



Politechnika Świętokrzyska
Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn

PRACA DOKTORSKA

mgr inż. Sławomir Koczubiej

Model powłokowo-belkowy MES w analizie statycznej i stateczności konstrukcji o prętach cienkościennych otwartych

Kielce 2011

Politechnika Świętokrzyska
Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn

PRACA DOKTORSKA

mgr inż. Sławomir Koczubiej

**Model powłokowo-belkowy MES
w analizie statycznej i stateczności konstrukcji
o prętach cienkościennych otwartych**

Kielce 2011

Niniejsza praca jest rozprawą doktorską autora
w przewodzie na stopień doktora nauk technicznych
w dyscyplinie Mechanika, otwartym w dniu 21 maja 2009 r.
na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn
Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach.

Promotor:
prof. dr hab. inż. Czesław Cichoń

Mgr inż. Sławomir Koczubiej jest pracownikiem w Katedrze Informatyki
Stosowanej na Wydziale Zarządzania i Modelowania Komputerowego
Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach.

Praca doktorska powstała w ramach projektu badawczego promotorskiego
MNiSW nr N N501 069238.

*Autor składa serdeczne podziękowania
prof. dr hab. inż. Czesławowi Cichoniowi
za inspirację i opiekę naukową.*

Marlenie.

Spis treści

1. Wstęp	11
1.1. Zagadnienia statyki i stateczności belek i ram o prętach cienkościennych	11
1.2. Cel i zakres pracy	19
1.3. Podstawowe założenia	24
1.4. Ważniejsze oznaczenia	25
2. Przyrostowe równania równowagi MES	29
2.1. Równanie wariacyjne równowagi	29
2.1.1. Praca wirtualna $\delta W_w^{(c)}$	31
2.1.2. Praca wirtualna $\delta W_w^{(t)}$	33
2.1.3. Praca wirtualna δW_z	34
2.2. Przyrostowe równanie równowagi MES dla continuum	35
3. Podstawowe równania dla powłoki płaskiej i belki cienkościennej	37
3.1. Płyta <i>Reissnera–Mindlina</i>	37
3.1.1. Pole przemieszczeń	37
3.1.2. Równania geometryczne	38
3.1.3. Uwzględnienie obrotu wokół normalnej do powierzchni środkowej	42
3.1.4. Równania fizyczne	43
3.2. Belka cienkościenna	44
3.2.1. Pole przemieszczeń	44
3.2.2. Równania geometryczne	48
3.2.3. Równania fizyczne	50
4. Model powłokowo-belkowy MES konstrukcji cienkościennej	59
4.1. Macierz styczna i wektor sił wewnętrznych dla płaskiego elementu skończonego powłokowego	59
4.1.1. Przykład 1. Wyboczenie skrzynki	62

4.2.	Macierz styczna i wektor sił wewnętrznych dla elementu skończonego cienkościennego	63
4.3.	Procedura obliczania macierzy stycznej i wektora sił wewnętrznych dla elementu skończonego cienkościennego	65
4.3.1.	Przykład 2. Rama portalowa	78
4.4.	Element skończony przejściowy	80
5.	Przestrzenny element węzłowy	85
5.1.	Macierz sztywności dla przestrzennego elementu węzłowego	85
5.2.	Procedura budowy równań MES	89
6.	Metody numeryczne rozwiązania	91
6.1.	Metoda <i>Newtona–Raphsona</i>	91
6.2.	Punkty krytyczne stanu równowagi	93
6.3.	Algebraiczny problem własny	94
6.4.	Kondensacja statyczna	95
7.	Programy komputerowe	97
7.1.	Program AmFEM do analizy konstrukcji cienkościennych	97
7.2.	Programy do wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekroju cienkościennego otwartego	97
7.2.1.	Program SecPropGRAPH	98
7.2.2.	Program SecPropFEM	102
8.	Przykłady	105
8.1.	Uwagi wstępne	105
8.2.	Statyka	106
8.2.1.	Przykład 3. Rama trójprętowa	106
8.2.2.	Przykład 4. Rama dwuprętowa	110
8.2.3.	Przykład 5. Rama dwuprętowa	115
8.2.4.	Przykład 6. Wspornik o przekroju ceowym	118
8.2.5.	Przykład 7. Rama trójprętowa	121
8.3.	Wyboczenie	123
8.3.1.	Przykład 8. Rama dwuprętowa	123
8.3.2.	Przykład 9. Rama trójprętowa	129
8.4.	Stateczność	131
8.4.1.	Przykład 10. Wspornik o przekroju ceowym	131
8.4.2.	Przykład 11. Rama portalowa	134

9. Zakończenie	139
9.1. Podsumowanie, oryginalne elementy pracy	139
9.2. Możliwe kierunki rozwoju tematu	140
A. Opis programu AmFEM	143
B. Opis programu SecPropGRAPH	159
C. Opis programu SecPropFEM	167
D. Wyrażenia regularne i język programowania PERL	185
D.1. Wyrażenia regularne	185
D.2. Wybrane elementy języka PERL	189
Bibliografia	193
Spis rysunków	201
Spis tabel	205
Streszczenie w języku polskim	207
Streszczenie w języku angielskim	209

1. Wstęp

1.1. Zagadnienia statyki i stateczności belek i ram o prętach cienkościennych

Na początku XX stulecia rozwój przemysłu i transportu spowodował wzrost zainteresowania konstrukcjami o prętach cienkościennych (które dalej będziemy też krótko nazywać: cienkościennymi). Początkowo były to konstrukcje związane ze środkami transportu (wagony kolejowe, jednostki pływające). W chwili obecnej konstrukcje cienkościenne są szeroko stosowane zarówno w konstrukcjach związanych z transportem jak i w przemyśle maszynowym, a szczególnie w budownictwie (mosty, hale, budowle wysokościowe).

Historię rozwoju metod obliczania belek i ram o prętach cienkościennych, z początku prostych – analitycznych (lecz dobrze fizycznie uzasadnionych), potem bardziej złożonych – wykorzystujących możliwości współczesnych metod obliczeniowych przedstawimy korzystając z monografii *Kujawy* [49], gdzie jest ona szeroko omówiona.

Za pierwsze prace dotyczących mechaniki układów cienkościennych można uznać cykle artykułów opublikowanych przez *Timoszenkę* w latach 1905–1910 i *Bacha* w latach 1909–1910 (patrz [99]). Prace Timoszenki dotyczyły stateczności belki dwuteowej. Przedstawiono w nich zależności między momentem skręcającym a charakterystykami geometrycznymi. Bach natomiast prowadził badania eksperymentalne na ceownikach, które wykazywały obecność deformacji skrętnych (w postaci spaczenia) oprócz typowych deformacji giętnych pod obciążeniem poprzecznym, w płaszczyż-

nie równoległej do środniczki. Deformacje te nie podlegały hipotezie płaskich przekrojów. Bach jako przyczynę tego zjawiska podawał brak symetrii przekroju w płaszczyźnie obciążenia.

Problemem dodatkowych deformacji skrętnych przekroju cienkościennego zajmował się też *Maillart*. W pracach opublikowanych w 1921 roku (patrz [99]) zajmował się skręcaniem przy jednoczesnym zginaniu kształtowników walcowanych. Doszedł do wniosku, że deplanacja występuje także w przypadku przekrojów symetrycznych, a tym samym nie wynika z braku symetrii przekroju poprzecznego w płaszczyźnie obciążenia jak sugerował Bach.

W latach 1924–1926 swoje prace opublikował *Weber* (patrz [99]). Wyprowadził zależności na dodatkowe naprężenia normalne powstające w półkach przy skręcaniu skrępowanym dwuteowników, ceowników i zetowników. Korzystał z uogólnionych rozwiązań Timoszenki. Próbował też udowodnić, że w przypadku dowolnego kształtownika, jednocześnie zginanego i skręcanego mamy do czynienia z pokrywaniem się środków zginania¹ i skręcania w przekroju obciążonym.

Przed drugą wojną światową podobne badania prowadzili *Grzędzielski* i *Nowiński* [31]. Wykazali oni niesłuszność twierdzenia postawionego przez Webera w przypadku ogólnym. Jest ono prawdziwe tylko dla przekrojów bisymetrycznych.

W 1929 roku *Wagner* [88] opublikował pracę, dającą podstawy współczesnej teorii skręcania skrępowanego prętów cienkościennych. Opisał sposób rozkładu naprężeń normalnych w przekroju pręta cienkościennego skręcanego nieswobodnie. Wprowadził również hipotezę braku deformacji przekroju poprzecznego.

W roku 1936 [94] i 1940 [95] *Własow* opublikował pierwsze prace poświęcone podstawom technicznej teorii skręcania pojedynczych prętów cienkościennych. A jego monografia [96] jest dotąd jednym z najważniejszych źródeł wiedzy w dziedzinie mechaniki cienkościennych konstrukcji prętowych.

¹ Zwanym także środkiem ścinania.

W 1948 *Gorbunow* i *Strielbicka* opublikowali monografię [28] w całości poświęconą przestrzennym konstrukcją cienkościennym. Zawiera ona podstawy teoretyczne obliczania metodą sił i metodą przemieszczeń płaskich układów cienkościennych. W pracy rozważa się układy prętów o przekroju otwartym, w których osie leżą w jednej płaszczyźnie. Wszystkie pręty przecinają się w węzłach pod kątami prostymi i są jednakowej wysokości. Tak skonstruowane węzły zapewniają zgodność miary spaczenia poszczególnych prętów schodzących się w węzłach. Zgodność spaczeń jest zapewniona, zdaniem autorów, wówczas gdy mamy do czynienia z warunkiem zgodności położenia linii środków skręcania wszystkich prętów schodzących się w węźle, co jest jednoznaczne ze zgodnością wartości kątów nachylenia wykresu współrzędnej wycinkowej na wszystkich półkach prętów należących do węzła.

Kolejną pracę, poświęconą problemowi obliczania prętowych konstrukcji przestrzennych o dowolnych kątach pomiędzy schodzącymi się w węźle prętami, opublikował *Stawraki* [76] w 1951 roku. Węzły potraktowano wówczas jako nieskończenie sztywne (spaczenie równe zeru) lub z całkowitą swobodą spaczenia (bimomenty równe zeru). W przekrojach międzywęzłowych naprężenia od skręcania analizowano zgodnie z techniczną teorią prętów cienkościennych.

Na podstawie teorii pojedynczych prętów *Własowa*, *Goldberg* [27] analizuje zagadnienie obliczania płaskiego rusztu zbudowanego z prętów dwuteowych. Wykorzystuje równania równowagi węzłów i równania zgodności przemieszczeń.

W 1955 roku *Urban* wydaje monografię [86] poświęconą problematyce układów cienkościennych. Świadomie rozdziela w rozwiązaniu siły działające prostopadle do płaszczyzny układu od sił działających równolegle. W pierwszym przypadku istnieje sprzężenie zginania i skręcania prętów, natomiast w drugim można rozdzielić problem zginania i skręcania. Autor wykorzystuje metodę sił i przemieszczeń dla podstawowych przypadków, w których osie środków skręcania i ciężkości wszystkich prętów leżą w jednej płaszczyźnie i miary spaczenia prętów przywęzłowych są identyczne.

W 1955 roku swą pracę [53] publikuje *Malkina*. W obliczeniach belek i ram wykorzystuje metodę kolejnych przybliżeń. Proces iteracyjny podobny jest do metody *Crossa* [75] dla zwykłych układów o węzłach nieprzesuwnych. Założenia podstawowe są podobne jak w pracach *Gorbunowa* i *Urbana*. W obliczeniach pominięto, w przypadku obciążeń w płaszczyźnie układu, wpływ przemieszczeń liniowych i kątowych na wartości bimomentów, uwzględniając tylko wpływ spaczenia. Współczynniki rozdziałów bimomentów zostały wyznaczone z wykorzystaniem jednostkowych spaczeń węzłów. W przypadku obciążeń prostopadłych do płaszczyzny, gdy przemieszczenia z płaszczyzny oraz obroty węzłów mają istotny wpływ na rozkład bimomentów, obliczenia są prowadzone etapowo. W pierwszej fazie blokuje się spaczenie w węzłach i stosując metodę sił, metodę przemieszczeń lub metodę *Crossa*, oblicza się układ poddany zginaniu i skręcaniu. Znając momenty skręcające, można obliczyć wartości bimomentów w pierwszym przybliżeniu. W drugim etapie wyznaczane są momenty skręcające z wyznaczonych w etapie pierwszym bimomentów. Następnie kolejno koryguje się momenty zginające, wykorzystując warunki równowagi węzłów. Znając wartości momentów skręcających wyznaczonych w etapie drugim, można obliczyć kąty skręcenia i kolejno znowu bimomenty. Zwykle po drugim etapie obliczeń osiąga się dobrą dokładność wyników.

W Polsce jako pierwszy metodę *Crossa* zastosował w obliczeniach płaskich układów z węzłami o jednym stopniu swobody (w postaci deplanacji) *Cywiński* [20]. Wprowadził on do analizy konstrukcji cienkościennych nowe pojęcia: sztywność giętno-skrętna prętów i węzłów, rozdzielniki i przekazywniki, wykorzystywane wcześniej tylko w analizie ram zbudowanych z prętów litych.

W monografii wydanej w 1957 roku *Rutecki* [72], wykorzystując prace między innymi *Własowa*, *Gorbunowa* i *Strielbicka*, *Urbana*, *Kana* i *Panowko* [38] oraz *Umańskiego* [85], podaje sposób wyliczania wkładów złożonych z elementów cienkościennych, stosując metodę przemieszczeń. Autor rozważa układy prętów, których półki schodzących się w narożach elementów leżą w jednej płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny układu.

W wydanej w 1962 roku pracy *Byczkow* [10] rozpatruje płaskie układy prętów cienkościennych, w przypadku których zakłada się równość spaczeń i równowagę bimomentów. Obok metody sił i przemieszczeń stosuje metodę ognisk bimomentowych.

W pracy [39] *Kariakin* analizuje układy płaskie zgodne z założeniem Gorbunowa i Urbana. Wykorzystuje analogie pomiędzy skręcaniem skrępowanym a zginaniem z rozciąganiem pręta. Skręcanie sprowadza do problemu zginania z rozciąganiem, stosując obciążenie sprowadzone. Rozwiązuje przykłady o węzłach przesuwnych i nieprzesuwnych stosując metodę sił i metodę przemieszczeń.

W pracy [7] *Bielokurow* i *Zaks* analizują węzeł rusztu zbudowany z ceownika i dwuteownika. Starają się wyznaczyć wartość bimomentu w półkach dwuteownika, zakładając równość miary spaczenia w węźle.

Cywilin stosując rachunek macierzowy i metodę przemieszczeń analizował w pracy [19] cienkościennie układy przestrzenne. Wykorzystał założenia Gorbunowa a wynikowa macierz sztywności miała siedem stopni swobody.

W tym samym roku macierzowy sposób obliczania cienkościennych ram samochodowych podał *Neu* [61]. Podatność węzłów była określana za pomocą współczynników wyznaczanych doświadczalnie.

Podobne podejście do obliczania konstrukcji cienkościennych można znaleźć w pracach *Krajcinovica* [46].

Liniową macierz sztywności elementu cienkościennego można znaleźć w pracach *Meeka* [55] i *Szymczaka* [79].

W roku 1972 *Reill* opublikował pracę [70], w której opisuje analizę rusztów cienkościennych zakładając pełną blokadę deplanacji w węzłach. Otrzymał macierz sztywności elementu z czterema stopniami swobody w węźle, z uwzględnieniem deplanacji.

Analizą statyczną ortogonalnych rusztów o sztywnych węzłach złożonych z prętów cienkościennych zajmował się w roku 1973 *Michalak* [56]. Szczegółowo określił zależności pomiędzy wartościami naprężeń normalnych, które powstały w wyniku działania bimomentu, a wartościami naprężeń normalnych wynikających z działania momentu zginającego. W ob-

liczeniach wykorzystał założenia z prac Własowa i Gorbunowa. Określił błędy, jakie popełnia się przy obliczeniach konstrukcji rusztowych, przyjmując, iż elementy układu są idealnie cienkościennie (tzn. takie, które mają tylko sztywności skręcania skrzepowanego a sztywności skręcania swobodnego są równe zero).

Borsum i *Gallager* w roku 1970 w pracy [9] opracowują element skończony belkowy o siedmiu stopniach swobody w węźle z macierzą sztywności liniowej i macierzą sztywności geometrycznej.

W latach 1985 [92] i 1986 [93] *Waldron* wyprowadza macierz sztywności elementu dźwigara cienkościennego, wykorzystując odwrócenie macierzy podatności i równowagę elementu. Wyprowadzona przez Waldrona macierz sztywności elementu cienkościennego o przekroju otwartym odpowiada macierzy wyprowadzonej przez Reilla.

Jak wynika z dotychczas przytoczonej literatury, w numerycznej analizie układów cienkościennych o otwartym przekroju poprzecznym stosowano głównie (aż do końca lat sześćdziesiątych), w problemach skręcania model jednowymiarowy. Bazował on na teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym. Model taki miał zastosowanie tylko w przypadkach szczególnych, gdyż wynikał z daleko idących uproszczeń, dotyczących między innymi dystrybucji bimomentów w węzłach. W trakcie analizy zakładano na przykład brak deplanacji (utwierdzenie w węźle) lub jej całkowitą swobodę (połączenie przegubowe). Próbowano również przez analogię do zginania, stosować podział bimomentów w węźle zgodny ze sztywnością prętów na skręcania skrzepowane.

Tymczasem wpływ na deplanację przekrojów przywęzłowych prętów ma wiele czynników, takie jak: sposób skonstruowania węzłów układu, sztywność skrętną czy przekrój poprzeczny poszczególnych prętów w przekrojach przywęzłowych. Próby weryfikacji eksperymentalnej uzyskanych wyników na drodze teoretycznej spowodowały rozwój badań zarówno w zakresie doświadczalnym, jak i teoretycznym. Wpływ konstrukcji węzła i jego rodzaju na dystrybucje bimomentów w węźle okazał się ważnym elementem, na który należy zwracać uwagę w trakcie analizy złożonych konstrukcji cienkościennych.

Problem lokalnego spaczenia węzłów ram o zmiennej konstrukcji został poruszony przez *Vacharajittiphana* i *Trahaira* w pracy [87] już w roku 1974.

Rok później, w 1975 *Szmidt* opublikował wyniki swojej pracy poświęconej narożom cienkościennych układów ramowych o przekroju dwuteowym [78, 77]. Zaproponował, aby obydwie części składowe konstrukcji, czyli prętowe elementy cienkościenne i naroża (węzły) były rozważane oddzielnie. W przypadku prętów cienkościennych wykorzystał teorię skręcania Własowa. W trakcie analizy naroży o skończonych wymiarach posługiwał się metodą elementów skończonych (modelując je jako układy tarczowo-płytkowe), podając sposób obliczania macierzy sztywności naroży. Przeprowadzone przez *Szmidta* obliczenia numeryczne zostały potwierdzone przez jego autorskie badania eksperymentalne.

Na uwagę zasługuje praca *Morella* [59], z 1979 roku, poświęcona, podobnie jak praca *Szmidta*, wpływowi detali konstrukcyjnych węzła, w ramowych układach cienkościennych, na rozkład bimomentów w węźle.

Na początku lat osiemdziesiątych problemem rozkładu spacjeń w węzłach zajmowali się *Baigent* i *Hancock* (1982) [3], uwzględniając fakt, iż deplanacja zależy od wymiarów przekroju poprzecznego, długości elementu i konstrukcji węzła.

Yang i *McGuire* w 1984 [101] przedstawili procedurę, którą można wykorzystać w analizie ram przestrzennych z uwzględnieniem częściowej blokady deplanacji na końcach elementów. Procedura ta wykorzystuje koncepcje deplanacji sprężystej, wprowadza termin *wskaźnika deplanacji*, opisującego rozkład deplanacji na każdym z końców elementu. Wskaźnik ten jest zdefiniowany jako współczynnik deformacji wynikającej z deplanacji na końcu elementu, gdy jest ona częściowo ograniczana do deformacji tego samego końca, w przypadku pełnej jej swobody. Na podstawie tej koncepcji opracowali oni procedurę kondensacji statycznej do macierzy sztywności, z uwzględnieniem dodatkowego stopnia swobody w postaci deplanacji, eliminując tym samym problem nieciągłego rozkładu deplanacji w węzłach (przy czym nieciągły rozkład deplanacji jest zdefiniowany jako zamiana wartości deplanacji na końcach dwóch połączonych w węźle elementów). Podobną procedurę zaproponowali także *Mohammed* i *Frank* w 1995 roku

w pracy [58]. Wyniki z pracy [101] zostały wykorzystane przez *Cichonia*, *Plucińskiego* i *Waszczuka* do analizy wyboczenia ram cienkościennych [16].

W roku 1985 *Sharman* opublikował wyniki badań teoretycznych [74], nawiązując bardzo wyraźnie do pracy *Vacharajittiphana* i *Trahaira*.

