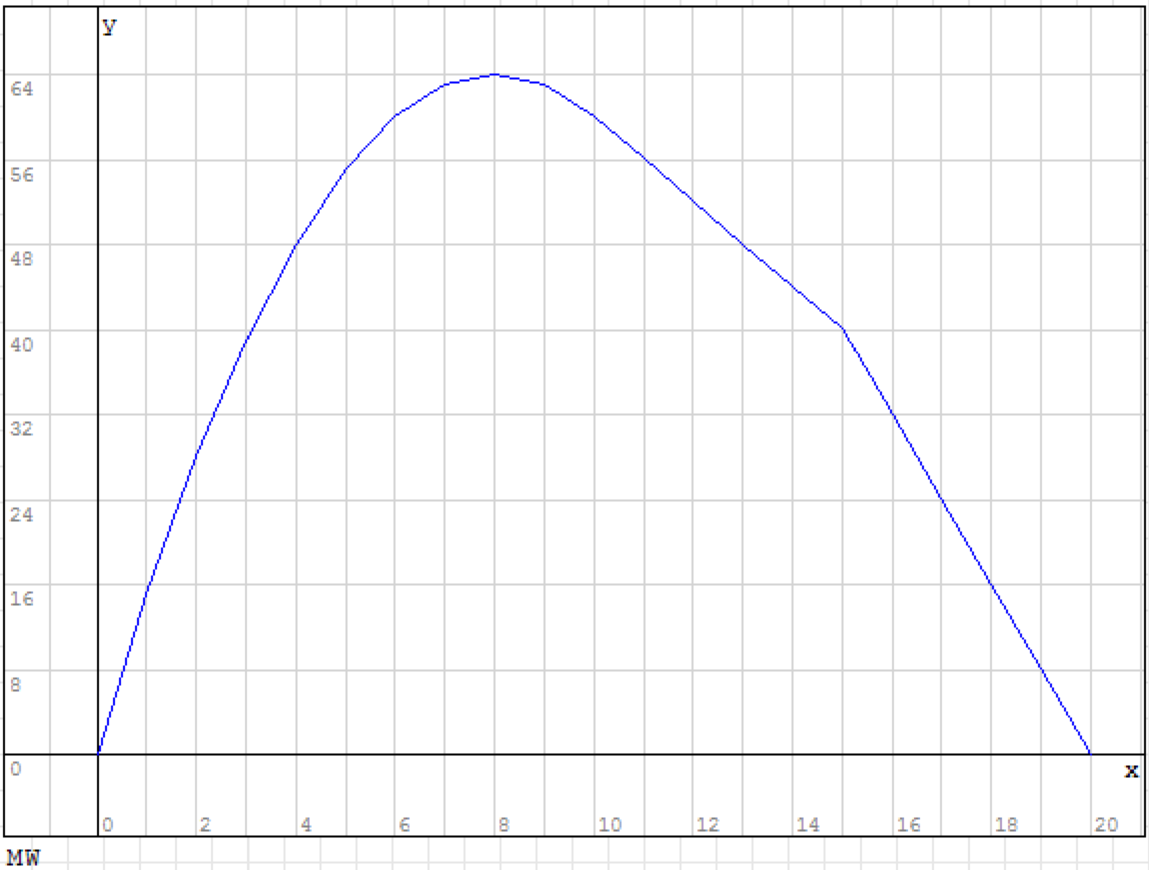
```
for k ∈ 1 .. n
  M_y_k := if x_k ≤ (1/2)·L
               V_A·x_k − q·(x_k)^2 / 2
           else
             if | x_k > (1/2)·L
                | x_k ≤ (3/4)·L
                V_A·x_k − q·(L/2)·(x_k − L/4)
             else
               if | x_k > (3/4)·L
                  | x_k ≤ L
                  V_A·x_k − q·(L/2)·(x_k − L/4) − P·(x_k − (3/4)·L)
               else
                  error("Błąd danych")
```