W roku 1990, w pracy [17] *Coci* i *Gattas* przedstawili formułę macierzy sztywności elementu cienkościennego z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej. W 1991 roku *Krenk* i *Damkilde* [48] zajmowali się analizą teoretyczną węzłów, badanych już przez *Vacharajittiphana* i *Trahaira*, a także *Sharmana*.

Rok później wyniki badań dotyczące dystrybucji deplanacji w węzłach, wykorzystujące prace *Bagenta* i *Hanocka*, opublikowali *Petersen*, *Krenk* i *Damkilde* [62]. Podobna praca została opublikowana przez *Tonga* i *Zanga* w 2004 roku [84].

W 1995 roku ukazała się monografia *Waszczyszyna*, *Cichonia* i *Radwańskiej* [98], w której w szerokim zakresie była stosowana metoda elementów skończonych do analizy stateczności belek i ram cienkościennych.

W latach 1995–2005 opublikowano szereg prac dotyczących analizy statycznej i dynamicznej modeli belkowych, także o przekrojach niesymetrycznych, przy deformacji giętno-skrętnej [2, 26, 33, 36, 41, 42, 50].

Riddington, *Ali* i *Hamid* w 1996 roku opublikowali wyniki badań [71], dotyczących zachowania różnie stężonych węzłów ram, podobnych do tych, którymi zajmowali się *Vacharajittiphana* i *Trahaira*. Do badań stosowali program ANSYS.

Teoretyczne rozważania prowadzące do zamkniętych rozwiązań różnych podstawowych zagadnień mechaniki prętów cienkościennych zawarte są w publikacjach *Piechnika*, np. [63, 64]. Zdaniem autora, prace te są w szeregu takich znaczących publikacji polskich jak *Naleszkiewicza* [60] czy *Ruteckiego*.

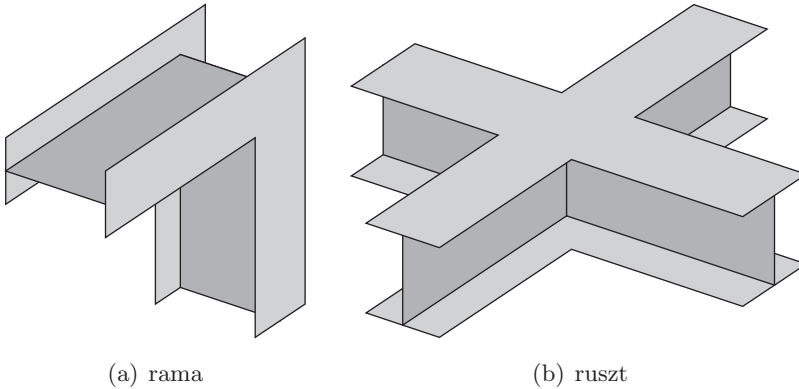
Podsumowując, można stwierdzić, że historia rozwoju metod obliczania konstrukcji cienkościennych jest długa i ciągle nie wydaje się być rozdziałem zamkniętym. Zapewne znaczący krok w analizie rzeczywistych konstrukcji cienkościennych mógł być dopiero wykonany przez wykorzysta-

wanie metody elementów skończonych. I tak też się stało, czego pewnym rezultatem jest również niniejsza praca.

1.2. Cel i zakres pracy

Zastosowanie teorii pręta cienkościennego do analizy ram jest możliwe tylko dla pewnych konstrukcji węzłów (zapewniających ciągłość spaczenia, rys. 1.1) spełniających warunki [64, 91]:

- geometryczne osie wszystkich prętów leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w tym samym punkcie,
- teoretyczny węzeł ramy wyznacza punkt przecięcia się osi zginania,
- pręty schodzą się w węzłach pod kątem prostym, leżą w jednej płaszczyźnie i mają tę samą wysokość,
- półki wszystkich prętów leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny ramy,
- pręty muszą mieć takie przekroje, aby można było przyjąć jednakową wartość pochodnej kąta skręcenia we wszystkich przywęzłowych przekrojach prętów schodzących się w węźle.



Rys. 1.1. Węzły umożliwiające stosowanie teorii pręta cienkościennego

Oznacza to, że w wielu przypadkach ramy złożone z prętów cienkościennych powinny być w zasadzie modelowane z wykorzystaniem elementów

skończonych powłokowych (*model powłokowy, 3D*), co jednakże znacznie podnosi koszt obliczeń. Dodatkowo znacznie utrudnia określenie sił przekrojowych w prętach (konieczne całkowanie naprężeń), które są potrzebne do wymiarowania projektowanej konstrukcji. Inną możliwością jest przyjęcie *modelu mieszanego* proponowanego w pracy, łączącego zalety dyskretyzacji elementami belkowymi, takie jak: mała liczba stopni swobody, łatwe obliczenie sił przekrojowych (*model belkowy, 1D*) i elementami powłokowymi (poprawna dystrybucja bimomentu w węzle ramy, łatwe modelowanie podparcia i obciążenia), nieznacznie podnosząc koszt obliczeń.

W konstrukcji cienkościennej wyróżnimy części (węzły ramy, podpory, miejsca przyłożenia obciążenia, miejsca z dodatkowymi wzmocnieniami konstrukcyjnymi) które traktować będziemy jako obiekty geometrycznie trójwymiarowe 3D i pozostałe części uważane za geometrycznie liniowe 1D. W modelu skończenie elementowym oznaczać to będzie dyskretyzację obszarów 3D przez elementy skończone powłokowe, a obszarów 1D przez prętowe elementy skończone cienkościenne. Podstawowym problemem jaki w tym przypadku powstaje jest złożenie tak różnie zdyskretyzowanych (to znaczy opisywanych różnymi modelami matematycznymi) części konstrukcji w jeden dyskretny system elementów skończonych, opisany układem równań równowagi MES.

Naturalnym sposobem postępowania jest skorzystanie z warunku ciągłości przemieszczeń translacyjnych na ściankach, wspólnych dla powłoki i belek cienkościennych

$$\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(b)}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

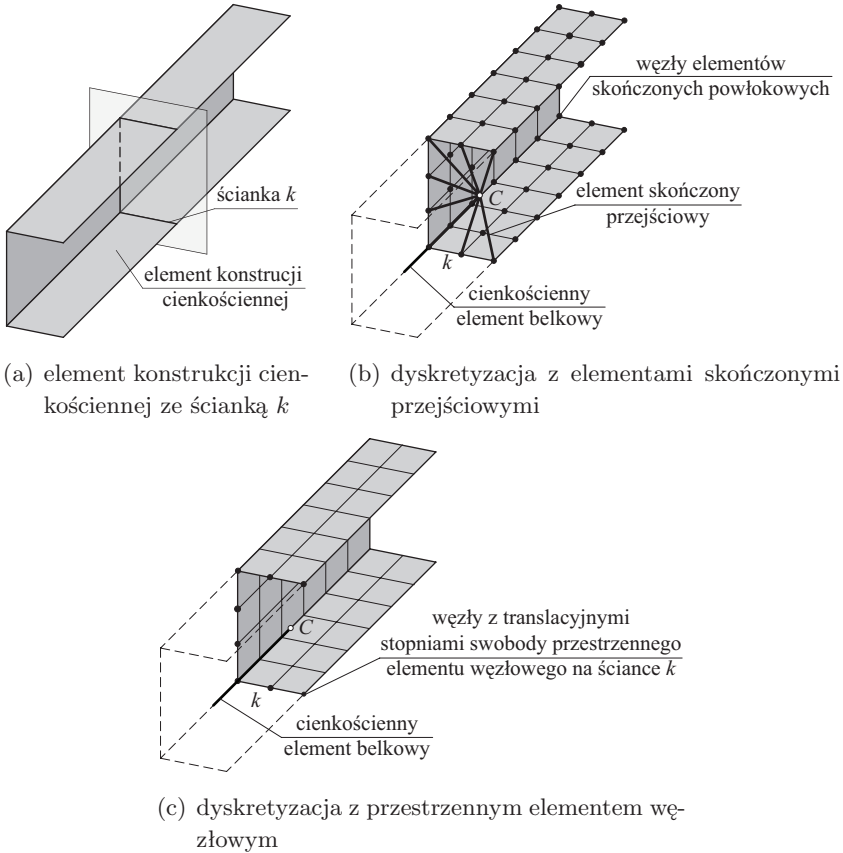
gdzie:

$\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})$ – wektor przemieszczeń węzła elementu powłokowego,

$\mathbf{u}^{(b)}(\mathbf{x})$ – wektor przemieszczeń węzła elementu belkowego.

W pracy zaproponowano dwie metody wykorzystania równań (1.1), zilustrowane na rys. 1.2.

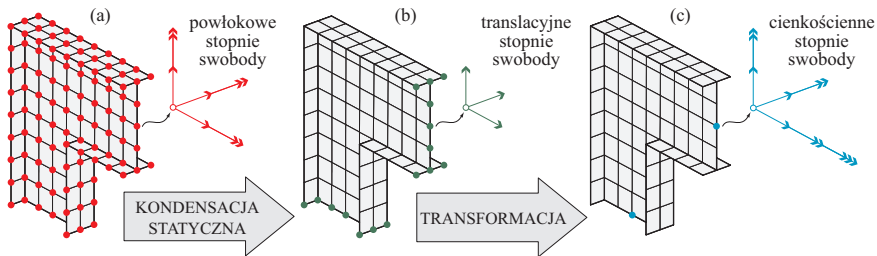
W metodzie pierwszej (rys. 1.2(b)), równanie (1.1) jest traktowane jako równanie więzów, włączone do równań równowagi MES poprzez odpowiednio zdefiniowaną funkcję kary. Konsekwencją takiego postępowania jest ko-



Rys. 1.2. Koncepcje dyskretyzacji skończone elementowej 1D/3D

nieczność wprowadzenia tzw. *elementów przejściowych* pomiędzy węzłami powłoki a węzłem cienkościennego elementu skończonego [44, 45]. Jest to metoda ogólna, możliwa do zastosowania przy rozwiązaniu zarówno zagadnień liniowych jak i nieliniowych. W pracy metodę tą zastosowano do analizy stateczności konstrukcji cienkościennych. Oryginalność postępowania będzie w tym przypadku polegać na sformułowaniu równań dla elementu przejściowego w ramach przyjętej teorii i jego implementacji w modelu MES.

Druga metoda (rys. 1.2(c)), wykorzystuje możliwości kondensacji statycznej prowadzącej do tzw. *przestrzennego elementu węzłowego* z translacyjnymi stopniami swobody na ściankach, łączących węzeł z prętami cienkościennymi. Następnie stopnie swobody przestrzennego elementu węzłowego transformuje się do cienkościennych belkowych stopni swobody wykorzystując równania (1.1).



Rys. 1.3. Obliczanie przestrzennego elementu węzłowego

Na rys. 1.3 pokazano schemat obliczania przestrzennego elementu węzłowego. Początkowo element ten ma węzły powłokowe z sześcioma stopniami swobody (a). Po kondensacji statycznej, otrzymamy element z węzłami o trzech translacyjnych stopniach swobody, umieszczonych na ściankach (b). Transformacja powoduje zastąpienie węzłów z translacyjnymi stopniami swobody przez węzły z siedmioma belkowymi stopniami swobody, po jednym na każdej ze ścianek (c).

Jest to dalsze rozwinięcie koncepcji liniowej analizy statycznej ram cienkościennych [13, 14, 43] przedstawionej w [15].

Idea przestrzennego elementu węzłowego (superelementu) była również wykorzystywana przez Szymczaka wraz z zespołem, i znalazła podsumowanie w rozprawie habilitacyjnej *Mikulskiego* [57] oraz w publikacjach [47, 49, 80, 81, 82, 83]. Należy jednakże podkreślić, że podejście to zostało zastosowane tylko do analizy prostych układów ramowych wykonanych z symetrycznych belek dwuteowych, a macierz sztywności przestrzennego elementu węzłowego była obliczana w sposób właściwy dla klasycznej metody przemieszczeń.

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie modeli matematycznych, a następnie modeli obliczeniowych skończone elementowych, dla dwóch opisanych metod pozwalających na analizę statyczną, stateczności i wybożenia przestrzennych ram cienkościennych o dowolnym przekroju poprzecznym otwartym. Wykonane obliczenia przykładowe i porównanie ich z obliczeniami wykorzystującymi model 3D jak również z obliczeniami w systemie ABAQUS [1] powinny wykazać efektywność proponowanych metod przy zachowaniu wymaganej dokładności obliczeń.

W zakres pracy wchodzi również opracowanie autorskiego oprogramowania AmFEM w systemie MATLAB [54] oraz programów SecPropGRAPH i SecPropFEM, pomocnych do obliczania charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych, niedostępnych w tablicach. Szczególnie dużo pracy wymagało opracowanie procedur do obliczania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych dla belki cienkościennej, które obliczono dokładnie w ramach przyjętych założeń. W tym zakresie skorzystano z obliczeń symbolicznych (oferowanych przez system MATLAB) i języka programowania PERL, wspierającego operacje z wykorzystaniem wyrażeń regularnych.

Układ pracy jest następujący.

W dalszym ciągu rozdziału pierwszego podano podstawowe założenia oraz spis ważniejszych oznaczeń.

W rozdziale drugim wyprowadzono w sposób ogólny przyrostowy układ równań równowagi MES dla problemu geometrycznie nieliniowego i fizycznie liniowego.

W rozdziale trzecim sformułowano podstawowe równania geometryczne i fizyczne dla teorii płyt *Reissnera-Mindlina* i belki o cienkościennym przekroju poprzecznym otwartym. Równania te w formie przyrostowej oraz odpowiednie wzory zdefiniowane w rozdziale drugim posłużyły do wyprowadzenia w rozdziale czwartym macierzy i wektorów dla elementów skończonych: powłokowego, belkowego i przejściowego.

W rozdziale piątym sformułowano procedurę obliczania macierzy sztywności dla przestrzennego elementu węzłowego oraz budowy stosownych równań równowagi MES dla tej metody analizy.

W rozdziale szóstym zawarto krótki opis metody *Newtona–Raphsona* rozwiązania nieliniowego problemu MES i opis metody rozwiązania zadań z wyboczenia.

Rozdział siódmy zawiera opis algorytmów autorskich programów wcześniej wymienionych: AmFEM do analizy konstrukcji metodą elementów skończonych, SecPropGRAPH do obliczania charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych otwartych wykorzystujący teorię grafów i SecPropFEM do obliczania charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych otwartych wykorzystujący metodę elementów skończonych.

Opracowane i oprogramowane dwie metody analizy konstrukcji cienkościennych zostały wykorzystane do przykładowych analiz statycznych, stateczności i wyboczenia zamieszczonych w rozdziale ósmym. W przykładach starano się określić pola efektywnego wykorzystania proponowanych metod analizy numerycznej i stopień dokładności obliczeń.

Rozprawę kończy podsumowanie efektów pracy i zwrócenie uwagi na elementy oryginalne. Podano też możliwe kierunki rozwoju tematu.

Do pracy dołączono cztery dodatki zawierające opisy programów komputerowych i składnię plików wejściowych oraz dodatek zawierający podstawowe informacje o wyrażeniach regularnych i języku programowania PERL.

Pracę kończą spis literatury oraz spisy rysunków i tabel.

1.3. Podstawowe założenia

Przyjęto następujące podstawowe założenia:

1. Obciążenie konstrukcji stanowią uogólnione siły statyczne, o ustalonej konfiguracji.
2. Materiał konstrukcji jest jednorodnym i izotropowym continuum materialnym.
3. Rozważane continuum materialne ma własności fizyczne liniowo-sprężyste (materiał Hooke'a).

4. Odształcenia są nieskończenie małe, lecz możliwe są duże przemieszczenia i duże gradienty przemieszczeń.
5. W metodzie elementów skończonych, konstrukcję dyskretyzowano elementami belkowymi cienkościennymi, wykorzystującymi założenia teorii Własowa, oraz elementami płytowymi Reissnera–Mindlina z dodatkowym szóstym stopniem swobody.
6. Korzystano z metody elementów skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym.
7. W konstrukcji wszystkie połączenia są spawane i nie rozważa się innych rodzajów połączeń.

W całej pracy konsekwentnie pominięto tradycyjnie używany indeks górny e dla oznaczenia elementu skończonego. Zdaniem autora poprawia to czytelność pracy, a czy rozważania w danym miejscu odnoszą się do elementu skończonego czy do konstrukcji wynika z kontekstu.

1.4. Ważniejsze oznaczenia

W pracy zastosowano następujące ważniejsze oznaczenia:

Operatory:

- $(\bullet)_{,x}, \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$ – pochodna cząstkowa po zmiennej x ,
- $\nabla(\bullet)$ – gradient,
- $\|\bullet\|$ – norma z wektora,
- \mathbf{L} – macierz operatorów różniczkowych.

Parametry i symbole:

- E – moduł Younga,
- E_r – zastępczy moduł Younga,
- G – moduł Kirchhoffa,
- ν – współczynnik Poissona,
- N – liczba stopni swobody konstrukcji,
- N_s – liczba stopni swobody konstrukcji po kondensacji statycznej,

- k – parametr funkcji kary,
- C – środek ciężkości przekroju cienkościennego,
- S – środek ścinania przekroju cienkościennego,
- λ – parametr obciążenia,
- t – czas uogólniony.

Wskaźniki i indeksy:

- L – stan liniowy,
- N – stan nieliniowy,
- $i, i + 1$ – stan w trakcie iteracji,
- G – punkt graniczny,
- B – punkt bifurkacji,
- e – element skończony,
- (c) – parametr lub symbol odnoszący się do continuum materialnego,
- (b) – parametr lub symbol odnoszący się do elementu skończonego belkowego,
- (s) – parametr lub symbol odnoszący się do elementu skończonego powłokowego,
- (t) – parametr lub symbol odnoszący się do elementu skończonego przejściowego,
- (j) – parametr lub symbol odnoszący się do przestrzennego elementu węzłowego.

Wektory i macierze:

- ε – wektor odkształceń,
- σ – wektor naprężeń,
- \mathbf{v} – wektor formy utraty stateczności,
- \mathbf{p} – wektor obciążenia elementu,
- \mathbf{P} – wektor obciążenia konstrukcji,
- \mathbf{f}_s – wektor sił wewnętrznych elementu,
- \mathbf{F}_s – wektor sił wewnętrznych konstrukcji,
- \mathbf{r} – wektor sił residualnych elementu,
- \mathbf{R} – wektor sił residualnych konstrukcji,
- \mathbf{q} – wektor stopni swobody elementu,

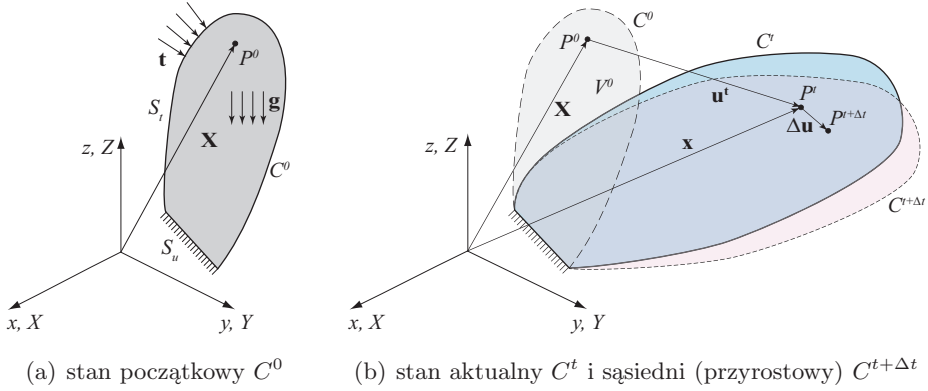
-
- \mathbf{Q} – wektor stopni swobody konstrukcji,
 - \mathbf{k}_0 – macierz sztywności liniowej elementu,
 - \mathbf{K}_0 – macierz sztywności liniowej konstrukcji,
 - \mathbf{k}_u – macierz sztywności przemieszczeniowej elementu,
 - \mathbf{K}_u – macierz sztywności przemieszczeniowej konstrukcji,
 - \mathbf{k}_σ – macierz sztywności naprężeniowej elementu,
 - \mathbf{K}_σ – macierz sztywności naprężeniowej konstrukcji,
 - \mathbf{k}_T – macierz styczna sztywności elementu,
 - \mathbf{K}_T – macierz styczna sztywności konstrukcji,
 - \mathbf{J} – macierz Jacobiego,
 - \mathbf{N} – macierz funkcji kształtu,
 - \mathbf{u} – wektor przemieszczeń,
 - \mathbf{X} – współrzędne punktu w konfiguracji początkowej,
 - \mathbf{x} – współrzędne punktu w konfiguracji aktualnej.