WYNIKI:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\,m \\ 2\,m \\ 3\,m \\ 4\,m \\ 5\,m \\ 6\,m \\ 7\,m \\ 8\,m \\ 9\,m \\ 10\,m \\ 11\,m \\ 12\,m \\ 13\,m \\ 14\,m \\ 15\,m \\ 16\,m \\ 17\,m \\ 18\,m \\ 19\,m \\ 20\,m \end{pmatrix} \qquad M_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 28 \\ 39 \\ 48 \\ 55 \\ 60 \\ 63 \\ 64 \\ 63 \\ 60 \\ 56 \\ 52 \\ 48 \\ 44 \\ 40 \\ 32 \\ 24 \\ 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} kN\,m$$

Zdefiniowanie zmiennej umożliwiającej narysowanie wykresu

$$MW := \mathrm{augment}\left(\frac{x}{m}\,;\,\frac{M_y}{kN\,m}\right)$$



ZADANIE KONTROLNE: zrobić obliczenia i narysować wykres $Q_z(x)$

Funkcja siły poprzecznej jest następującą funkcją przedziałową:

$$Q_z(x) = \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} & V_A - q \cdot x \\ \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3L}{4} & V_A - q \cdot \frac{L}{2} \\ \frac{3L}{4} \leqslant x \leqslant L & V_A - q \cdot \frac{L}{2} - P \end{cases}$$

Wykres zmienności funkcji siły poprzecznej dla rozważanej belki przedstawia się następująco:

Zdefiniowanie zmiennej umożliwiającej narysowanie wykresu

$$QW := \mathrm{augment}\left(\frac{x}{m}; \frac{Q_z}{kN}\right)$$

Pętla warunkowa *while*

Użycie pętli warunkowej *while* (**określanej również mianem pętli repetycyjnej**) pozwala na wykonanie tych dopóki określony warunek jest spełniony. Warunek zawarty w definiowanej pętli *while* musi być wyrażeniem logicznym zwracającym albo wartość **1** utożsamianą z **prawdą** albo wartość **0** jako **fałsz**. Wartość wyrażenia logicznego jest ustalona na początku pętli. Jeśli wyrażenie logiczne przyjmuje wartość **1**, to instrukcje zawarte w pętli wykonywane są po raz kolejny.

Przykładem dobrze ilustrującym działanie pętli warunkowej *while* jest obliczanie wartości silni liczby naturalnej **n** (**n!**).

Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Silnia

- Silnia liczby naturalnej *n* – iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż *n*
- Oznaczenie *n*! dla silni wprowadził w 1808 roku Christian Kramp.
- Zapis *n*!, 2! itd. odczytujemy „n silnia”,„dwa silnia” itd.