2. Przyrostowe równania równowagi MES

2.1. Równanie wariacyjne równowagi

Problemy rozważane w pracy należą do klasy problemów geometrycznie nieliniowych i w metodzie elementów skończonych dla ich efektywnego rozwiązania należy sformułować *przyrostowe równania równowagi*. Równania takie wyprowadzimy korzystając z *całkowitego opisu Lagrange'a* co oznacza przyjęcie kartezjańskiego układu współrzędnych materialnych, ustalonej konfiguracji odniesienia (którą będzie niezdeformowana konfiguracja początkowa) i naprężeń oraz odkształceń mierzonych w tej konfiguracji. Na rys. 2.1 pokazany jest ruch ciała (będącego obrazem matematycznym konstrukcji) w różnych stanach równowagi. Stan C^0 jest stanem początkowym równowagi, stan C^t jest aktualnym stanem równowagi (na początku przyrostu) a stan $C^{t+\Delta t}$ jest sąsiednim stanem równowagi (na końcu przyrostu).

Na rysunku tym V^0 i V^t są odpowiednio początkową i aktualną objętością ciała, S jest brzegiem ciała z wyróżnionymi częściami S_u i S_t ($S = S_u \cup S_t$ i $S_u \cap S_t = 0$), na których są zdefiniowane kinematyczne i statyczne warunki brzegowe, \mathbf{g} jest wektorem intensywności sił objętościowych i \mathbf{t} jest wektorem intensywności sił powierzchniowych. W końcu wektor \mathbf{x} określa położenie punktu P^0 w konfiguracji C^0 , wektor \mathbf{X} lokalizuje ten punkt (P^t) w konfiguracji C^t a wektor $\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}$ jest wektorem



Rys. 2.1. Trzy stany równowagi ciała

przemieszczeń. Na rysunku zaznaczono również wektor przyrostów przemieszczeń $\Delta \mathbf{u}$ występujący w zależności $\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \Delta \mathbf{u}$.

Zadaniem naszym jest wyznaczenie stanu ciała (przemieszczeń, odkształceń, naprężeń) w konfiguracji sąsiedniej $C^{t+\Delta t}$ przyjmując, że stan ciała w konfiguracji aktualnej C^t jest znany.

Ciało w stanie $C^{t+\Delta t}$ jest w równowadze, jeżeli spełnione jest równanie wariacyjne

$$\delta W_w^{(c)} + \delta W_w^{(t)} = \delta W_z, \quad (2.1)$$

w którym, mając na względzie przyszłą dyskretyzację skończenie elementową wyróżniono pracę sił wewnętrznych dla continuum (dyskretyzowanego elementami skończonymi powłokowymi i/lub belkowymi cienkościennymi) $\delta W_w^{(c)}$ oraz pracę wirtualną sił wewnętrznych dla elementów skończonych przejściowych $\delta W_w^{(t)}$. Przez δW_z oznaczono pracę wirtualną sił zewnętrznych (obciążeń).

W dalszym ciągu oddzielnie rozważymy prace wirtualne $\delta W_w^{(c)}$ i $\delta W_w^{(t)}$ oraz ich udział w przyrostowym równaniu równowagi metody elementów skończonych. Stosować będziemy notację macierzową *Voighta*.

2.1.1. Praca wirtualna $\delta W_w^{(c)}$

Pracę wirtualną $\delta W_w^{(c)}$ w stanie $C^{t+\Delta t}$ wyraża wzór

$$\delta W_w^{(c)} = \int_{V^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV^0, \quad (2.2)$$

w którym $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem odkształceń *Greena-Lagrange'a* i $\boldsymbol{\sigma}$ jest energetycznie z nim sprzężonym wektorem naprężeń *Pioli-Kirchhoffa II rodzaju*, a indeks górny T oznacza transpozycję.

Równanie (2.2) nie może być wprost wykorzystane, ponieważ stan ciała w konfiguracji $C^{t+\Delta t}$ jest nieznan. Procedura postępowania polega na przyjęciu zlinearyzowanego przyrostowego równania konstytutywnego oraz zachowania pod znakiem wariacji liniowej części przyrostu odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$. Oznaczając przez $\boldsymbol{\sigma}^t$ naprężenie w chwili t , a przez $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}$ w chwili $t + \Delta t$, przyrost naprężenia pomiędzy chwilami t i $t + \Delta t$ wynosi

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\sigma}^t = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cong \mathbf{D} \Delta \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

gdzie dla materiału liniowo sprężystego \mathbf{D} jest macierzą stałych materiałowych, a $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem przyrostów odkształceń. Wektor $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ możemy z kolei przedstawić w postaci sumy części liniowej $\Delta \mathbf{e}$ i części kwadratowej $\Delta \boldsymbol{\eta}$ ze względu na przyrosty przemieszczeń

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta}. \quad (2.4)$$

Wykorzystanie w (2.2) związków (2.3) i (2.4) oraz $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ prowadzi do zależności

$$\delta W_w^{(c)} \cong \int_{V^0} (\delta \Delta \mathbf{e})^T \mathbf{D} \Delta \mathbf{e} \, dV^0 + \int_{V^0} (\delta \Delta \boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^t \, dV^0 + \int_{V^0} (\delta \Delta \mathbf{e})^T \boldsymbol{\sigma}^t \, dV^0. \quad (2.5)$$

Wektor przyrostów odkształceń liniowych można formalnie zapisać w postaci

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}, \quad (2.6)$$

w którym wektor przyrostów przemieszczeń wynosi $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t$, a macierz \mathbf{L} jest pewną macierzą operatorów różniczkowych. Oznaczając

w dalszym ciągu przez \mathbf{N} wektor funkcji kształtu i przez \mathbf{q} wektor stopni swobody dla elementu skończonego, interpolację \mathbf{u} i $\Delta\mathbf{u}$ wyrażają wzory

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (2.7)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}, \quad (2.8)$$

gdzie:

\mathbf{u} – wektor uogólnionych funkcji przemieszczeń,

$\Delta\mathbf{u}$ – wektor przyrostów uogólnionych funkcji przemieszczeń,

\mathbf{N} – macierz funkcji kształtu,

\mathbf{q} – wektor stopni swobody elementu,

$\Delta\mathbf{q}$ – wektor przyrostów stopni swobody elementu.

Podstawiając (2.8) do (2.6) otrzymamy zależność

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{B}_L\Delta\mathbf{q}, \quad (2.9)$$

w której zdefiniowano macierz $\mathbf{B}_L = \mathbf{L}\mathbf{N}$.

Wykorzystując powyższe zależności we wzorze (2.5) na pracę wirtualną $\delta W_w^{(c)}$ dla elementu skończonego otrzymano równania [22]:

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \mathbf{D}\Delta\mathbf{e} dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L\Delta\mathbf{q}, \quad (2.10)$$

gdzie \mathbf{k}_L jest macierzą sztywności przyrostową

$$\mathbf{k}_L = \int_{V^0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV^0; \quad (2.11)$$

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_\sigma\Delta\mathbf{q}, \quad (2.12)$$

z macierzą początkowych naprężeń (lub krótko: macierzą geometryczną) \mathbf{k}_σ

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_{V^0} \mathbf{B}_N^T \boldsymbol{\Gamma}^t \mathbf{B}_N dV^0, \quad (2.13)$$

w której naprężenia Pioli–Kirchhoffa II rodzaju są przedstawione w formie macierzowej \mathbf{T}^t , a postać macierzy zróżniczkowanych funkcji kształtu \mathbf{B}_N wynika z aproksymacji skończenie elementowej wektora przyrostów odkształceń nieliniowych $\Delta\boldsymbol{\eta}$;

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{f}, \quad (2.14)$$

gdzie \mathbf{f} jest wektorem sił wewnętrznych

$$\mathbf{f} = \int_{V^0} \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0. \quad (2.15)$$

2.1.2. Praca wirtualna $\delta W_w^{(t)}$

Równanie więzów (1.1), zapisane w postaci

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^{(b)}, \quad (2.16)$$

może być wprowadzone do dyskretyzacji skończenie elementowej na wiele sposobów [11, 89]. W pracy wykorzystano metodę funkcji kary [69] definiując pracę wirtualną $\delta W_w^{(t)}$ w stanie $C^{t+\Delta t}$, przedstawiającą wkład równania więzów do opisu ogólnej sztywności konstrukcji, zależnością

$$\delta W_w^{(t)} = k \cdot \delta (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})^T (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = k \cdot (\delta\Delta\mathbf{r}^T \mathbf{r} + \delta\Delta\mathbf{r}^T \Delta\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

gdzie \mathbf{r} jest wektorem równań więzów w chwili t a k jest parametrem kary. Równanie więzów wyraża warunek zgodności z wagą k przemieszczeń uogólnionych dla dowolnego punktu, wspólnego belki i powłoki. Wektor przyrostu funkcji kary $\Delta\mathbf{r}$ możemy przedstawić w postaci sumy części liniowej $\Delta\boldsymbol{\rho}$ i kwadratowej $\Delta\mathbf{v}$ względem przyrostów przemieszczeń uogólnionych

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\boldsymbol{\rho} + \Delta\mathbf{v}, \quad (2.18)$$

co po linearyzacji prowadzi do zależności analogicznej do (2.5)

$$\delta W_w^{(t)} \cong k \cdot (\delta\Delta\boldsymbol{\rho})^T \Delta\boldsymbol{\rho} + k \cdot (\delta\Delta\mathbf{v})^T \mathbf{r} + k \cdot (\delta\Delta\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{r} \quad (2.19)$$

Podobnie jak to miało miejsce przy rozważaniu pracy wirtualnej $\delta W_w^{(c)}$ również i obecnie możemy zdefiniować pojedynczy element skończony przejściowy z wektorem stopni swobody $\mathbf{q}^{(t)}$ pomiędzy węzłem belki cienkościennej i węzłem powłoki co pozwala formalnie zapisać składowe z równania (2.19) w formie:

$$k \cdot (\delta \Delta \boldsymbol{\rho})^T \Delta \boldsymbol{\rho} = \left(\delta \Delta \mathbf{q}^{(t)} \right)^T \mathbf{k}_L^{(t)} \Delta \mathbf{q}^{(t)}, \quad (2.20)$$

z macierzą sztywności przyrostową $\mathbf{k}_L^{(t)}$;

$$k \cdot (\delta \Delta \mathbf{v})^T \mathbf{r} = \left(\delta \Delta \mathbf{q}^{(t)} \right)^T \mathbf{k}_\sigma^{(t)} \Delta \mathbf{q}^{(t)}, \quad (2.21)$$

gdzie $\mathbf{k}_\sigma^{(t)}$ jest macierzą geometryczną;

$$k \cdot (\delta \Delta \boldsymbol{\rho})^T \mathbf{r} = \left(\delta \Delta \mathbf{q}^{(t)} \right)^T \mathbf{f}^{(t)}, \quad (2.22)$$

gdzie $\mathbf{f}^{(t)}$ jest wektorem sił wewnętrznych.

2.1.3. Praca wirtualna δW_z

Pracę wirtualną obciążenia w stanie $C^{t+\Delta t}$ wyraża zależność

$$\delta W_z = \int_{V^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{g}^{t+\Delta t} dV^0 + \int_{S_t^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} dS^0, \quad (2.23)$$

która po wykorzystaniu (2.8) przyjmie postać

$$\delta W_z \cong (\delta \Delta \mathbf{q})^T \left(\mathbf{p}_g^{t+\Delta t} + \mathbf{p}_t^{t+\Delta t} \right), \quad (2.24)$$

gdzie $\mathbf{p}_g^{t+\Delta t}$ jest wektorem węzłowych sił objętościowych

$$\mathbf{p}_g^{t+\Delta t} = \int_{V^0} \mathbf{N}^T \mathbf{g}^{t+\Delta t} dV^0, \quad (2.25)$$

a $\mathbf{p}_t^{t+\Delta t}$ jest wektorem węzłowych sił powierzchniowych

$$\mathbf{p}_t^{t+\Delta t} = \int_{S_t^0} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} dS^0. \quad (2.26)$$

2.2. Przyrostowe równanie równowagi MES dla continuum

Przyrostowe równanie równowagi dla elementu skończonego continuum (powłoki, belki cienkościennej) otrzymamy z równania wariacyjnego (2.1), korzystając z zależności (2.10–2.15) i (2.23–2.26)

$$(\delta\Delta\mathbf{q})^T (\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma) \Delta\mathbf{q} = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \left(\mathbf{p}_g^{t+\Delta t} + \mathbf{p}_t^{t+\Delta t} - \mathbf{f} \right). \quad (2.27)$$

Identyczność ta musi być spełniona dla dowolnej wariacji przyrostu przemieszczeń, co prowadzi do równania równowagi dla elementu skończonego w formie

$$(\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{p}_g^{t+\Delta t} + \mathbf{p}_t^{t+\Delta t} - \mathbf{f}. \quad (2.28)$$

Macierz sztywności przyrostową można przedstawić w postaci sumy macierzy

$$\mathbf{k}_L = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_U, \quad (2.29)$$

w wyniku rozkładu macierzy \mathbf{B}_L na sumę macierzy tak, że macierz \mathbf{B}_U jest zależna od wektora przemieszczeń \mathbf{q}

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_U(\mathbf{q}). \quad (2.30)$$

Macierz \mathbf{k}_0 jest macierzą sztywności liniową a \mathbf{k}_U jest macierzą sztywności początkowych przemieszczeń. Sumę macierzy sztywności

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_U + \mathbf{k}_\sigma, \quad (2.31)$$

nazywa się macierzą sztywności stycznej (macierzą styczną).

Agregując elementy skończone w jeden układ dyskretny otrzymamy przyrostowy układ równań równowagi MES dla konstrukcji w postaci

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{F}, \quad (2.32)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_g^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_t^{t+\Delta t}, \quad (2.33)$$

w którym dużymi literami oznaczono globalną macierz styczną i globalne wektory dla całej konstrukcji.

W przypadku dyskretyzacji konstrukcji elementami skończonymi powłokowymi, belkowymi i przejściowymi, udział tych ostatnich w macierzy globalnej sztywności stycznej i w wektorze globalnym sił wewnętrznych w (2.32) będzie dokonywany przez odpowiednią, dodatkową procedurę agregacji.

3. Podstawowe równania dla powłoki płaskiej i belki cienkościennej

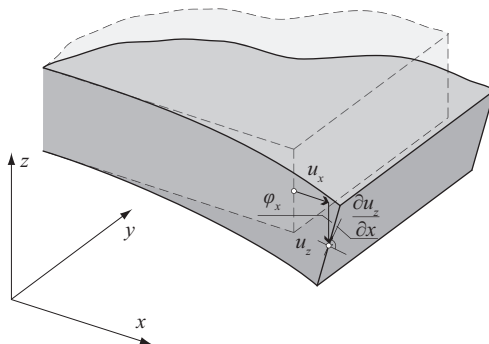
Z postaci wzorów wyprowadzonych w punktach 2.1.1. i 2.2. dla macierzy stycznej \mathbf{k}_T i wektora sił wewnętrznych \mathbf{f} wynika, że do ich wyznaczenia konieczna jest znajomość równań geometrycznych, a w szczególności wektorów przyrostów $\Delta\mathbf{e}$ i $\Delta\boldsymbol{\eta}$ oraz ich wariacji. W przypadku elementu skończonego powłokowego pozwolą one na obliczenie macierzy \mathbf{B}_L (lub \mathbf{B}_0 i \mathbf{B}_U) oraz \mathbf{B}_N i bezpośrednio skorzystanie z zależności (2.11, 2.13 i 2.15). Natomiast, przy definiowaniu elementu skończonego cienkościennego zostaną one wykorzystane w specjalnej procedurze obliczania macierzy stycznej i wektora sił wewnętrznych. Płaski element skończony powłokowy sformułujemy korzystając z teorii płyt *Reissnera–Mindlina* [6] wprowadzając dodatkowo niezależny obrót wokół normalnej do powierzchni środkowej.

3.1. Płyta *Reissnera–Mindlina*

3.1.1. Pole przemieszczeń

Na rys. 3.1 pokazano przemieszczenia płyty w płaszczyźnie (x, z) . Analogiczne przemieszczenia występują w płaszczyźnie (y, z) . Wektor niezależnych uogólnionych przemieszczeń na powierzchni środkowej składa się z trzech translacji u_x^0, u_y^0, u_z^0 i dwóch obrotów normalnej φ_x, φ_y

$$\mathbf{u}^0 = \{u_x^0 \quad u_y^0 \quad u_z^0 \quad \varphi_x \quad \varphi_y\}, \quad (3.1)$$



Rys. 3.1. Hipoteza kinematyczna Reissnera–Mindlina

Zgodnie z tą hipotezą wektor przemieszczeń translacyjnych

$$\mathbf{u} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\} \quad (3.2)$$

na powierzchni równo oddalonej od powierzchni środkowej o wartość współrzędnej z , jest wyznaczony wzorami [66]

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_x^0(x, y) - z \cdot \varphi_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= u_y^0(x, y) - z \cdot \varphi_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= u_z^0(x, y). \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1.2. Równania geometryczne

Pole odkształceń zdefiniujemy przyjmując tensor odkształceń *Greena-Lagrange'a* w postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} \cdot u_{j,k}), \\ i = j = k &= x, y, z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Korzystając z (3.3) i (3.4), wektor niezerowych składowych tensora odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} \quad (3.5)$$

jest dany w postaci

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right)^2 + z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right)^2 - z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \\
 \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \\
 \gamma_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \varphi_y, \\
 \gamma_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial u_z^0}{\partial y} - \varphi_x.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dla celów budowy macierzy i wektorów elementów skończonych konieczna jest znajomość wektora uogólnionych odkształceń na powierzchni środkowej [97]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{ \varepsilon_{xx}^0 \quad \varepsilon_{yy}^0 \quad \gamma_{xy}^0 \quad \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{xz}^0 \quad \gamma_{yz}^0 \} \tag{3.7}$$

o współrzędnych

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^0(x, y) &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right)^2, \\
 \varepsilon_{yy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right)^2, \\
 \gamma_{xy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial y}, \\
 \gamma_{xz}^0(x, y) &= \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \varphi_y, \\
 \gamma_{yz}^0(x, y) &= \frac{\partial u_z^0}{\partial y} - \varphi_x, \\
 \kappa_{xx}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{yy}(x, y) &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \\ \kappa_{xy}(x, y) &= \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Zależność pomiędzy wektorem odkształceń uogólnionych na powierzchni środkowej (3.7) a wektorem odkształceń (3.5) ma postać

$$\varepsilon(x, y, z) = \mathbf{H}(z) \varepsilon^0(x, y), \quad (3.9)$$

gdzie \mathbf{H} jest macierzą w postaci

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Mając zależności na odkształcenia uogólnione (3.8), możemy wyliczyć ich przyrosty

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{xx}^0(x, y) &= \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right)^2, \\ \Delta \varepsilon_{yy}^0(x, y) &= \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right)^2, \\ \Delta \gamma_{xy}^0(x, y) &= \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \\ &\quad + \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\kappa_{xx}(x, y) &= \Delta \frac{\partial\varphi_y}{\partial x}, \\
\Delta\kappa_{yy}(x, y) &= -\Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial y}, \\
\Delta\kappa_{xy}(x, y) &= \Delta \frac{\varphi_y}{\partial y} - \Delta \frac{\varphi_x}{\partial x}, \\
\Delta\gamma_{xz}^0(x, y) &= \Delta\varphi_y + \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x}, \\
\Delta\gamma_{yz}^0(x, y) &= \Delta\varphi_x + \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

a następnie podzielić je na części liniową i nieliniową względem gradientów przyrostów według wzoru

$$\Delta\varepsilon^0 = \Delta\mathbf{e}^0 + \Delta\boldsymbol{\eta}^0, \tag{3.12}$$

otrzymując ostatecznie wektory przyrostów odkształceń liniowych i nieliniowych

$$\Delta\mathbf{e}^0 = \begin{bmatrix} \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \\ \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \\ \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \\ \Delta \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} \\ -\Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} \\ \Delta \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} - \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \\ \Delta\varphi_y + \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \\ -\Delta\varphi_x + \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\Delta\boldsymbol{\eta}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right)^2 \\ \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

3.1.3. Uwzględnienie obrotu wokół normalnej do powierzchni środkowej

Teoria płyt Reissnera–Mindlina pozwala opisać pięć niezależnych przemieszczeń w powierzchni środkowej płyty (trzy translacje i dwa obroty). W przypadku budowy modelu skończenie elementowego wymagającego trzeciego obrotu, wokół normalnej do powierzchni środkowej (ang. *drilling rotation*), należy uzupełnić kinematykę modelu uwzględniając ten obrót

$$\varphi_z(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right). \quad (3.15)$$

W pracy zastosowano podejście zaproponowane przez *Hughes'a* i *Brezziego* [34], traktujące obrót wokół normalnej jako kolejne niezależne przemieszczenie i wprowadzono je rozszerzając pracę wirtualną sił wewnętrznych metodą funkcji kary [69]. W przypadku continuum zdyskretyzowanego elementami płytowymi z sześcioma stopniami swobody w węźle, takie postępowanie prowadzi do równania wariacyjnego (2.1) w rozszerzonej postaci

$$\delta \widehat{W}_w^{(c)} + \delta W_w^{(t)} = \delta W_z, \quad (3.16)$$

w którym:

$$\delta \widehat{W}_w^{(c)} = \delta W_w^{(c)} + \delta W_w^{(f)}, \quad (3.17)$$

gdzie $\delta W_w^{(f)}$ jest wkładem do wariacji pracy sił wewnętrznych składnika wynikającego z funkcji kary.

Stosując metodę funkcji kary otrzymamy zależność, która w formie przyrostowej będzie miała postać

$$\begin{aligned} \delta W_w^{(f)} \cong k \cdot G \int_{V^0} & \left(\frac{1}{2} \left(\delta \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \delta \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. - \delta \Delta \varphi_z \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right) - \Delta \varphi_z \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie G jest modułem Kirchhoffa. Parametr kary k powinien być ustalony drogą prób [67].

Podstawiając zależność (2.8) do (3.18) otrzymamy

$$k \cdot G \int_{V^0} \left(\frac{1}{2} \left(\delta \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \delta \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right) - \delta \Delta \varphi_z \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right) - \Delta \varphi_z \right) = (\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_F \Delta \mathbf{q}, \quad (3.19)$$

gdzie \mathbf{k}_F jest dodatkiem do macierzy stycznej w postaci

$$\mathbf{k}_F = k \cdot G \int_{V^0} \mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F dV^0. \quad (3.20)$$

W końcu, macierz sztywności stycznej dla płaskiego powłokowego elementu skończonego będzie wynosiła

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma + \mathbf{k}_F = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_U + \mathbf{k}_\sigma + \mathbf{k}_F. \quad (3.21)$$

3.1.4. Równania fizyczne

W przypadku materiału izotropowego i sprężystego równanie fizyczne jest dane wzorem

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.22)$$

z wektorami odkształceń i naprężeń w postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \}, \quad (3.23)$$

oraz macierzą sprężystości

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

gdzie:

E – moduł Younga,

ν – współczynnik Poissona.

Dodatkowo, dla celów budowy macierzy i wektorów płytowych elementów skończonych konieczna jest znajomość macierzy konstytutywnej określonej wzorem

$$\mathbf{D}^0 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{H}(z)^T \mathbf{D} \mathbf{H}(z) dz, \quad (3.25)$$

i wektora uogólnionych naprężeń zredukowanych do powierzchni środkowej $\boldsymbol{\sigma}^0$ sprzężonego z wektorem odkształceń (3.7), który ma składowe

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \{\sigma_{xx}^0 \quad \sigma_{yy}^0 \quad \tau_{xy}^0 \quad v_{xx} \quad v_{yy} \quad v_{xy} \quad \tau_{xz}^0 \quad \tau_{yz}^0\}. \quad (3.26)$$

Naprężenia te są liczone według zależności

$$\boldsymbol{\sigma}^0(x, y) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{H}(z)^T \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) dz, \quad (3.27)$$

gdzie t jest grubością płyty.

3.2. Belka cienkościenna

3.2.1. Pole przemieszczeń

Wektor przemieszczeń całkowitych \mathbf{u} punktu przekroju poprzecznego jest sumą przemieszczeń liniowych (translacyjnych) \mathbf{u}_0 i przemieszczeń od obrotu ($\mathbf{X} - \mathbf{x}$)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + (\mathbf{X} - \mathbf{x}). \quad (3.28)$$

W wektorze \mathbf{u}^0 zawarte są przemieszczenia przekroju poprzecznego jako bryły sztywnej i przemieszczenie spaczenia

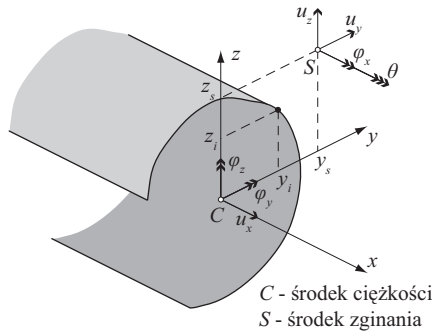
$$\mathbf{u}^0 = \{u_x^0 + \omega \cdot \theta \quad u_y^0 \quad u_z^0\}, \quad (3.29)$$

gdzie:

θ – pochodna kąta skręcenia,

ω – funkcja spaczenia.

Przyjęte przemieszczenia, układ współrzędnych głównych centralnych (x, y, z) przekroju poprzecznego oraz położenie środków ciężkości i zginania pokazano na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Parametry przemieszczeniowe przekroju poprzecznego otwartego

Oś x jest osią ciężkości pręta a osie (y, z) są osiami głównymi centralnymi przekroju poprzecznego. Przemieszczenia u_x^0 , u_y^0 i u_z^0 opisują sztywną translację przekroju poprzecznego odpowiednio w kierunku x – środka ciężkości C , i w kierunkach y i z – środka zginania S . Kąty φ_x , φ_y i φ_z są z kolei kątami sztywnych obrotów wokół osi x w środku zginania i y oraz z w środku ciężkości. Stosownie do teorii pręta cienkościennego spaczenie jest definiowane przez iloczyn pochodnej kąta skręcenia $\theta \equiv \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$ i funkcji spaczenia ω . Należy zauważyć, że przemieszczenia u_x^0 , u_y^0 , u_z^0 oraz θ są funkcjami tylko x .

W literaturze wykazano, że w analizie stateczności konstrukcji prętowych istotną rolę może odgrywać uwzględnienie przemieszczeń od obrotów skończonych (np. [73]), i fakt ten zostanie w pracy uwzględniony, wykorzystując pracę [40].

Wektor obrotów skończonych $\boldsymbol{\varphi}$ jest zdefiniowany przez wielkość obrotu $\varphi = \|\boldsymbol{\varphi}\|$ i oś obrotu (lub kierunek w przestrzeni) $r = \frac{\boldsymbol{\varphi}}{\|\boldsymbol{\varphi}\|}$. Do opisu obrotów skończonych wykorzystano wektor obrotów $\boldsymbol{\varphi}$ do zdefiniowania macierzy obrotów. W tym celu określono najpierw macierz skośnie symetryczną \mathbf{S} związaną z $\boldsymbol{\varphi}$ za pomocą relacji [1]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} &= \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \text{ dla dowolnego } \mathbf{v}. \quad (3.30)$$

Oznaczając współrzędne wektora $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z\}$, macierz \mathbf{S} przyjmie postać

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Macierz obrotu \mathbf{C} jest funkcją wykładniczą \mathbf{S} opisaną wzorem

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \exp(\mathbf{S}), \\ \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \mathbf{S} + \frac{1}{2}\mathbf{S}^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Jest ona również macierzą ortogonalną tzn. $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$. Całkowity obrót skończony jest złożeniem nieskończenie małych obrotów $\left(\frac{\varphi_x}{n}, \frac{\varphi_y}{n}, \frac{\varphi_z}{n}\right)$, gdzie n jest dużą liczbą całkowitą, co można zapisać w postaci zależności

$$\mathbf{C}_n = \Delta\mathbf{C}_n \cdot \Delta\mathbf{C}_{n-1} \cdot \dots \cdot \Delta\mathbf{C}_1, \quad (3.33)$$

lub w formie rekurencyjnej

$$\mathbf{C}_n = \Delta\mathbf{C}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1}. \quad (3.34)$$

Należy podkreślić, że iloczyn $\Delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$, interpretowany jako nałożenie skończonego obrotu $\Delta\mathbf{C}$ na skończony obrót \mathbf{C} , jest nieprzemienne, tzn. $\Delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \Delta\mathbf{C}$.

Wykorzystując liniową część macierzy obrotu \mathbf{C} , transformacja wektor początkowego \mathbf{x} przekroju cienkościennego spowodowana małym, lecz skończonym obrotem wyraża się zależnością

$$\mathbf{x}_1 \cong (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E}, \quad (3.35)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = \{0 \quad y \quad z\}, \quad \mathbf{E} = \{0 \quad y_s \quad z_s\},$$

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varphi_z}{n} & \frac{\varphi_y}{n} \\ \frac{\varphi_z}{n} & 0 & \frac{-\varphi_x}{n} \\ \frac{-\varphi_y}{n} & \frac{\varphi_x}{n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\varphi_x}{n} \\ 0 & \frac{\varphi_x}{n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Kolejną transformację wektora \mathbf{x}_1 można obliczyć z zależności

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n) \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n)^2 \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n) \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E}. \quad (3.37)$$

W końcu, dla n -tego obrotu otrzymamy

$$\mathbf{x}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n)^n \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n)^{n-1} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E} - \dots +$$

$$- (\mathbf{I} + \mathbf{S}_n) \cdot \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E}. \quad (3.38)$$

Stosując teraz do wzoru (3.38) twierdzenie o rozkładzie dwumianu i pomijając wyrazy wyższego rzędu niż dwa, zależność na \mathbf{x}_n przyjmie postać

$$\mathbf{x}_n \cong \left(\mathbf{I} + n \cdot \mathbf{S}_n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \mathbf{S}_n^2 \right) \cdot \mathbf{x} - n \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E} -$$

$$- (1 + 2 + \dots + n-1) \cdot \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{E}. \quad (3.39)$$

Dla n dążącego do nieskończoności, \mathbf{x}_n zmierza do \mathbf{X} określającego pozycję wektora \mathbf{x} na skutek obrotów φ_x , φ_y i φ_z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{X},$$

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{S} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^2 \right) \cdot \mathbf{x} - \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.40)$$

gdzie \mathbf{S} jest w postaci (3.31), a \mathbf{A} ma formę

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_x \\ 0 & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Podstawienie (3.40) do zależności (3.28) prowadzi do końcowego wzoru dla opisu całkowitego pola przemieszczeń przekroju cienkościennego

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \left(\mathbf{S} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^2 \right) \cdot \mathbf{x} - \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.42)$$

Wektor \mathbf{u} ze wzoru (3.42) jest sumą wektorów od przemieszczeń translacyjnych i obrotów. Z kolei wektor obrotu jest złożony z części liniowej i kwadratowej (części podkreślone). W dalszej części pracy przemieszczenia związane z częścią kwadratową oznaczono daszkiem tak, że współrzędne wektora \mathbf{u} można zapisać w formie

$$\mathbf{u} = \{ \bar{u}_x + \hat{u}_x \quad \bar{u}_y + \hat{u}_y \quad \bar{u}_z + \hat{u}_z \}. \quad (3.43)$$

Przemieszczenia dowolnego punktu przekroju cienkościennego otrzymano rozpisując zależność (3.42)

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(x, y, z) &= u_x^0 + z \cdot \varphi_y - y \cdot \varphi_z + \omega \cdot \theta, \\ \bar{u}_y(x, y, z) &= u_y^0 - (z - z_S) \cdot \varphi_x, \\ \bar{u}_z(x, y, z) &= u_z^0 + (y - y_S) \cdot \varphi_x, \end{aligned} \quad (3.44)$$

oraz

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left((y - y_S) \cdot \varphi_x \cdot \varphi_y + (z - z_S) \cdot \varphi_x \cdot \varphi_z \right), \\ \hat{u}_y(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(-y \cdot \left(\varphi_x^2 + \varphi_z^2 \right) - z \cdot \varphi_y \cdot \varphi_z + y \cdot \varphi_x^2 \right), \\ \hat{u}_z(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(-y \cdot \varphi_y \cdot \varphi_z - z \cdot \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \right) + z \cdot \varphi_x^2 \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.2.2. Równania geometryczne

Pole odkształceń zdefiniujemy przyjmując tensor odkształceń Greena-Lagrange'a w postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left((\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{,j} + (\bar{u}_j + \hat{u}_j)_{,i} + (\bar{u}_i + \hat{u}_i)_{,k} \cdot (\bar{u}_j + \hat{u}_j)_{,k} \right), \\ i = j = k &= x, y, z. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Korzystając z (3.43 do 3.45) i (3.46) oraz uwzględniając dodatkowo, że

$$\varphi_y = -\frac{\partial u_z^0}{\partial x}, \quad \varphi_z = \frac{\partial u_y^0}{\partial x}, \quad \theta = \frac{\partial u_x^0}{\partial x}, \quad (3.47)$$

wektor niezerowych składowych tensora odkształceń

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz}\}, \quad (3.48)$$

jest dany w postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \omega \cdot \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_y^0}{\partial x} - (z - z_s) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} + (y - y_s) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(-(y - y_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right) + (z - z_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & -\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - (z - z_s) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. - z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \omega \cdot \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} \right) \cdot \left(-\frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} + (y - y_s) \cdot \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right) + \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right) - y_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xz} = & -\frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + (y - y_s) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \right. \\
& - z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \omega \cdot \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} \left. \right) \cdot \left(-\frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right) + \\
& + \left(\frac{\partial u_y^0}{\partial x} + (z - z_s) \cdot \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. + y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right) - z_s \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right) \right). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

W powyższych zależnościach pominięto $\left(\frac{\partial u_x^0}{\partial x} \right)^2$ jako wielkość małą w porównaniu z pozostałymi składnikami.

Mając zależności na odkształcenia uogólnione (3.49–3.51), możemy wyliczyć ich przyrosty i podzielić je na liniowe i nieliniowe względem gradientów przyrostów według wzoru

$$\Delta \varepsilon = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta}, \tag{3.52}$$

otrzymując ostatecznie wektory przyrostów odkształceń liniowych

$$\Delta \mathbf{e} = \{ \Delta e_{xx} \quad \Delta e_{xy} \quad \Delta e_{xz} \}, \tag{3.53}$$

i nieliniowych

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = \{ \Delta \eta_{xx} \quad \Delta \eta_{xy} \quad \Delta \eta_{xz} \}. \tag{3.54}$$

Wzory dla składowych $\Delta \mathbf{e}$ i $\Delta \boldsymbol{\eta}$ są umieszczone na stronach 52–57.

3.2.3. Równania fizyczne

Równanie fizyczne ma formę (3.22) w której wektory odkształceń i naprężeń mają postać

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \{ \varepsilon_{xx} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \}, \\
\boldsymbol{\sigma} &= \{ \sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \}, \tag{3.55}
\end{aligned}$$

a macierz sprężystości wynosi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

gdzie E_r jest zastępczym modułem Younga, $E_r = \frac{E}{1 - \nu^2}$ [63].

$$\begin{aligned}
\Delta e_{xx} = & \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - y \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - z \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \omega \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - 2 \cdot z \cdot z_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - 2 \cdot y \cdot y_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + z_S \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + z_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + z^2 \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z_S^2 \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + y \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - y_S \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - y_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + y_S^2 \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \varphi_x + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \varphi_x + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2},
\end{aligned}
\tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\Delta e_{xy} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x + \\
& - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{4} \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{4} \cdot z \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{1}{4} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{4} \cdot z \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

(3.58)

$$\begin{aligned}
\Delta e_{xz} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \\
& - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x + \frac{1}{4} \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \\
& - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x + \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \varphi_x,
\end{aligned}
\tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_{xx} = & \frac{1}{2} \cdot z_S^2 \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y_S^2 \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z^2 \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - z \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z_S \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - z \cdot z_S \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + y \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& - y_S \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - y \cdot y_S \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_{xy} = & -\frac{1}{2} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \\
& -\frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& -\frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \\
& -\frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y_S \cdot \Delta \varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \\
& -\frac{1}{4} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{3.61}$$

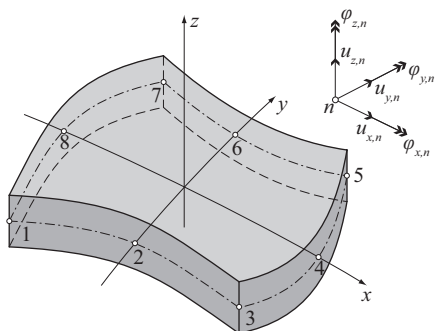
$$\begin{aligned}
\Delta\eta_{xz} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot \Delta \frac{\partial u_x^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \frac{1}{4} \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + \\
& - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_y^0}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \cdot y \cdot \Delta \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \Delta \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \\
& - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot z_S \cdot \Delta\varphi_x \cdot \Delta \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

4. Model powłokowo-belkowy MES konstrukcji cienkościennej

4.1. Macierz styczna i wektor sił wewnętrznych dla płaskiego elementu skończonego powłokowego

W pracy wykorzystany został płaski, zdegenerowany, izoparametryczny, element powłokowy, rys. 4.1. Omawiany element ma osiem węzłów na powierzchni środkowej i sześć stopni swobody w węźle

$$\Delta \mathbf{q}_n = \{ \Delta u_x^0 \quad \Delta u_y^0 \quad \Delta u_z^0 \quad \Delta \varphi_x \quad \Delta \varphi_y \quad \Delta \varphi_z \}_n. \quad (4.1)$$



Rys. 4.1. Powłokowy element skończony

Wektor stopni swobody dla całego elementu będzie równy

$$\Delta \mathbf{q} = \{\Delta \mathbf{q}_1 \quad \Delta \mathbf{q}_2 \quad \Delta \mathbf{q}_3 \quad \Delta \mathbf{q}_4 \quad \Delta \mathbf{q}_5 \quad \Delta \mathbf{q}_6 \quad \Delta \mathbf{q}_7 \quad \Delta \mathbf{q}_8\}. \quad (4.2)$$

Macierz funkcji kształtu

$$\mathbf{N}_n = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6]_n, \quad (4.3)$$

stanowią funkcje *Serendipa*, które w układzie współrzędnych znormalizowanych ($\xi, \eta, \zeta = 0$) mają postać [6]

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (\xi \cdot \xi_k + \eta \cdot \eta_k - 1)}{4}, \\ &\text{dla } i = 1, 3, 5, 7, \\ N_j(\xi, \eta) &= \frac{\xi_j^2 \cdot (1 + \xi \cdot \xi_m) \cdot (1 - \eta^2) + \eta_j^2 \cdot (1 + \eta \cdot \eta_j) \cdot (1 - \xi^2)}{2}, \\ &\text{dla } j = 2, 4, 6, 8, \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1], \\ \boldsymbol{\eta} &= [-1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zatem macierz funkcji kształtu dla całego elementu będzie wynosić

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_4 \quad \mathbf{N}_5 \quad \mathbf{N}_6 \quad \mathbf{N}_7 \quad \mathbf{N}_8]. \quad (4.6)$$

Element jest izoparametryczny, co oznacza, że

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{N}\mathbf{x}, \\ y &= \mathbf{N}\mathbf{y}, \\ z &= \zeta \cdot \frac{t}{2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie:

\mathbf{x}, \mathbf{y} – wektory współrzędnych węzłów elementu,
 t – grubość elementu.

Korzystając ze wzorów na uogólnione funkcje przemieszczeń (2.7) i ich przyrosty (2.8), oraz zależności (2.6) i (2.9), możemy policzyć macierze \mathbf{B}_L i \mathbf{B}_N korzystając ze wzorów (3.12–3.14)

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & \mathbf{N} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Macierz \mathbf{T}^t ze wzoru (2.13) oznaczymy przez \mathbf{T}^0 i będzie ona miała postać

$$\mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_{yy}^0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

której składowe są odpowiednio ułożonymi składowymi wektora $\boldsymbol{\sigma}^0$ (3.26). Macierz \mathbf{B}_F związana z obrotem wokół osi z wynosi

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{N} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Macierze sztywności i wektor sił wewnętrznych obliczymy według zależności:

— (2.11), (4.8) i (3.25) – macierz sztywności przyrostowa,

$$\mathbf{k}_L = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}^0 \mathbf{B}_L \, d\Omega, \quad (4.12)$$

— (2.13), (4.9) i (4.10) – macierz sztywności geometryczna,

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{B}_N^T \mathbf{T}^0 \mathbf{B}_N \, d\Omega, \quad (4.13)$$

— (3.20) i (4.11) – macierz sztywności, uwzględniająca obrót wokół normalnej do powierzchni środkowej,

$$\mathbf{k}_F = k \cdot G \int_{\Omega} \mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F \, d\Omega, \quad (4.14)$$

— (2.15) i (4.8) – wektor sił wewnętrznych,

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}^0 \, d\Omega, \quad (4.15)$$

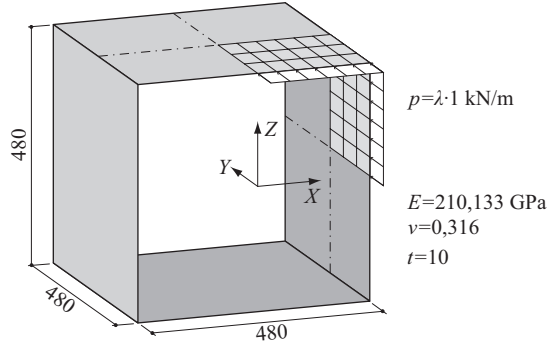
gdzie Ω jest powierzchnią środkową elementu skończonego.

Wszystkie macierze i wektory obliczono numerycznie z wykorzystaniem dwupunktowej kwadratury *Gaussa* (2x2) dla powierzchni środkowej i trypunktowej kwadratury *Lobatto* dla kierunku z .