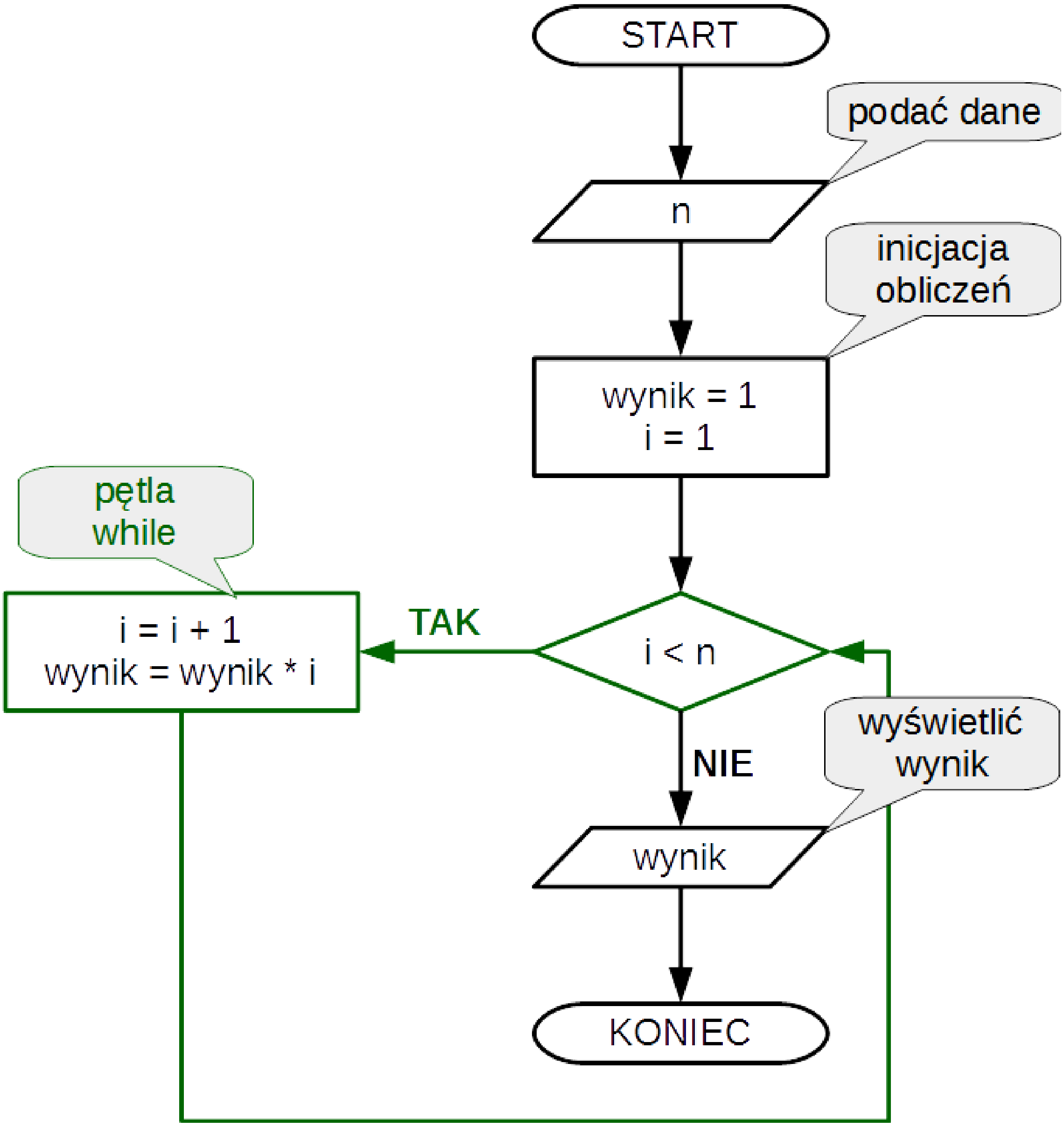
Definicja rekurencyjna silni ma postać:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Przykłady:

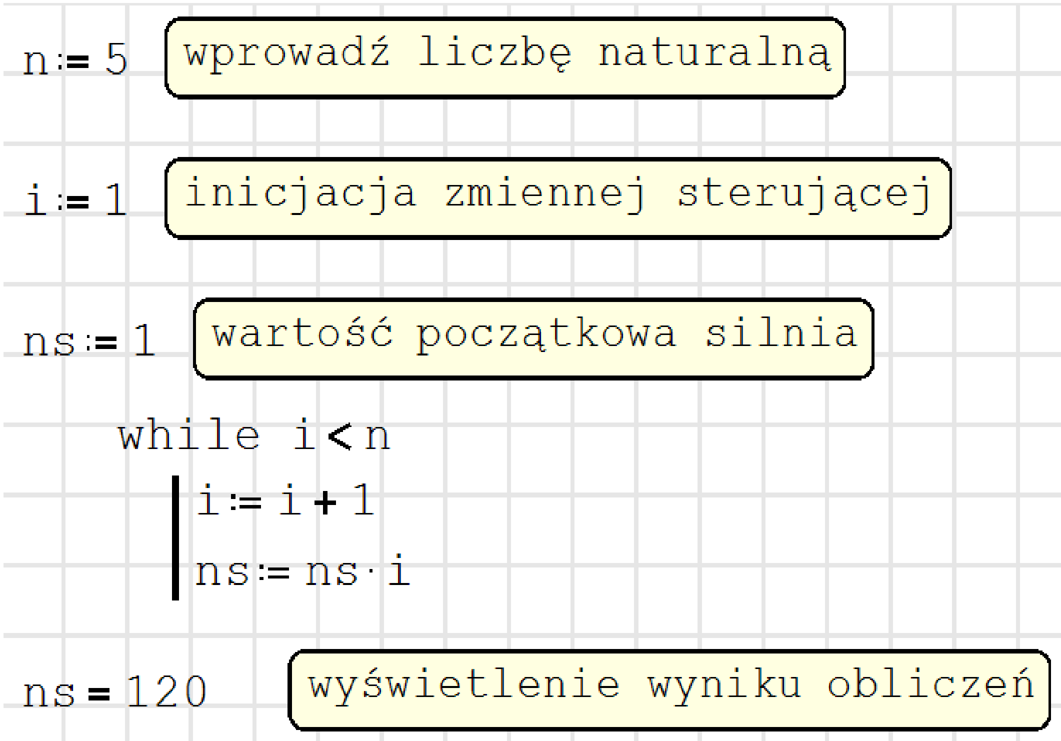
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Schemat blokowy przedstawiający algorytm obliczania **n silnia** przedstawiono na Rys. 39.
Ten i wiele innych algorytmów można znaleźć na stronie:
http://www.algorytm.org/algorytmy-arytmetyczne/silnia.html.



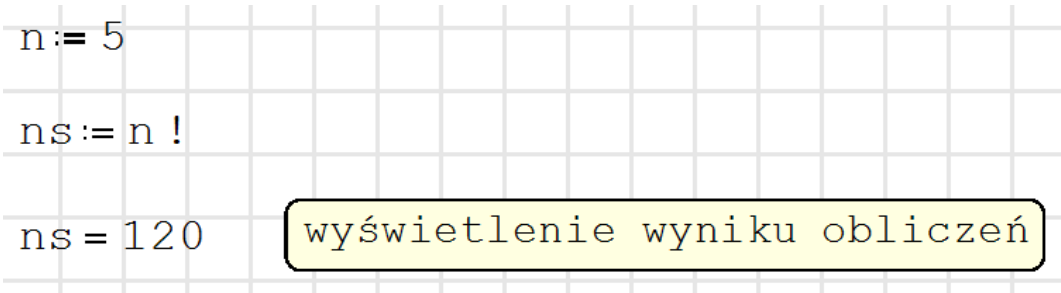
*Rys. 39: Schemat blokowy algorytmu obliczania **n!***

Realizację algorytmu przedstawionego na Rys. 39 w programie SMath Studio przedstawia Rys. 40.