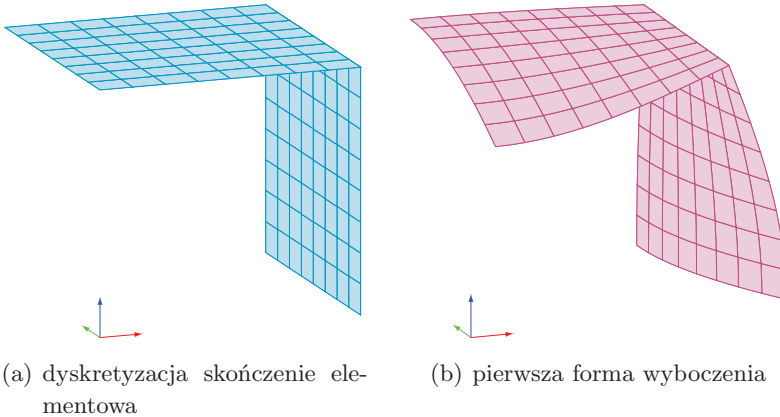
Płaski element skończony powłokowy testowano na różnych przykładach z aktywnym szóstym stopniem swobody. Poniżej został krótko przedstawiony jeden z takich przykładów.

4.1.1. Przykład 1. Wyboczenie skrzynki

Na rys. 4.2 przedstawiono skrzynkę wraz z danymi geometrycznymi i materiałowymi, dla której należy obliczyć obciążenie krytyczne wyboczenia. Na rys. 4.3(a) jest pokazana dyskretyzacja skończenie elementowa (dzięki wykorzystaniu symetrii jest to jedna ósma skrzynki), zadanie obliczono dyskretyzując model 128 elementami skończonymi. Na rys. 4.3(b) przedstawiono pierwszą formę wyboczenia, uzyskaną dla parametru obciążenia $\lambda = 2,0451$. Otrzymane wyniki zgadzają się z wynikami z pracy [23], z której przykład został zaczerpnięty.



Rys. 4.2. Przykład 1. Skrzynka ściskana równomiernie

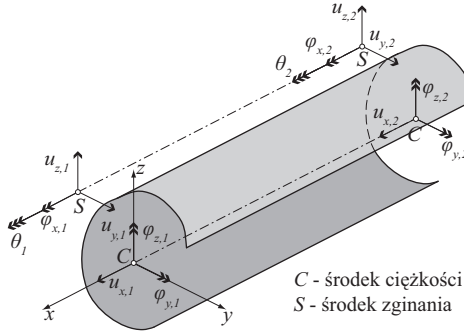


Rys. 4.3. Przykład 1. Wyboczenie skrzynki

4.2. Macierz styczna i wektor sił wewnętrznych dla elementu skończonego cienkościennego

Drugim elementem wykorzystanym w pracy jest belkowy element cienkościenny o przekroju poprzecznym otwartym, rys. 4.4. Omawiany element ma dwa węzły i siedem stopni swobody w węźle. Wektor przyrostów stopni swobody dla węzła ma postać

$$\Delta \mathbf{q}_n = \{ \Delta u_x^0 \quad \Delta u_y^0 \quad \Delta u_z^0 \quad \Delta \varphi_x \quad \Delta \varphi_y \quad \Delta \varphi_z \quad \Delta \theta \}_n. \quad (4.16)$$



Rys. 4.4. Belkowy cienkościenny element skończony

Wektor przyrostów stopni swobody dla całego elementu jest równy

$$\Delta \mathbf{q} = \{ \Delta \mathbf{q}_1 \quad \Delta \mathbf{q}_2 \}. \quad (4.17)$$

Macierz funkcji kształtu

$$\mathbf{N}_n = [H \quad F \quad F \quad F \quad -G \quad G \quad G]_n, \quad (4.18)$$

stanowią funkcje *Hermite'a*, które dla współrzędnej znormalizowanej ξ mają postać

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= 1 - \xi, \\ H_2(\xi) &= \xi, \\ F_1(\xi) &= 1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3, \\ F_2(\xi) &= 3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3, \\ G_1(\xi) &= l \cdot (\xi - 2 \cdot \xi^2 + \xi^3), \\ G_2(\xi) &= l \cdot (-\xi^2 + \xi^3), \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie l jest długością elementu skończonego, a $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi \in [0, 1]$.

Stosownie do przyjętych założeń macierz styczna i wektor sił wewnętrznych jest obliczany w całkowitym opisie Lagrange'a. Fakt ten oraz uwzględnienie w równaniach dla przemieszczeń efektów od skończonych obrotów powoduje, że standardowa metoda obliczeń polegająca na bezpośrednim wykorzystaniu równań (2.10), (2.12) i (2.14) jest nieefektywna, jeśli w ogóle możliwa. Dlatego autor przyjął koncepcję ich obliczania wykorzystując możliwości systemu MATLAB i języka programowania PERL, który ma zaimplementowaną obsługę wyrażeń regularnych.

W konsekwencji macierze sztywności i wektor sił wewnętrznych były obliczane według procedury opisanej w punkcie 4.3.

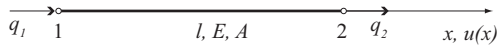
4.3. Procedura obliczania macierzy stycznej i wektora sił wewnętrznych dla elementu skończonego cienkościennego

Opis procedury zaczniemy od prostego przykładu obliczania macierzy stycznej dla elementu prętowego o dwóch stopniach swobody. Celem przykładu jest bliższe opisanie procedury, która w ogólnej formie jest zaprogramowana z wykorzystaniem wspomnianych narzędzi informatycznych.

Przykład 2. Dwuwęzłowy element skończony

Rozważany element skończony przedstawiony jest na rys. 4.5, ma dwa stopnie swobody

$$\Delta \mathbf{q} = \{\Delta q_1 \quad \Delta q_2\}. \quad (4.20)$$



Rys. 4.5. Element skończony prętowy

Przyjmujemy macierz funkcji kształtu w postaci

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2], \quad (4.21)$$

oraz aproksymację przemieszczenia $u(x)$, przyrostu przemieszczenia i wariacji przyrostu przemieszczenia danych zależnościami

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N}\mathbf{q} = N_1 \cdot q_1 + N_2 \cdot q_2, \\ \Delta u &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q} = N_1 \cdot \Delta q_1 + N_2 \cdot \Delta q_2, \\ \delta\Delta u &= \mathbf{N}\delta\Delta\mathbf{q} = N_1 \cdot \delta\Delta q_1 + N_2 \cdot \delta\Delta q_2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Równanie (2.10) ma obecnie postać

$$\int_{V^0} (\delta\Delta e) \cdot E \cdot \Delta e \, dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q} &= (\delta\Delta\mathbf{q})^T \begin{bmatrix} k_{L11} & k_{L12} \\ k_{L21} & k_{L22} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{q} = \\ &= \delta\Delta q_1 \Delta q_1 \cdot k_{L11} + \delta\Delta q_1 \Delta q_2 \cdot k_{L12} + \\ &+ \delta\Delta q_2 \Delta q_1 \cdot k_{L21} + \delta\Delta q_2 \Delta q_2 \cdot k_{L22}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

gdzie, oznaczając $(\bullet)' \equiv \frac{d}{dx}(\bullet)$ i wykorzystując (4.22) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta e &= \Delta u' + u' \cdot \Delta u' = N_1' \cdot \Delta q_1 + N_2' \cdot \Delta q_2 + \\ &+ (N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2) \cdot (N_1' \cdot \Delta q_1 + N_2' \cdot \Delta q_2), \\ \delta\Delta e &= \delta\Delta u' + u' \cdot \delta\Delta u' = N_1' \cdot \delta\Delta q_1 + N_2' \cdot \delta\Delta q_2 + \\ &+ (N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2) \cdot (N_1' \cdot \delta\Delta q_1 + N_2' \cdot \delta\Delta q_2), \end{aligned} \quad (4.25)$$

Wykorzystując (4.25) w (4.23), po uporządkowaniu możemy napisać

$$\begin{aligned}
 (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q} = & \delta\Delta q_1 \Delta q_1 \int_{V^0} E \cdot N_1'^2 \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dV^0 + \\
 & + \delta\Delta q_1 \Delta q_2 \int_{V^0} E \cdot N_1' N_2' \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dV^0 + \\
 & + \delta\Delta q_2 \Delta q_1 \int_{V^0} E \cdot N_1' N_2' \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dV^0 + \\
 & + \delta\Delta q_2 \Delta q_2 \int_{V^0} E \cdot N_2'^2 \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dV^0.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Należy zwrócić uwagę, że przemieszczenie $u(x)$ (a zatem i funkcje kształtu N_1 oraz N_2) jest funkcją tylko zmiennej x , co pozwoli nam wygodnie policzyć składniki (4.26), roziterowując całkę na dwie całki: po powierzchni i po długości elementu. Możemy zapisać

$$\begin{aligned}
 (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q} = & \delta\Delta q_1 \Delta q_1 \cdot EA \int_L N_1'^2 \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dl + \\
 & + \delta\Delta q_1 \Delta q_2 \cdot EA \int_L N_1' N_2' \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dl + \\
 & + \delta\Delta q_2 \Delta q_1 \cdot EA \int_L N_1' N_2' \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dl + \\
 & + \delta\Delta q_2 \Delta q_2 \cdot EA \int_L N_2'^2 \left(1 + N_1' \cdot q_1 + N_2' \cdot q_2\right)^2 dl.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Wprowadzają funkcje kształtu i ich pochodne w postaci

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{N}' &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

otrzymamy ostatecznie po wyciąkowaniu (4.28) po długości elementu

$$\begin{aligned}
 (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q} &= \delta\Delta q_1 \Delta q_1 \cdot EA \frac{(-l + q_1 - q_2)^2}{l^3} + \\
 &+ \delta\Delta q_1 \Delta q_2 \cdot EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3} + \\
 &+ \delta\Delta q_2 \Delta q_1 \cdot EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3} + \\
 &+ \delta\Delta q_2 \Delta q_2 \cdot EA \frac{(-l + q_1 - q_2)^2}{l^3}.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Porównując (4.29) z (4.24) mamy końcowy wynik

$$\begin{aligned}
 k_{L11} &= EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, & k_{L12} &= EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, \\
 k_{L21} &= EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, & k_{L22} &= EA \frac{(-l + q_1 - q_2)^2}{l^3}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

W analogiczny sposób można obliczyć wzory na elementy macierzy geometrycznej \mathbf{k}_σ i wektora sił wewnętrznych \mathbf{f} .

W dalszej kolejności opiszemy realizację komputerową opisaną procedurę ilustrując ją stosownymi rysunkami i wydrukami ważniejszych części programu.

Na rys. 4.6 pokazano plik tekstowy w systemie MATLAB na równania geometryczne belkowego elementu cienkościennego (3.49–3.51), które są danymi wejściowymi do dalszych obliczeń. Symbole $\mathbf{e11}$, $\mathbf{e12}$ i $\mathbf{e13}$ są oznaczeniami odkształceń, odpowiednio ε_{xx} , γ_{xy} i γ_{xz} . We wzorach użyte są następujące zmienne:

y, z – współrzędne punktu w przekroju poprzecznym y, z ,

omega, – funkcja spaczenia ω ,

omegay, omegaz – pochodne funkcji spaczenia $\frac{\partial\omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega}{\partial z}$,

ux, uy, uz, fx – przemieszczenia uogólnione u_x, u_y, u_z, φ_x ,

d1ux, d1uy, d1uz, d1fx – pierwsze pochodne przemieszczeń uogólnionych $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$, $\frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$,

```

e11 =
d1ux-y*d2uy-z*d2uz+d2fx*omega+1/2*d1uy^2-z*d1uy*d1fx+zs*d1uy*d1fx+1/2*z^2*d1fx^2-
z*d1fx^2*zs+1/2*zs^2*d1fx^2+1/2*d1uz^2+y*d1uz*d1fx-y*s*d1uz*d1fx+1/2*y^2*d1fx^2-y*
d1fx^2*ys+1/2*ys^2*d1fx^2-1/2*y*d2uz*fx-1/2*y*d1uz*d1fx+1/2*z*d2uy*fx+1/2*z*d1uy*
d1fx+1/2*ys*d2uz*fx+1/2*ys*d1uz*d1fx-1/2*zs*d2uy*fx-1/2*zs*d1uy*d1fx

e12 =
1/2*d1fx*omegay-1/2*z*d1fx+1/2*zs*d1fx-1/2*d1ux*d1uy+1/2*d1ux*d1fx*omegay+1/2*y
*d1uy*d2uy-1/2*y*d2uy*d1fx*omegay+1/2*z*d1uy*d2uz-1/2*z*d2uz*d1fx*omegay-1/2*d2
fx*omega*d1uy+1/2*d2fx*omega*d1fx*omegay+1/2*d1uz*fx+1/2*y*fx*d1fx-1/2*ys*fx*d1f
x-1/4*d1uz*fx-1/2*y*d1uy*d2uy-1/2*y*fx*d1fx-1/4*z*d2uy*d1uz-1/4*z*d1uy*d2uz+1/2*y
s*fx*d1fx

e13 =
1/2*d1fx*omegaz+1/2*y*d1fx-1/2*ys*d1fx-1/2*d1ux*d1uz+1/2*d1ux*d1fx*omegaz+1/2*y
*d2uy*d1uz-1/2*y*d2uy*d1fx*omegaz+1/2*z*d1uz*d2uz-1/2*z*d2uz*d1fx*omegaz-1/2*d2
fx*omega*d1uz+1/2*d2fx*omega*d1fx*omegaz-1/2*d1uy*fx+1/2*z*fx*d1fx-1/2*zs*fx*d1f
x+1/4*d1uy*fx-1/4*y*d2uy*d1uz-1/4*y*d1uy*d2uz-1/2*z*d1uz*d2uz-1/2*z*fx*d1fx+1/2*z
s*fx*d1fx

```

Rys. 4.6. Plik tekstowy ze zdefiniowanymi równaniami geometrycznymi

$$\frac{d2ux}{dx^2}, \frac{d2uy}{dx^2}, \frac{d2uz}{dx^2}, \frac{d^2\varphi_x}{dx^2}.$$

Następnie, korzystając z obliczeń symbolicznych możemy obliczyć przyrosty odkształceń, pokazane na rys. 4.7. We wzorach symbole D_e11, D_e12 i D_e13 oznaczają odpowiednio $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\gamma_{xy}$ i $\Delta\gamma_{xz}$ (wzory 3.57 do 3.62). Nazwy zmiennych zaczynające się od D_ oznaczają przyrost odpowiednich wartości, np. D_d1ux to $\Delta\frac{\partial u_x}{\partial x}$.

W kolejnym kroku dokonywany jest podział przyrostów odkształceń na liniowe i kwadratowe, ze względu na przyrosty gradientów przemieszczeń. Do tego celu użyto języka PERL.

Pierwszym krokiem analizy jest otwarcie pliku tekstowego z zapisanymi wzorami

```
open(INFILE, $InFile) or die "File error: $!";
```

Listing 4.1. Otwarcie pliku tekstowego

```

D_e11 =
D_d1ux-y*D_d2uy-z*D_d2uz+omega(y,z)*D_d2fx+1/2*Zs^2*D_d1fx^2+d1uz*D_d1u
uz^2+1/2*y^2*D_d1fx^2+1/2*Ys^2*D_d1fx^2-2*z*Zs*d1fx*D_d1fx-2*y*Ys*d1fx*
*z^2*D_d1fx^2-z*d1uy*D_d1fx-z*D_d1uy*d1fx-z*D_d1uy*D_d1fx+Zs*d1uy*D_d1f
y*d1fx+Zs*D_d1uy*D_d1fx+z^2*d1fx*D_d1fx-z*Zs*D_d1fx^2+Zs^2*d1fx*D_d1fx+
1fx+y*D_d1uz*d1fx+y*D_d1uz*D_d1fx-Ys*d1uz*D_d1fx-Ys*D_d1uz*d1fx-Ys*D_d1
y^2*d1fx*D_d1fx-y*Ys*D_d1fx^2+Ys^2*d1fx*D_d1fx+d1uy*D_d1uy+1/2*D_d1uy^2
uz*D_fx+1/2*z*D_d1uy*D_d1fx+1/2*z*D_d1uy*d1fx+1/2*z*d1uy*D_d1fx+1/2*z*D
+1/2*z*D_d2uy*fx(x)+1/2*z*d2uy*D_fx-1/2*y*D_d1uz*D_d1fx-1/2*y*D_d1uz*d1
1uz*D_d1fx-1/2*y*D_d2uz*D_fx-1/2*y*D_d2uz*fx(x)-1/2*y*d2uz*D_fx-1/2*Zs*
1fx-1/2*Zs*D_d1uy*d1fx-1/2*Zs*d1uy*D_d1fx-1/2*Zs*D_d2uy*D_fx-1/2*Zs*D_d
1/2*Zs*d2uy*D_fx+1/2*Ys*D_d1uz*D_d1fx+1/2*Ys*D_d1uz*d1fx+1/2*Ys*d1uz*D_
s*D_d2uz*D_fx+1/2*Ys*D_d2uz*fx(x)

D_e12 =
1/2*domegay*D_d1fx-1/2*z*D_d1fx+1/2*Zs*D_d1fx+1/2*D_d1uz*fx(x)-1/2*d1ux
2*D_d1ux*d1uy-1/2*D_d1ux*D_d1uy+1/2*d1uz*D_fx+1/2*D_d1uz*D_fx-1/2*y*dom
D_d1fx-1/2*y*domegay*D_d2uy*d1fx-1/2*y*domegay*D_d2uy*D_d1fx-1/2*z*dome
_d1fx-1/2*z*domegay*D_d2uz*d1fx-1/2*z*domegay*D_d2uz*D_d1fx+1/2*omega(y
y*d2fx*D_d1fx+1/2*omega(y,z)*domegay*D_d2fx*d1fx+1/2*omega(y,z)*domegay
d1fx+1/2*domegay*d1ux*D_d1fx+1/2*domegay*D_d1ux*d1fx+1/2*domegay*D_d1ux
2*y*d1uy*D_d2uy+1/2*y*D_d1uy*d2uy+1/2*y*D_d1uy*D_d2uy+1/2*z*d1uy*D_d2uz
1uy*d2uz+1/2*z*D_d1uy*D_d2uz+1/2*y*D_fx*d1fx+1/2*y*D_fx*D_d1fx-1/2*Ys*D
/2*Ys*D_fx*D_d1fx-1/2*omega(y,z)*d2fx*D_d1uy-1/2*omega(y,z)*D_d2fx*d1uy
(y,z)*D_d2fx*D_d1uy+1/2*y*fx(x)*D_d1fx-1/2*Ys*fx(x)*D_d1fx-1/4*D_d1uz*fx
_d1uz*D_fx-1/4*d1uz*D_fx-1/2*y*D_d1uy*D_d2uy-1/2*y*d1uy*D_d2uy-1/2*y*D_
1/2*y*D_fx*d1fx-1/2*y*D_fx*D_d1fx-1/2*y*fx(x)*D_d1fx+1/2*Ys*D_fx*D_d1fx
fx*d1fx+1/2*Ys*fx(x)*D_d1fx-1/4*z*D_d2uy*D_d1uz-1/4*z*D_d2uy*d1uz-1/4*z
uz-1/4*z*D_d1uy*D_d2uz-1/4*z*D_d1uy*d2uz-1/4*z*d1uy*D_d2uz

D_e13 =
1/2*domegaz*D_d1fx+1/2*y*D_d1fx-1/2*Ys*D_d1fx+1/2*domegaz*d1ux*D_d1fx+1

```

Rys. 4.7. Plik tekstowy z obliczonymi przyrostami równań geometrycznych

gdzie:

INFILE – uchwyt pliku tekstowego,

\$InFile – nazwa pliku tekstowego przekazywanego do skryptu jako parametru.

W pętli wczytywane są kolejne wiersze pliku zakończone znakiem końca wiersza, są one zapamiętywane w predefiniowanej zmiennej $\$_$, której zawartość przepisujemy do zmiennej $\$Line$. Kolejnym krokiem jest podzielenie wiersza w miejscach występowania operatorów dodawania + i odejmowania – i przepisanie zawartości pliku do tablicy @Text.

```

while(<INFILE>)
{
    $Line = $_;

    $Line =~ s/\+/\n\+/g;
    $Line =~ s/\-/\n\-/g;
}

```

```

@Fields = split(/\n+/, $Line);

foreach $Field (@Fields)
{
    push(@Text, $Field);
}
}

```

Listing 4.2. Podział pliku w miejscu występowania operatorów + i –

Następnie w pętli szukane są wiersze, w których występują zmienne związane z gradientami przemieszczeń i przyrostami przemieszczeń, które są następnie zapamiętywane w odpowiednich tablicach.

```

foreach $Field (@Fields)
{
    if ($Field !~ m/((D-)?e[etd]1[123]\ =)/)
    {
        if ($Field =~ m/(\b[uf][xyz](\[1-9])?\b)/)
        {
            push(@Trans, $1);
            $Field = "";
        }

        if ($Field =~ m/(\bd1[uf][xyz](\[1-9])?\b)/)
        {
            push(@d1Trans, $1);
            $Field = "";
        }

        if ($Field =~ m/(\bd2[uf][xyz](\[1-9])?\b)/)
        {
            push(@d2Trans, $1);
            $Field = "";
        }

        if ($Field =~ m/(\bD-[uf][xyz](\[1-9])?\b)/)
        {

```

```

    push(@DTrans, $1);
    $Field = "";
}

if ($Field =~ m/(\bD_d1[uf][xyz](\^[1-9])?\b)/)
{
    push(@Dd1Trans, $1);
    $Field = "";
}

if ($Field =~ m/(\bD_d2[uf][xyz](\^[1-9])?\b)/)
{
    push(@Dd2Trans, $1);
    $Field = "";
}
}
}

```

Listing 4.3. Poszukiwanie zmiennych związanych z gradientami i przyrostami przemieszczeń

Tablice te, z kolei są zapisywane do dwóch plików tekstowych w odpowiedniej kolejności, rys. 4.8 i 4.9. Pliki są zapisywane zgodnie z notacją systemu MATLAB i można je bezpośrednio użyć w dalszych obliczeniach.

Mając obliczone liniowe i kwadratowe przyrosty odkształceń, możemy teraz skorzystać z zależności (2.10) i obliczyć symbolicznie wyrażenie podcałkowe. Wynik tych obliczeń jest pokazany na rys. 4.10.

Wyrażenie podcałkowe wymaga takiego samego przygotowania do dalszej analizy jak wyrażenia na przyrosty odkształceń – czyli podziału na nowe wiersze w miejscach występowania operatorów dodawania i odejmowania, oraz poukładania powstałych po podziale wyrażen cząstkowych w odpowiedniej kolejności. Pamiętając o tym, że przemieszczenia uogólnione są funkcjami tylko zmiennej x , możemy wykonać następnie całkowanie po powierzchni przekroju poprzecznego otrzymując w ten sposób wielkości związane z geometrią pręta cienkościennego (pole powierzchni, momenty

```

L_e11 =
-y          D_d1lux          ...
-z          *D_d2uy        ...
+omega     *D_d2uz        ...
           *D_d2fx        ...
-2 *z      +dluz          *D_d1uz          ...
           *d1fx          *D_d1fx          ...
-2 *y      *Ys           *d1fx          *D_d1fx          ...
           *d1uy          *D_d1fx          ...
-z         *d1fx          *D_d1uy          ...
           *d1uy          *D_d1fx          ...
+Zs        +Zs          *d1fx          *D_d1uy          ...
           *d1fx          *D_d1fx          ...
+Zs^2      +Zs^2        *d1fx          *D_d1fx          ...
           *d1fx          *D_d1fx          ...
+y         *d1uz          *D_d1fx          ...
+y         *d1fx          *D_d1uz          ...
           *d1uz          *D_d1fx          ...
+Ys^2      +Ys^2        *d1fx          *D_d1fx          ...
           *d1fx          *D_d1fx          ...
           +d1uy          *D_d1uy          ...
+1/2 *z    *Ys           *d2uz          *D_fx          ...
+1/2 *z    *d1fx          *d1uy          *D_d1uy          ...
+1/2 *z    *d1uy          *D_d1fx          ...
+1/2 *z    *fx           *d2uy          *D_d2uy          ...
+1/2 *z    *d1fx          *D_d1uz          ...
-1/2 *y    *d1uz          *d1fx          *D_d1fx          ...
-1/2 *y    *fx           *D_d2uz          ...
-1/2 *y    *d2uz          *D_fx          ...
-1/2 *z    *Zs          *d1fx          *D_d1uy          ...
-1/2 *z    *Zs          *d1uy          *D_d1fx          ...

```

Rys. 4.8. Plik tekstowy z obliczonymi liniowymi przyrostami równań geometrycznych

```

N_e11 =
1/2          *Zs^2          *D_d1fx^2          ...
+1/2        *D_d1uz^2          *D_d1uz^2          ...
+1/2 *y^2    *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
+1/2        *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
+1/2 *z^2    *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
-z          *D_d1uy*D_d1fx          *D_d1uy*D_d1fx          ...
           *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
-z         *Zs           *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
+y         *D_d1uz*D_d1fx          *D_d1uz*D_d1fx          ...
           *D_d1uz*D_d1fx          *D_d1uz*D_d1fx          ...
-y        *Ys           *D_d1fx^2          *D_d1fx^2          ...
+1/2      *D_d1uy^2          *D_d1uy^2          ...
+1/2 *z    *D_d1uy*D_d1fx          *D_d1uy*D_d1fx          ...
+1/2 *z    *D_fx*D_d2uy          *D_fx*D_d2uy          ...
-1/2 *y    *D_d1uz*D_d1fx          *D_d1uz*D_d1fx          ...
-1/2 *y    *D_fx*D_d2uz          *D_fx*D_d2uz          ...
-1/2      *Zs           *D_d1uy*D_d1fx          *D_d1uy*D_d1fx          ...
-1/2      *Zs           *D_fx*D_d2uy          *D_fx*D_d2uy          ...
+1/2      *Ys           *D_d1uz*D_d1fx          *D_d1uz*D_d1fx          ...
+1/2      *Ys           *D_fx*D_d2uz          *D_fx*D_d2uz          ...
;

N_e12 =
-1/2          *D_d1ux*D_d1uy          ...
+1/2          *D_fx*D_d1uz          ...
-1/2 *y*Domegay *D_d1fx*D_d2uy          ...
-1/2 *z*Domegay *D_d1fx*D_d2uz          ...
+1/2 *omegay*Domegay *D_d1fx*D_d2fx          ...
+1/2 *Domegay *D_d1uz*D_d1fx          ...
+1/2 *y        *D_d1uy*D_d2uy          ...
+1/2 *z        *D_d1uy*D_d2uz          ...

```

Rys. 4.9. Plik tekstowy z obliczonymi kwadratowymi przyrostami równań geometrycznych

```

k1 =
E*z^2*d2uz^2+2*E*z*d2uz*d2uy*y-2*E*z*d2uz*d1ux-2*E*z*d2uz*o
x+2*d2uy*y^2-2*E*d2uy*y*d1ux-2*E*d2uy*y*omega*d2fx+E*d1ux
1ux*omega*d2fx+E*omega^2*d2fx^2-E*z*d2uz*d1ux*d1ux+E*z^2*d2uz
fx-E*d2uy*y*Ys^2*d1fx*d1fx-2*E*omega*d2fx*z*Zs*d1fx*d1fx-2*E*cm
*y*Ys*d1fx*d1fx-E*omega*d2fx*z*d1uy*d1fx-E*omega*d2fx*z*d1fx*
ga*d2fx*Zs*d1uy*d1ux+E*omega*d2fx*z*d1fx*d1uy+E*omega*d2fx*z
d1fx+E*omega*d2fx*Zs^2*d1fx*d1fx+E*omega*d2fx*y*d1uz*d1fx+E*one
y*d1fx*d1uz-E*omega*d2fx*Ys*d1uz*d1fx-E*omega*d2fx*Ys*d1fx*d1
d2uz*d1fx*d1uy+E*omega*d2fx*y^2*d1fx*d1fx+E*omega*d2fx*Ys^2*d1
2*E*d1ux*z*Zs*d1fx*d1fx-2*E*d1ux*y*Ys*d1fx*d1fx+2*E*z^2*d2uz*
d1fx+2*E*d2uz*y*Ys*d1fx*d1fx-E*z^3*d2uz*d1fx*d1fx-E*z^2*d2uz*
y-E*d2uy*y*d1uz*d1uz-E*d2uy*y^2*d1uz*d1ux-E*d2uy*y^2*d1fx*d1
d2uz*Zs*d1uy*d1fx-E*z^2*d2uz*Zs*d1fx*d1uy-E*z^2*d2uz*Ys^2*d1fx*d1
2uz*y*d1uz*d1fx-E*z^2*d2uz*y*d1fx*d1uz+E*z^2*d2uz*Ys*d1uz*d1fx+E
s*d1fx*d1uz-E*z^2*d2uz*y^2*d1fx*d1fx-E*z^2*d2uz*Ys^2*d1fx*d1fx+2*
*y*z^2*d1fx*d1ux-2*E*d2uy*y^2*Ys*d1fx*d1fx+E*d2uy*y*z*d1uy*d1f
*y*z^2*d1fx*d1uy-E*d2uy*y*Zs*d1uy*d1fx-E*d2uy*y*Zs*d1fx*d1uy-E
^2*d1fx*d1fx-E*d2uy*y*Zs^2*d1fx*d1fx+E*d2uy*y*Ys*d1uz*d1fx+E
s*d1fx*d1uz-E*d2uy*y^3*d1fx*d1fx+E*omega*d2fx*d1uz*d1uz+E*ore
d1uy*d1uy-E*d1ux*z*d1uy*d1fx-E*d1ux*z*d1fx*d1uy+E*d1ux*Zs*d
+E*d1ux*Zs*d1fx*d1uy+E*d1ux*Zs^2*d1fx*d1fx+E*d1ux*Zs^2*d1fx*d
1ux*y*d1uz*d1fx+E*d1ux*y*d1fx*d1uz-E*d1ux*y*s*d1uz*d1fx-E*d*d1
d1uz+E*d1ux*y^2*d1fx*d1fx+E*d1ux*Ys^2*d1fx*d1fx-E*d2uy*y*d
+E*d1ux*d1uz*d1uz+E*d1ux*d1uy*d1uy-1/2*E*SR*d2uy*y*Ys*d1uz*d
*SR*d2uy^2*y*Zs*fx+1/2*E*SR*d1ux*Ys*d2uz*d_fx+1/2*E*SR*d1ux*z*fx
*E*SR*d1ux*z*d2uy*d_fx-1/2*E*SR*d1ux*y*fx*d2uz-1/2*E*SR*d1ux*y
1/2*E*SR*d1ux*Zs*fx*d2uy-1/2*E*SR*d1ux*Zs*d2uy*d_fx+1/2*E*SR*d1
d2uz+1/2*E*SR*d2uy*y*Zs*d2uy*d_fx-1/2*E*SR*d2uz*d2uy*y*fx^2*d2uz+1/2
a*d2fx*Ys*d2uz*d_fx+1/2*E*SR*omega*d2fx*z*fx*d2uy+1/2*E*SR*omega
2uy*d_fx-1/2*E*SR*omega*d2fx*y*fx*d2uz-1/2*E*SR*omega*d2fx*y*d2uz
E*SR*omega*d2fx*Zs*fx*d2uy-1/2*E*SR*omega*d2fx*Zs*d2uy*d_fx+1/2*E

```

Rys. 4.10. Plik tekstowy z obliczonym wyrażeniem podcałkowym na macierz sztywności przyrostowej

bezwładności, momenty wyższych rzędów). Realizacja tego kroku polega na wyszukaniu wyrażeń związanych z geometrią przekroju (na przykład: y^2 , z^2) i podstawienia w ich miejsce odpowiednich oznaczeń zmiennych (odpowiednio: J_z , J_y).

```

$Field = ~ s/\ \|*y\^2\ \| \|*Jz\ \| \|/g;
$Field = ~ s/\ \|*z\^2\ \| \|*Jy\ \| \|/g;

```

Listing 4.4. Poszukiwanie momentów bezwładności

W tym kroku usuwane są wyrażenia zawierające momenty statyczne, moment statyczny spaczenia, odśrodkowy moment bezwładności, które są równe zero w głównych osiach centralnych przekroju poprzecznego. Tak przygotowany wzór jest następnie zapisywany do pliku, rys. 4.11.

Przedostatnim etapem obliczeń jest podstawienie wzorów interpolacyjnych dla przemieszczeń uogólnionych i przyrostów przemieszczeń uogólnionych oraz wyciągnięcie wyrażenia na macierz sztywności po długości


```

k1 =
+ E *Area *D_d1ux^2
+ E *Jz *D_d2uy^2
+ E *Jy *D_d2uz^2
+ E *Jo *D_d2fx^2
+ E *Area *Zs *d1uy *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Area *Zs *d1fx *D_d1ux*D_d1uy
+ E *Area *Zs^2 *d1fx *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Area *Ys *d1uz *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Area *Ys *d1fx *D_d1ux*D_d1uz
+ E *Area *Ys^2 *d1fx *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Area *d1uz *D_d1ux*D_d1uz
+ E *Area *d1uy *D_d1ux*D_d1uy
+ E *Area *d1fx *D_d1fx*D_d2uy
+ E *Area *d1fx *D_d1fx*D_d2uz
+ E *Jz *d1uz *D_d1fx*D_d2uy
+ E *Jz *d1fx *D_d1uz*D_d2uy
+ 2 *E *Jz *Ys *d1fx *D_d1fx*D_d2uy
+ E *Jz *d1fx *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Jy *d1uy *D_d1fx*D_d2uz
+ E *Jy *d1fx *D_d1ux*D_d2uz
+ 2 *E *Jy *Zs *d1fx *D_d1ux*D_d1fx
+ E *Jy *d1fx *D_d1fx*D_d2uz
+ E *My2z *d1fx *D_d1fx*D_d2uz
+ E *My2o *d1fx *D_d1fx*D_d2fx
+ E *Mz2y *d1fx *D_d1fx*D_d2uy
+ E *Mz2o *d1fx *D_d1fx*D_d2fx
+ 1/2 *E *Area *Ys *d2uz *D_fx*D_d1ux
- 1/2 *E *Area *Zs *fx *D_d1ux*D_d2uy
- 1/2 *E *Area *Zs *d2uy *D_fx*D_d1ux
+ 1/2 *E *Area *Ys *fx *D_d1ux*D_d2uz
- 1/2 *E *Area *Zs *d1uy *D_d1ux*D_d1fx

```

Rys. 4.11. Plik tekstowy z obliczonym wyrażeniem podcałkowym na macierz sztywności przyrostowej po wycałkowaniu po przekroju poprzecznym

elementu. Ten krok powoduje wprowadzenie do otrzymanej zależności kolejnych zmiennych: q_1 do q_{14} – oznaczające wartości całkowite przemieszczeń uogólnionych i D_{q_1} do $D_{q_{14}}$ – oznaczające przyrosty przemieszczeń uogólnionych. Dla realizacji tego kroku wykorzystano całkowanie symboliczne pakietu MATLAB. W wyniku otrzymano wyrażenia zgrupowane przy odpowiednich iloczynach przyrostów uogólnionych (np. $D_{q_1}^2$, $D_{q_1} \cdot D_{q_2}$), które są równe elementom macierzy sztywności (odpowiednio k_{L11} i $2 \cdot k_{L12}$). Podstawiając zera i jedynki pod odpowiednie zmienne możliwe było zautomatyzowanie obliczenia wyrażenia na wartości elementów macierzy. Na przykład, dla obliczenia $2 \cdot k_{L12}$ zmienne $D_{q_1} = D_{q_2} = 1$ natomiast $D_{q_3}, \dots, D_{q_{14}} = 0$. Etap ten wykonano w systemie MATLAB. Można było skorzystać z polecenia `subs()`, które nadaje zmiennym symbolicznym wartości liczbowe. Jednak ze względu na szybkość, obliczenia te wykonano używając wyrażeń regularnych i polecenia `regexprep()`, które zamienia łańcuchy znaków używając wzorców wyrażeń regularnych. Po

wstawieniu w miejsca odpowiednich zmiennych, wartości 0 lub 1 wyrażenia można było uprościć używając polecenia `simplify()`.

```

str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
      '=char(kl' num2str(i) ');'];
eval(str)
if(j == k)
  for l = 1 : 14
    if(l == j)
      str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
            '=regexprep(kl' num2str(i) '_' num2str(j)
            num2str(k) ', 'D_q' num2str(l) '^2', '1');'];
      eval(str)
    else
      str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
            '=regexprep(kl' num2str(i) '_' num2str(j)
            num2str(k) ', 'D_q' num2str(l) '^2', '0');'];
      eval(str)
    end
  end
end
for l = 1 : 14
  str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
        '=regexprep(kl' num2str(i) '_' num2str(j)
        num2str(k) ', 'D_q' num2str(l), '0');'];
  eval(str)
end
else
  for l = 1 : 14
    str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
          '=regexprep(kl' num2str(i) '_' num2str(j)
          num2str(k) ', 'D_q' num2str(l) '^2', '0');'];
    eval(str)
  end
end
for l = 1 : 14
  if((l == j) | (l == k))
    str = ['kl' num2str(i) '_' num2str(j) num2str(k)
          '=regexprep(kl' num2str(i) '_' num2str(j)

```

```

        num2str(k) ', 'D_q' num2str(l) ', '1');'];
    eval(str)
else
    str = ['kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k)
          '=regexprep(kl' num2str(i) '-' num2str(j)
          num2str(k) ', 'D_q' num2str(l) ', '0');'];
    eval(str)
end
end
end
str = ['kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k)
      '=sym(kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k) ');'];
];
eval(str)
if(j == k)
    str = ['kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k)
          '=simplify(kl' num2str(i) '-' num2str(j)
          num2str(k) ');'];
    eval(str)
else
    str = ['kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k)
          '=simplify(1/2*kl' num2str(i) '-' num2str(j)
          num2str(k) ');'];
    eval(str)
end
str = ['val=kl' num2str(i) '-' num2str(j) num2str(k)
      ');'];
eval(str)

```

Listing 4.5. Obliczanie składników macierzy sztywności stycznej

Takie postępowanie doprowadzi do ostatecznych wzorów na macierz sztywności w formie pokazanej na rys. 4.12. Kolejne cząstkowe wyrażenia są oznaczane przez $kl_k_i_j$ gdzie k oznacza kolejny numer wyrażenia, a wartości i i j oznaczają położenie w macierzy, na przykład suma kl_1_12 do kl_22_12 jest wzorem do obliczenia elementu kL_{12} macierzy. Policzenie

wartości wyrażeń cząstkowych i ich odpowiednie zsumowanie prowadzi do ostatecznych wartości elementów macierzy sztywności przyrostowej.

```

k1_1_11 = E*Area/d1;
k1_2_11 = 1.0/15.0*G*Area*(-3.0*q9*q13*d1+18.0*(q2*q2)+2.0*(q6*q6)*(d1*q9*q9)-q6*q13*(d1*d1)+2.0*(q13*q13)*(d1*d1)-36.0*q2*q9+3.0*q2*q13*d1+3.0*q6*q9*d1)/(d1*d1*d1);
k1_3_11 = 1.0/15.0*G*Moy2*(-q7*q14*(d1*d1)+2.0*(q14*q14)*(d1*d1)+3.0*q4*q4+18.0*(q11*q11))/(d1*d1*d1);
k1_4_11 = -1.0/15.0*G*Mov*(3.0*q6*q4*d1+4.0*q6*q7*(d1*d1)-3.0*q13*q11*d1*d1)+36.0*q2*q4-36.0*q2*q11+36.0*q9*q11-q13*q7*(d1*d1)+3.0*q2*q7*d1+36.0*q9*q4+4.0*q13*q14*(d1*d1)-3.0*q9*q14*d1+3.0*q2*q14*d1-3.0*q6*q19*q7*d1)/(d1*d1*d1);
k1_5_11 = 1.0/15.0*G*Area*(2.0*(q12*q12)*(d1*d1)+2.0*(q5*q5)*(d1*d1)+3.0*q3*q3*q10+18.0*(q3*q3)-q5*q12*(d1*d1)+18.0*(q10*q10)-3.0*q5*q3*d1-36.0*q10*q12*d1)/(d1*d1*d1);
k1_6_11 = 1.0/15.0*G*Moz2*(-36.0*q4*q11-q7*q14*(d1*d1)-3.0*q7*q11*d1+2.0*(d1*d1)-3.0*q11*q14*d1+18.0*(q11*q11)+2.0*(q14*q14)*(d1*d1)+3.0*q4*q14*q4)+3.0*q7*q4*d1)/(d1*d1*d1);
k1_7_11 = -1.0/15.0*G*Moz*(-3.0*q4*q12*d1+3.0*q7*q3*d1+3.0*q11*q12*d1+q*d1)+q7*q12*(d1*d1)+36.0*q11*q10-36.0*q4*q10-4.0*q14*q12*(d1*d1)-3.0*q4*q11*q5*d1-4.0*q7*q5*(d1*d1)-36.0*q11*q3+3.0*q14*q3*d1-3.0*q14*q10*d1-3.0*q13*q4*q3)/(d1*d1*d1);
k1_1_12 = -1.0/20.0*E*Area*(-12.0*q9+q13*d1+q6*d1+12.0*q2+Zs*q7*d1+Zs*q*Zs*q11+12.0*Zs*q4)/(d1*d1);
k1_2_12 = -1.0/20.0*E*Area*(-12.0*q9+q13*d1+q6*d1+12.0*q2+Zs*q7*d1+Zs*q*Zs*q11+12.0*Zs*q4)/(d1*d1);
k1_3_12 = 1.0/10.0*G*Area*(-12.0*q1*q9-12.0*q8*q2+q1*q6*d1+12.0*q1*q2-q*q13*d1+q1*q13*d1+12.0*q8*q9)/(d1*d1*d1);
k1_4_12 = -1.0/10.0*G*Mov*(12.0*q8*q11+12.0*q1*q4-q8*q7*d1+q1*q14*d1-12.0*q8*q4-q8*q14*d1+q1*q7*d1)/(d1*d1*d1);
k1_5_12 = -2.0/5.0*G*Moy2*(-3.0*q7*q4-3.0*q11*q14+3.0*q4*q14+3.0*q7*q1)*d1+(q7*q7*d1)/(d1*d1*d1);
k1_6_12 = 1.0/5.0*G*Mov*(2.0*q14*q6*d1+9.0*q14*q2-9.0*q14*q9-9.0*q7*q2-

```

Rys. 4.12. Przykładowe, końcowe wzory na elementy macierzy sztywności przyrostowej

Analogicznie możemy obliczyć macierz geometryczną \mathbf{k}_σ i wektor sił wewnętrznych \mathbf{f} .