*Rys. 40: Obliczanie wartości **n silnia** z wykorzystaniem pętli while*

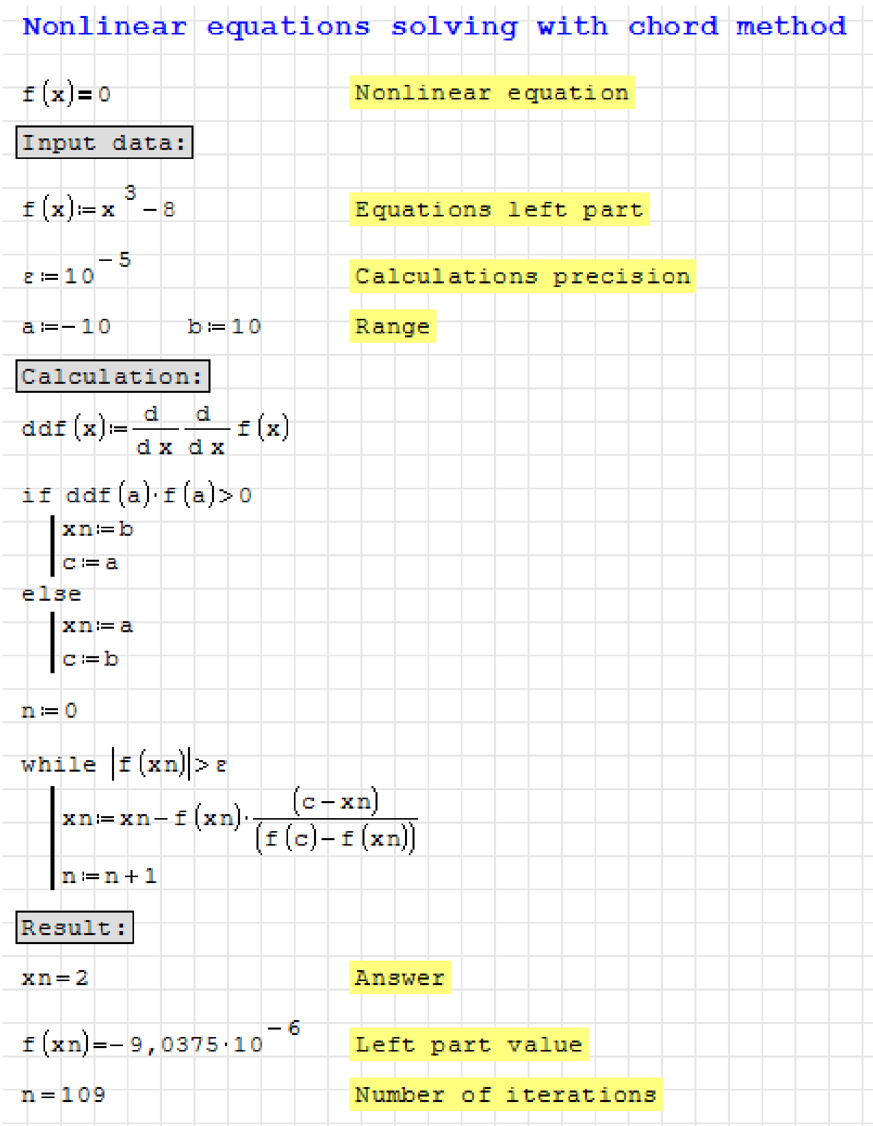
Oczywiście program SMath Studio posiada wbudowany operator **!** (wykrzyknik) umożliwiający obliczanie **n silnia**, co widać na Rys. 41.



*Rys. 41: Obliczanie wartości **n silnia** poprzez wykorzystanie operatora **!***

Przykład 9f

Pętli *while* ma zastosowanie w wielu algorytmach rozwiązania równania nieliniowego. Realizację jednego algorytmu nazywanego **metodą siecznych** (również **metodą Newtona-Raphsona**) przedstawiono na Rys. 42. Jest to jeden z wielu przykładów dostępnych w programie SMath Studio: menu **Pomoc → Przykłady.**



Rys. 42: Przykład zastosowania pętli while do rozwiązywania równania nieliniowego

Obliczenia w pętli *while* są powtarzane dopóty dopóki obliczana wartość bezwzględna funkcji **f(xn)** dla iterowanego argumentu **xn** jest większa od założonego błędu – od wartości zmiennej **ε**. W przypadku idealnym rozwiązaniem jest takie **xn**, dla którego **f(xn) równa się dokładnie zero.**

Widać, że dla zdefiniowanej funkcji **f(x)** i założonego przedziału wyszukiwania potrzeba było **109** iteracji, aby osiągnąć założony poziom dokładności, tj. $\left|\mathbf{f(xn)=-9{,}0375\cdot 10^{-6}}\right| \le \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{=10^{-5}}$, co oznaczało zakończenie działania pętli warunkowej *while*.

ZADANIE KONTROLNE: sprawdzić ile iteracji potrzeba dla uzyskania rozwiązania zakładając przedział wyszukiwania na $\langle 0\ \ 3 \rangle$. Dodatkowo, sprawdzić co da zmiana wymaganej dokładności na 10^{-3}.