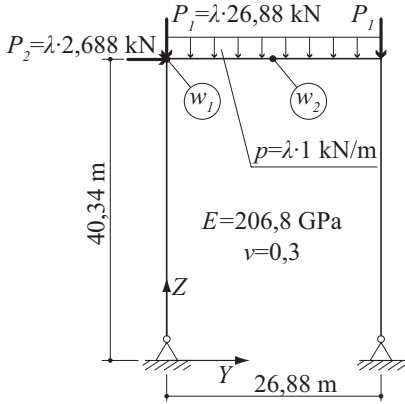
Poniżej został przedstawiony jeden z przykładów mających na celu sprawdzenie funkcjonowanie opisanej metody obliczeń belkowego cienkościennego elementu skończonego.

4.3.1. Przykład 2. Rama portalowa

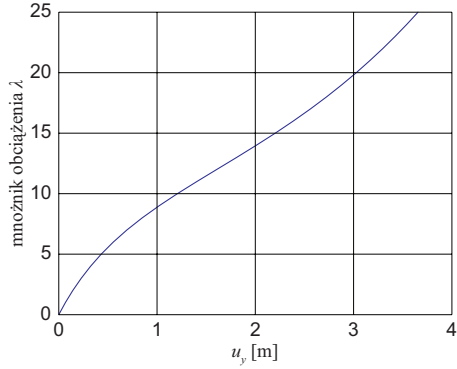
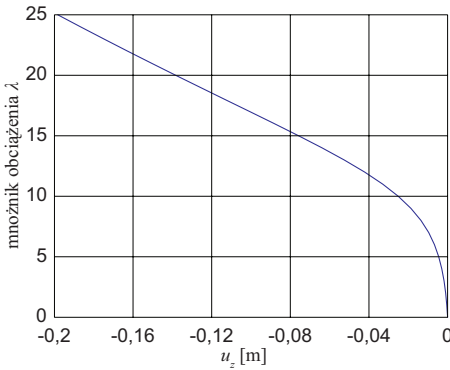
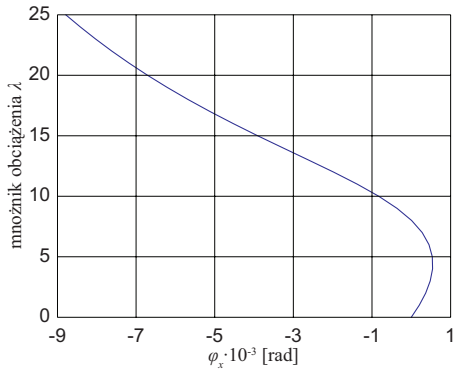
Za pracą [8] przyjęto, że rama portalowa jest wykonana z dwuteownika szerokostopowego W33x130 (według normy ANSI/ASTMA 6-77b). Wymiary ramy i dane materiałowe, jak na rys. 4.13(a). Słupy ramy są zamocowane przegubowo, a rama jest obciążona obciążeniem skupionym q , dwoma pionowymi siłami skupionymi P_1 i jedną poziomą siłą sku-

pioną P_2 . Podane wartości obciążenia są jednym z wariantów obciążenia zamieszczonego w [8].

Obliczenia wykonano przyjmując 12 elementów skończonych, dzieląc słupy i rygiel na elementy o równej długości.



(a) geometria i dane materiałowe

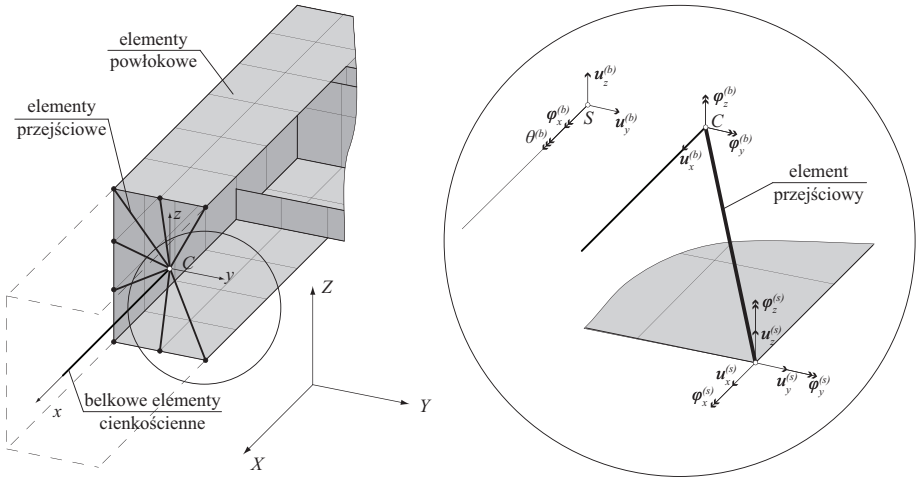
(b) przemieszczenie u_y w węźle w_1 (c) ugięcie u_z w węźle w_2 (d) obrót φ_x w węźle w_1

Rys. 4.13. Przykład 2. Rama portalowa

Na kolejnych rysunkach 4.13(b)–4.13(d) pokazano rzuty ścieżki stanu równowagi na płaszczyźnie (u_z, λ) w węźle w_2 , i (u_y, λ) oraz (φ_x, λ) w węźle w_1 . Otrzymane wyniki są zgodne z wynikami zawartymi w [8].

4.4. Element skończony przejściowy

Jednym z dwóch modeli numerycznych, które sformułowano w pracy, jest zastosowanie dyskretyzacji elementami powłokowymi w tych częściach konstrukcji, gdzie spodziewamy się istotnego wpływu lokalnych efektów deformacji (jak węzły, miejsca przyłożenia obciążeń lub podpory), i elementami belkowymi w pozostałych częściach, gdzie istotnym efektem jest globalne zachowanie się konstrukcji. Wydzielone w ten sposób części konstrukcji zwiążemy równaniem więzów (2.16), wyrażającymi zgodność przemieszczeń uogólnionych dla dowolnego punktu, wspólnego belki i powłoki.



Rys. 4.14. Przejściowy element skończony

Korzystając z równań (3.44) i (3.45) na przemieszczenie punktu przekroju cienkościennego, zależność (2.16) w węzle powłoki przyjmie postać

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u_x^{(s)} - u_x^{(b)} \\ u_y^{(s)} - u_y^{(b)} \\ u_z^{(s)} - u_z^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 r_x &= u_x^{0(s)} - u_x^{0(b)} - z_{i_k} \cdot \varphi_y^{(b)} + y_{i_k} \cdot \varphi_z^{(b)} - \omega_{i_k} \cdot \theta^{(b)} + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left((y_{i_k} - y_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)} \varphi_y^{(b)} + (z_{i_k} - z_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)} \varphi_z^{(b)} \right), \\
 r_y &= u_y^{0(s)} - u_y^{0(b)} + (z_{i_k} - z_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)} + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(-y_{i_k} \cdot \left(\varphi_x^{(b)2} + \varphi_z^{(b)2} \right) - z_{i_k} \cdot \varphi_y^{(b)} \varphi_z^{(b)} + y_{i_k} \cdot \varphi_x^{(b)2} \right), \\
 r_z &= u_z^{0(s)} - u_z^{0(b)} - (y_{i_k} - y_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)} + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(-y_{i_k} \cdot \varphi_y^{(b)} \varphi_z^{(b)} - z_{i_k} \cdot \left(\varphi_x^{(b)2} + \varphi_y^{(b)2} \right) + z_{i_k} \cdot \varphi_x^{(b)2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Równanie przyrostowe więzów będzie wynosiło

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta r_x \\ \Delta r_y \\ \Delta r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \rho_x + \Delta v_x \\ \Delta \rho_y + \Delta v_y \\ \Delta \rho_z + \Delta v_z \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

ze składnikami w postaci

$$\begin{aligned}
 \Delta \rho_x &= \Delta u_x^{0(s)} - \Delta u_x^{0(b)} + \\
 &\quad + \left(-\frac{y_{i_k}}{2} \cdot \varphi_y^{(b)} + \frac{y_{S_k}}{2} \cdot \varphi_y^{(b)} - \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_z^{(b)} + \frac{z_{S_k}}{2} \cdot \varphi_z^{(b)} \right) \Delta \varphi_x + \\
 &\quad + \left(-\frac{y_{i_k}}{2} \cdot \varphi_x^{(b)} + \frac{y_{S_k}}{2} \cdot \varphi_x^{(b)} - z_{i_k} \right) \Delta \varphi_y + \\
 &\quad + \left(y_{i_k} - \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_x^{(b)} + \frac{z_{S_k}}{2} \cdot \varphi_x^{(b)} \right) \Delta \varphi_z - \omega_{i_k} \Delta \theta, \\
 \Delta \rho_y &= \Delta u_y^{0(s)} - \Delta u_y^{0(b)} + \\
 &\quad + \left(y_{i_k} \cdot \varphi_x^{(b)} - y_{S_k} \cdot \varphi_x^{(b)} + z_{i_k} - z_{S_k} \right) \Delta \varphi_x + \\
 &\quad + \left(-\frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_z^{(b)} \right) \Delta \varphi_y + \left(y_{i_k} \cdot \varphi_z^{(b)} - \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_y^{(b)} \right) \Delta \varphi_z, \\
 \Delta \rho_z &= \Delta u_z^{0(s)} - \Delta u_z^{0(b)} + \\
 &\quad + \left(z_{i_k} \cdot \varphi_x^{(b)} - z_{S_k} \cdot \varphi_x^{(b)} - y_{i_k} + y_{S_k} \right) \Delta \varphi_x + \\
 &\quad + \left(-\frac{y_{i_k}}{2} \varphi_z^{(b)} + z_{i_k} \cdot \varphi_y^{(b)} \right) \Delta \varphi_y + \left(-\frac{y}{2_{i_k}} \cdot \varphi_y^{(b)} \right) \Delta \varphi_z,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_x &= -\frac{y_{i_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_z^{(b)} \Delta\theta^{(b)} + \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_y^{(b)} \Delta\varphi_x^{(b)} + \\
&\quad + \frac{y_{S_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_z^{(b)} \Delta\varphi_x^{(b)} - \frac{z_{S_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_y^{(b)} \Delta\varphi_x^{(b)}, \\
\Delta v_y &= \frac{y_{i_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_y^{(b)})^2 + \frac{y_{i_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_x^{(b)})^2 + \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_y^{(b)} \Delta\varphi_z^{(b)} + \\
&\quad - \frac{y_{S_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_x^{(b)})^2, \\
\Delta v_z &= \frac{y_{i_k}}{2} \cdot \Delta\varphi_y^{(b)} \Delta\varphi_z^{(b)} + \frac{z_{i_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_z^{(b)})^2 + \frac{z_{i_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_x^{(b)})^2 + \\
&\quad - \frac{z_{S_k}}{2} \cdot (\Delta\varphi_x^{(b)})^2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Element przejściowy łączy węzeł belki cienkościennej z węzłem elementu powłokowego. Oznacza to, że element przejściowy ma dwa węzły i odpowiednio sześć stopni swobody w węźle powłokowym i siedem stopni swobody w węźle belkowym

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{q}^{(t)} &= \{ \Delta\mathbf{q}^{(s)} \quad \Delta\mathbf{q}^{(b)} \} \\
\Delta\mathbf{q}^{(t)} &= \{ \Delta u_x^{0(s)} \quad \Delta u_y^{0(s)} \quad \Delta u_z^{0(s)} \quad \Delta\varphi_x^{(s)} \quad \Delta\varphi_y^{(s)} \quad \Delta\varphi_z^{(s)} \\
&\quad \Delta u_x^{0(b)} \quad \Delta u_y^{0(b)} \quad \Delta u_z^{0(b)} \quad \Delta\varphi_x^{(b)} \quad \Delta\varphi_y^{(b)} \quad \Delta\varphi_z^{(b)} \quad \Delta\theta^{(b)} \}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Macierz sztywności przyrostowa $\mathbf{k}_L^{(t)}$ (2.20) będzie równa

$$\mathbf{k}_L^{(t)} = k \cdot \left(\mathbf{B}_L^{(t)} \right)^T \mathbf{B}_L^{(t)}, \tag{4.37}$$

natomiast wektor sił wewnętrznych $\mathbf{f}^{(t)}$ (2.21) może być zapisany w formie

$$\mathbf{f}^{(t)} = k \cdot \mathbf{B}_L^{(t)} \mathbf{r}. \tag{4.38}$$

Macierz sztywności geometryczna $\mathbf{k}_\sigma^{(t)}$ (2.22) będzie dana wzorem

$$\mathbf{k}_\sigma^{(t)} = k \cdot \mathbf{B}_\sigma^{(t)}. \tag{4.39}$$

Macierze $\mathbf{B}_L^{(t)}$ i $\mathbf{B}_\sigma^{(t)}$ określone są wzorami (4.40) i (4.41).

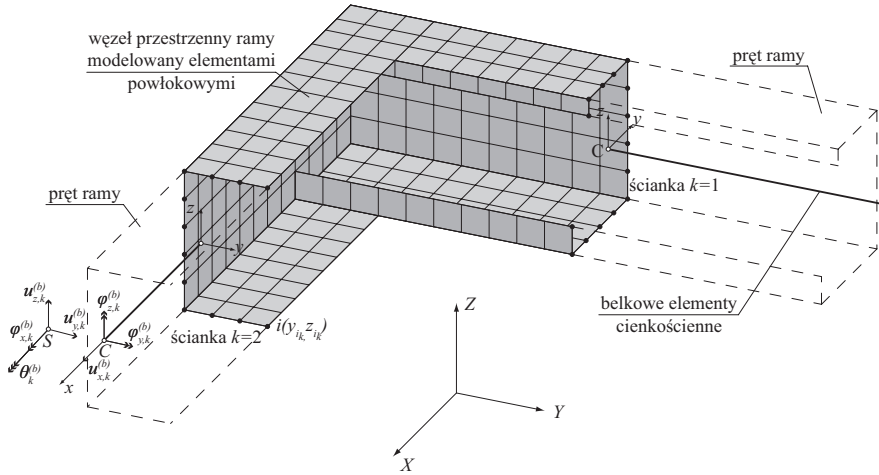
5. Przestrzenny element węzłowy

5.1. Macierz sztywności dla przestrzennego elementu węzłowego

Przyjmijmy, że ze struktury ramy wydzielony został węzeł przestrzenny, łączący się z prętami na ściankach $k = 1, 2 \dots K$ (patrz rys. 1.2(c)). Węzeł ten dyskretyzujemy skończonymi elementami powłokowymi w taki sposób, aby węzły elementów powłokowych opisywały również geometrię przekrojów poprzecznych prętów, łączących się z węzłem ramy na każdej ze ścianek k . Pręty ramy dyskretyzujemy belkowymi elementami cienkościennymi, rys. 5.1. Opisane dalej postępowanie jest uogólnieniem na przypadek analizy geometrycznie nieliniowej metody opisanej w [15].

Pole przemieszczeń dla niesymetrycznego otwartego przekroju cienkościennego w lokalnym układzie współrzędnych pręta wyznaczają zależności (3.43–3.45). Wykorzystując je w równaniach więzów (1.1) i utożsamiając wartości przemieszczenia ze współrzędnymi wektorów przyrostów przemieszczeń elementów skończonych powłokowego (4.1) i cienkościennego (4.16) we wspólnym przekroju poprzecznym k (który w dalszym ciągu będziemy nazywać ścianką) otrzymamy równania w formie macierzowej, które dla każdego punktu i będą miały postać

$$\Delta \mathbf{q}_{i_k}^{(s)} = \mathbf{B}_{i_k}^{(j)} \Delta \mathbf{q}_k^{(b)}, \quad (5.1)$$



Rys. 5.1. Przestrzenny element węzłowy

gdzie $\Delta \mathbf{q}_k^{(b)}$ jest wektorem przyrostów lokalnych stopni swobody belkowego elementu cienkościennego

$$\Delta \mathbf{q}_k^{(b)} = \{ \Delta u_x^{0(b)} \quad \Delta u_y^{0(b)} \quad \Delta u_z^{0(b)} \quad \Delta \varphi_x^{(b)} \quad \Delta \varphi_y^{(b)} \quad \Delta \varphi_z^{(b)} \quad \Delta \theta^{(b)} \}_{i_k}, \quad (5.2)$$

a $\mathbf{q}_{i_k}^{(s)}$ jest wektorem przyrostów lokalnych translacyjnych stopni swobody powłokowego elementu cienkościennego

$$\Delta \mathbf{q}_{i_k}^{(s)} = \{ \Delta u_x^{0(s)} \quad \Delta u_y^{0(s)} \quad \Delta u_z^{0(s)} \}_{i_k}, \quad (5.3)$$

natomiast (x, y, z) jest lokalnym układem współrzędnych dla elementu cienkościennego. Macierz $\mathbf{B}_{i_k}^{(j)}$ definiuje prawo transformacji pomiędzy translacyjnymi stopniami swobody elementów powłokowych i stopniami swobody belkowego elementu cienkościennego

$$\mathbf{B}_{i_k}^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & B_{i_k,14}^{(j)} & B_{i_k,15}^{(j)} & B_{i_k,16}^{(j)} & B_{i_k,17}^{(j)} \\ 0 & 1 & 0 & B_{i_k,24}^{(j)} & B_{i_k,25}^{(j)} & B_{i_k,26}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_{i_k,34}^{(j)} & B_{i_k,35}^{(j)} & B_{i_k,36}^{(j)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

w której

$$\begin{aligned}
 B_{i_k 14}^{(j)} &= \left(-\frac{y_{i_k}}{2} + \frac{y_{S_k}}{2} \right) \cdot \varphi_y^{(b)} - \left(\frac{z_{i_k}}{2} + \frac{z_{S_k}}{2} \right) \cdot \varphi_z^{(b)}, \\
 B_{i_k 15}^{(j)} &= -z_{i_k} + \left(-\frac{y_{i_k}}{2} + \frac{y_{S_k}}{2} \right) \cdot \varphi_x^{(b)}, \\
 B_{i_k 16}^{(j)} &= y_{i_k} + \left(-\frac{z_{i_k}}{2} + \frac{z_{S_k}}{2} \right) \cdot \varphi_x^{(b)}, \\
 B_{i_k 17}^{(j)} &= -\omega_{i_k}, \\
 B_{i_k 24}^{(j)} &= z_{i_k} - z_{S_k} + (y_{i_k} - y_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)}, \\
 B_{i_k 25}^{(j)} &= -\frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_z^{(b)}, \\
 B_{i_k 26}^{(j)} &= y_{i_k} \cdot \varphi_z^{(b)} - \frac{z_{i_k}}{2} \cdot \varphi_y^{(b)}, \\
 B_{i_k 34}^{(j)} &= -y_{i_k} + y_{S_k} + (z_{i_k} - z_{S_k}) \cdot \varphi_x^{(b)}, \\
 B_{i_k 35}^{(j)} &= -\frac{y_{i_k}}{2} \cdot \varphi_z^{(b)} + z_{i_k} \cdot \varphi_y^{(b)}, \\
 B_{i_k 36}^{(j)} &= -\frac{y_{i_k}}{2} \cdot \varphi_y^{(b)}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Należy zwrócić uwagę, że macierz $\mathbf{B}_L^{(t)}$ ze wzoru (4.40) po usunięciu składników korespondujących ze stopniami swobody elementu powłokowego i zmianie znaku, jest taka sama jak $\mathbf{B}_{i_k}^{(j)}$.

Pierwszym krokiem w sformułowaniu macierzy sztywności przestrzennego elementu węzłowego i wektora sił jest kondensacja statyczna [65] pełnej macierzy sztywności węzła do postaci ze stopniami swobody zredukowanymi tylko do translacyjnych stopni swobody na ściankach k , we wspólnych węzłach powłoki i belek cienkościennych i_k , $i_k = 1, 2, \dots, I_k$. Wektor stopni swobody $\Delta \mathbf{q}_{i_k}^{(s)}$ transformujemy do globalnego układu współrzędnych (X, Y, Z) według wzoru

$$\Delta \mathbf{Q}_{i_k}^{(s)} = \left(\mathbf{T}_{i_k}^{(s)} \right)^T \Delta \mathbf{q}_{i_k}^{(s)}. \tag{5.6}$$

gdzie $\Delta \mathbf{Q}_{i_k}^{(s)}$ jest wektorem globalnych translacyjnych stopni swobody w węźle i_k na ściance k oraz $\mathbf{T}_{i_k}^{(s)}$ jest macierzą transformacji. Wykorzystu-

jąc (5.6) w (5.1) otrzymamy

$$\Delta \mathbf{Q}_{i_k}^{(s)} = \left(\mathbf{T}_{i_k}^{(s)} \right) \mathbf{B}_{i_k}^{(j)} \Delta \mathbf{q}_k^{(b)}. \quad (5.7)$$

Wektor lokalnych stopni swobody $\Delta \mathbf{q}_k^{(b)}$ możemy z kolei wyrazić poprzez wektor globalnych stopni swobody $\Delta \mathbf{Q}_k^{(b)}$ zgodnie ze wzorem

$$\Delta \mathbf{q}_k^{(b)} = \mathbf{T}_k^{(b)} \Delta \mathbf{Q}_k^{(b)}, \quad (5.8)$$

gdzie $\mathbf{T}_k^{(b)}$ jest macierzą transformacji cienkościennych stopni swobody [102]. W końcu podstawiając (5.7) do (5.8) otrzymamy wzór wiążący globalne translacyjne stopnie swobody w węźle i_k z globalnymi cienkościennymi stopniami swobody na ścianie k w postaci

$$\Delta \mathbf{Q}_{i_k}^{(s)} = \left(\mathbf{T}_{i_k}^{(s)} \right)^T \mathbf{B}_{i_k}^{(j)} \mathbf{T}_k^{(b)} \Delta \mathbf{Q}_k^{(b)}, \quad (5.9)$$

który możemy zapisać w formie

$$\Delta \mathbf{Q}_{i_k}^{(s)} = \mathbf{A}_{i_k}^{(j)} \Delta \mathbf{Q}_k^{(b)}, \quad (5.10)$$

gdzie macierz transformacji $\mathbf{A}_{i_k}^{(j)}$ wynosi

$$\mathbf{A}_{i_k}^{(j)} = \left(\mathbf{T}_{i_k}^{(s)} \right)^T \mathbf{B}_{i_k}^{(j)} \mathbf{T}_k^{(b)}. \quad (5.11)$$

Wektor globalnych translacyjnych stopni swobody $\Delta \mathbf{Q}^{(s)}$ dla wszystkich węzłów $i_k = 1, 2, \dots, I_k$ na ścianie k wiąże z cienkościennymi stopniami swobody $\Delta \mathbf{Q}^{(b)}$ wzór

$$\Delta \mathbf{Q}_k^{(s)} = \mathbf{A}_k^{(j)} \Delta \mathbf{Q}_k^{(b)}, \quad (5.12)$$

z macierzą transformacji w formie

$$\mathbf{A}_k^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1_k}^{(j)} \\ \mathbf{A}_{2_k}^{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{I_k}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Definiując następnie wektor $\Delta \mathbf{Q}^{(b)}$ globalnych cieniściennych stopni swobody dla całego przestrzennego elementu węzłowego z K ściankami w postaci

$$\Delta \mathbf{Q}^{(b)} = \{\Delta \mathbf{Q}_1^{(b)} \quad \Delta \mathbf{Q}_1^{(b)} \quad \dots \quad \Delta \mathbf{Q}_K^{(b)}\}, \quad (5.14)$$

oraz wektor globalnych translacyjnych stopni swobody dla tego samego przestrzennego elementu węzłowego

$$\Delta \mathbf{Q}^{(s)} = \{\Delta \mathbf{Q}_1^{(s)} \quad \Delta \mathbf{Q}_1^{(s)} \quad \dots \quad \Delta \mathbf{Q}_K^{(s)}\}, \quad (5.15)$$

otrzymamy wzór

$$\Delta \mathbf{Q}^{(s)} = \mathbf{A}^{(j)} \Delta \mathbf{Q}^{(b)}, \quad (5.16)$$

z macierzą transformacji $\mathbf{A}^{(j)}$ w formie

$$\mathbf{A}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(j)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{(j)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^{(j)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_K^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

5.2. Procedura budowy równań MES

Równanie równowagi MES dla przestrzennego elementu węzłowego po kondensacji statycznej, z translacyjnymi stopniami swobody ma formę

$$\mathbf{K}_T^{(s)} \Delta \mathbf{Q}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s)} - \mathbf{F}^{(s)}, \quad (5.18)$$

gdzie $\mathbf{K}_T^{(s)}$ jest globalną macierzą sztywności stycznej, $\mathbf{P}^{(s)}$ jest wektorem obciążenia, a $\mathbf{F}^{(s)}$ jest wektorem sił wewnętrznych. Korzystając z transformacji (5.17), zdefiniujemy macierz sztywności stycznej $\tilde{\mathbf{K}}_T^{(b)}$, wektor ob-

ciężenia $\tilde{\mathbf{P}}^{(b)}$, wektor sił wewnętrznych $\tilde{\mathbf{F}}^{(b)}$ oraz wektor stopni swobody $\Delta\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)}$ według zależności

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}_T^{(b)} &= (\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{A}^{(j)}, \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(b)} &= (\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{P}^{(s)}, \\ \tilde{\mathbf{F}}^{(b)} &= (\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{F}^{(s)}, \\ \Delta\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} &= (\mathbf{A}^{(j)})^T \Delta\mathbf{Q}^{(s)}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Wykorzystując (5.19) w (5.18) otrzymamy końcową postać równań równowagi MES, wyrażoną poprzez cienkościenne stopnie swobody

$$\tilde{\mathbf{K}}_T^{(b)} \Delta\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(b)} - \tilde{\mathbf{F}}^{(b)}.\tag{5.20}$$

Dla otrzymania globalnego układu równań równowagi MES należy zastosować standardową procedurę agregacji elementów skończonych w jeden dyskretny system.

Powyższe sformułowanie problemu pozwala na modelowanie dowolnej części konstrukcji ramy przestrzennej, a nie tylko jej węzłów. Otwiera to możliwość budowy dowolnie zlokalizowanych przestrzennych elementów węzłowych, w tym również podporowych. Zależność (5.19) pozwala na obliczenie ekwiwalentnego wektora obciążenia zgodnego z siłami przekrojowymi elementu cienkościennego.

6. Metody numeryczne rozwiązania

6.1. Metoda *Newtona–Raphsona*

Nieliniowy układ przyrostowych równań równowagi MES (2.32) rozwiązywano iteracyjnie metodą Newtona–Raphsona. Jak wiadomo jest to metoda zbieżna z kwadratem o małym jednakże promieniu zbieżności, co wymaga przyjmowania stosunkowo małych wielkości przyrostów parametrów sterujących procesem obliczeń. Takimi parametrami obliczeń mogą być przyrosty obciążenia zewnętrznego lub przyrost przemieszczenia (grupy przemieszczeń). W pierwszym przypadku mówimy o *sterowaniu obciążeniowym*, w drugim natomiast o *sterowaniu przemieszczeniowym* procesem obliczeń. W obu przypadkach stosownym musi być założenie, że w interesującej nas części obliczanej ścieżki stanów równowagi parametr sterowania jest wielkością monotonicznie rosnącą. Tak nie będzie jeśli na ścieżce równowagi wystąpi punkt graniczny (zawodzi sterowanie obciążeniem), lub jeśli wystąpi punkt krytyczny przeciwwrotny (zawodzi sterowanie przemieszczeniem). W takim przypadku koniecznym jest uogólnienie metody postępowania wprowadzając jako niezależny parametr tzw. *parametr łuku*, będący pewną miarą długości wektora stycznego do ścieżki równowagi. Wymaga to uzupełnienia kompletu równań MES o tzw. równanie więzów *Riksa–Wempnera*. W [98] opisano bliżej tę metodę oraz inne metody iteracyjne rozwiązania.

W programie AmFEM zaimplementowano metodę rozwiązania dla sterowania przyrostem parametru obciążenia lub przyrostem wybranego przemieszczenia.

Układ równań iteracyjnych metody Newtona–Raphsona dla przypadku obciążenia proporcjonalnego można formalnie napisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^{(n,i-1)} \delta \mathbf{Q}^{(n,i)} &= \lambda^{(n)} \bar{\mathbf{P}}^{(n)} - \mathbf{F}^{(n,i-1)}, \\ \mathbf{Q}^{(n,i)} &= \mathbf{Q}^{(n,i-1)} + \delta \mathbf{Q}^{(n,i)}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{P}}^{(n)}$ – wektor charakteryzujący rozkład obciążenia,

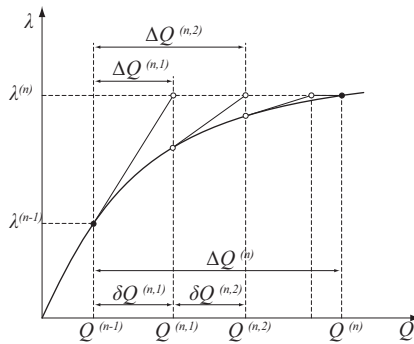
$\lambda^{(n)}$ – parametr obciążenia, $\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} + \Delta \lambda$,

$\mathbf{Q}^{(n,i)}$ – wektor przemieszczeń w i -tej iteracji n -tego kroku przyrostowego,

$\delta \mathbf{Q}^{(n,i)}$ – korekta wektora przemieszczeń w i -tej iteracji (nie jest to wariacja).

Całkowity przyrost wektora przemieszczeń w n -tym kroku przyrostowym wynosi

$$\Delta \mathbf{Q}^{(n,i)} = \sum_{k=1}^i \delta \mathbf{Q}^{(n,k)}. \quad (6.2)$$



Rys. 6.1. Metoda Newtona–Raphsona

Rys. 6.1 przedstawia jednowymiarową interpretację graficzną iteracji Newtona–Raphsona.

Zbieżność iteracji kontrolowano obliczając normy *Euklidesa* dla względnego przyrostu wektora stopni swobody i wektora sił residualnych.

6.2. Punkty krytyczne stanu równowagi

W mechanice ciała stałego, zadania o stateczności równowagi są rozwiązywane przez badanie ruchu układu sprężystego w otoczeniu rozważanego położenia równowagi stosując *kryterium dynamiczne*. Jeśli układ jest zachowawczy można nie rozpatrywać jego drgań i wówczas równoważnym kryterium jest prostsze *kryterium energetyczne Lagrange'a-Dirichleta* stwierdzające, że w stanie równowagi statecznej energia potencjalna układu osiąga minimum.

W metodzie elementów skończonych kryterium to oznacza, że w stanie krytycznym (granicznym lub bifurkacji) wyznacznik macierzy stycznej konstrukcji \mathbf{K}_T jest równy zero

$$\det(\mathbf{K}_T) = 0, \quad (6.3)$$

co jednakże jest tylko warunkiem koniecznym osiągnięcia stanu krytycznego [98].

Z kolei, dla układów zachowawczych, kryterium energetyczne jest równoważne *kryterium statycznemu*, w którym rozpatruje się stany równowagi bliskie stanowi krytycznemu równowagi.

Odstąpienie od założenia sprężystości układu (wynikające na przykład, z przyjęcia materiału sprężysto-plastycznego) znacznie komplikuje rozwiązanie zadania stateczności konstrukcji ponieważ mamy wówczas do czynienia z układem niezachowawczym. Możliwym jest jednakże dalsze stosowanie kryterium statycznego, w którym rozpatruje się bliskie sobie stany równowagi z dodatkowymi warunkami [37].

Rozróżnienie punktu krytycznego wymaga badania dodatkowych warunków [18]. Punkt krytyczny jest punktem granicznym jeśli dodatkowo spełniona jest zależność

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \neq \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

gdzie \mathbf{v} jest wektorem formy utraty stateczności konstrukcji. Jeśli zaś spełniony jest warunek ortogonalności

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

wówczas punkt krytyczny jest punktem bifurkacji.

W wielu przypadkach, kiedy nie ma konieczności obliczania dokładnej wartości obciążenia krytycznego ograniczamy się tylko do śledzenia zmiany znaku wyznacznika macierzy stycznej.

Wyznacznik macierzy \mathbf{A} o rozmiarze $(n \times n)$ można obliczyć korzystając z twierdzenia *Cauchy'ego*

$$\det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U}) = \prod_{i=1}^n l_{ii} \cdot \prod_{i=1}^n u_{ii}, \quad (6.6)$$

gdzie wykorzystano rozkład trójkątny macierzy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ [32].

Znak wyznacznika macierzy \mathbf{A} można wówczas obliczyć z zależności

$$\operatorname{sgn}(\det(\mathbf{A})) = \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn}(l_{ii}) \cdot \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn}(u_{ii}). \quad (6.7)$$

Takie podejście zastosowano w programie AmFEM.

6.3. Algebraiczny problem własny

W programie AmFEM rozwiązywany jest *niestandardowy problem własny*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}. \quad (6.8)$$

Jeśli \mathbf{A} jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną to wówczas (6.8) sprowadzimy do postaci standardowej obliczając $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$ (rozkład *Choleskiego*)

$$\mathbf{LL}^T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (6.9)$$

Oznaczając

$$\mathbf{L}^T\mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (6.10)$$

mamy

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}^{-T}\mathbf{w}, \quad (6.11)$$

co pozwala napisać

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{w} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{w}. \quad (6.12)$$

W końcu po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{L}^{-T}, \\ \mu &= \frac{1}{\lambda},\end{aligned}\tag{6.13}$$

otrzymamy standardowy problem własny w formie

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}.\tag{6.14}$$

Macierz \mathbf{B} została przekształcona przez podobieństwo.

Problem własny (6.14) rozwiązywano *metodą potęgową* [24], zaimplementowaną w programie, lub wykorzystując funkcje systemu MATLAB. W obu przypadkach można obliczyć zdefiniowaną przez użytkownika liczbę wartości i wektorów własnych.

Wektory własne dla problemu (6.8) obliczymy ze wzoru (6.11).

6.4. Kondensacja statyczna

Budowa przestrzennego elementu węzłowego wymaga redukcji stopni swobody elementów skończonych dyskretyzujących węzeł tylko do translacyjnych stopni swobody, zlokalizowanych na każdej ze ścianek węzła, łączących węzeł z prętami ramy. Redukcja taka wymaga wykonania kondensacji statycznej.

Po podzieleniu powłokowych stopni swobody na dwie grupy: związanych z translacyjnymi stopniami swobody na ściankach $\Delta\mathbf{Q}_{uu}$ i resztę stopni swobody $\Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi}$

$$\Delta\mathbf{Q} = \{\Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} \quad \Delta\mathbf{Q}_{uu}\},\tag{6.15}$$

oraz analogicznie wektora sił wewnętrznych i wektora obciążenia

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \{\mathbf{P}_{\varphi\varphi} \quad \mathbf{P}_{uu}\}, \\ \mathbf{F} &= \{\mathbf{F}_{\varphi\varphi} \quad \mathbf{F}_{uu}\},\end{aligned}\tag{6.16}$$

możemy zapisać równanie równowagi MES w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{T\varphi u} \\ \mathbf{K}_{T u\varphi} & \mathbf{K}_{Tuu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} \\ \Delta\mathbf{Q}_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\varphi\varphi} \\ \mathbf{P}_{uu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\varphi\varphi} \\ \mathbf{F}_{uu} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Otrzymamy w ten sposób układ dwóch równań

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{T\varphi\varphi}\Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} + \mathbf{K}_{T\varphi u}\Delta\mathbf{Q}_{uu} = \mathbf{P}_{\varphi\varphi} - \mathbf{F}_{\varphi\varphi} \\ \mathbf{K}_{T u\varphi}\Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi} + \mathbf{K}_{Tuu}\Delta\mathbf{Q}_{uu} = \mathbf{P}_{uu} - \mathbf{F}_{uu} \end{cases}, \quad (6.18)$$

gdzie $\mathbf{K}_{T\varphi\varphi}$, $\mathbf{K}_{T\varphi u}$, $\mathbf{K}_{T u\varphi}$ i \mathbf{K}_{Tuu} są podmacierzami macierzy sztywności stycznej, przepisanyymi w odpowiedniej kolejności, korespondującej z kolejnością stopni swobody wektorów $\Delta\mathbf{Q}_{\varphi\varphi}$ i $\Delta\mathbf{Q}_{uu}$.

Po wyliczeniu $\mathbf{Q}_{\varphi\varphi}$ z zależności (6.18)₁ i podstawieniu do (6.18)₂ otrzymamy równanie równowagi w postaci

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K}_{Tuu} - (\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{K}_{T\varphi u}\right)\Delta\mathbf{Q}_{uu} &= \left(\mathbf{P}_{uu} - \mathbf{K}_{T u\varphi}(\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{P}_{\varphi\varphi}\right) + \\ &\quad - \left(\mathbf{F}_{uu} - \mathbf{K}_{T u\varphi}(\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{F}_{\varphi\varphi}\right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Oznaczając

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^{(s)} &= \mathbf{K}_{Tuu} - (\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{K}_{T\varphi u}, \\ \mathbf{P}^{(s)} &= \mathbf{P}_{uu} - \mathbf{K}_{T u\varphi}(\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{P}_{\varphi\varphi}, \\ \mathbf{F}^{(s)} &= \mathbf{F}_{uu} - \mathbf{K}_{T u\varphi}(\mathbf{K}_{T\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{F}_{\varphi\varphi}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

i dodatkowo $\Delta\mathbf{Q}^{(s)} \equiv \Delta\mathbf{Q}_{uu}$, otrzymamy równanie równowagi

$$\mathbf{K}_T^{(s)}\Delta\mathbf{Q}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s)} - \mathbf{F}^{(s)}, \quad (6.21)$$

zapisane w formie wymaganej do obliczenia macierzy sztywności przestrzennego elementu węzłowego.

7. Programy komputerowe

7.1. Program AmFEM do analizy konstrukcji cienkościennych

Model numeryczny opisany w rozdziałach 2–6. został zaimplementowany do programu AmFEM. Opis programu wraz z opisem plików wejściowych i sposobu obsługi przedstawiony jest w dodatku A.

7.2. Programy do wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekroju cienkościennego otwartego

W następnych dwóch punktach zostaną podane podstawy teoretyczne opracowania dwóch dodatkowych, pomocniczych, programów komputerowych służących do wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekroju cienkościennego otwartego, które są dalej szczegółowo opisane w dodatkach B i C.

Program SecPropGRAPH, został opracowany jako pierwszy. Korzystając z podstawowych definicji znanych z teorii grafów, przekrój poprzeczny został opisany za pomocą dendrytu, a szukane wartości charakterystyk geometrycznych są liczone dla gałęzi dendrytu i następnie sumowane.

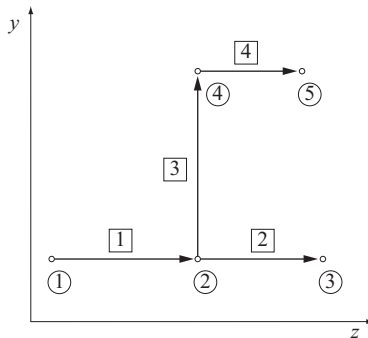
Podczas obliczania macierzy sztywności stycznej dla cienkościennego elementu belkowego zaistniała konieczność obliczania charakterystyk wyższego rzędu, które są zależne od pochodnych funkcji spaczenia $\frac{\partial \omega(y, z)}{\partial y}$

i $\frac{\partial \omega(y, z)}{\partial z}$, np. (C.22) i (C.23). Takie charakterystyki nie są możliwe do obliczenia stosując podejście zastosowane w programie SecPropGRAPH (opisane w punkcie 7.2.1). Należy więc określić funkcję spaczenia wraz z jej pochodnymi. Można to zrobić rozwiązując *zagadnienie Neumanna*. Rozwiązanie tego problemu w implementacji MES zostało zrealizowane w programie SecPropFEM.

7.2.1. Program SecPropGRAPH

Przekrój poprzeczny pręta cienkościennego składa się z połączonych ze sobą cienkich (w porównaniu z ich długością) ścianek. Jednoznaczne „poruszanie się” po takim, czasem dość złożonym przekroju poprzecznym jest proste jeśli opiszemy go grafem–dendrytem z gałęziami, które mają przypisaną do siebie grubość [63].

Jak wiadomo dendryt jest to spójny graf planarny (czyli drzewo), skierowany, z wyróżnionym wierzchołkiem (węzłem), zwanym korzeniem. Korzeń jest początkiem drogi skierowanej do każdego węzła grafu. Na rys. 7.1 pokazano przykład grafu o $N = 5$ wierzchołkach i $M = 4$ gałęziach (krawędziach).



Rys. 7.1. Graf

Znajomość dendrytu przekroju poprzecznego i jego orientacji pozwoli nam na wyznaczenie charakterystyk geometrycznych. Zadanie odnalezienie

dendrytu, czasem zwane *problemem komiwojażera* (jeśli w grafie występują cykle) sprowadza się do przeszukiwania grafu [51, 52, 100]. Ponieważ nie rozważamy przekrojów zamkniętych lub mieszanych, zatem nie musimy szukać cykli w dendrycie. W takim przypadku zadanie jest stosunkowo łatwe do wykonania.

Po arbitralnym wybraniu korzenia dendrytu (w programie SecPROPGRAPH jest to pierwszy wierzchołek), należy „przejsć” przez kolejne krawędzie grafu, oznaczając każdą kolejną krawędź jako odwiedzoną i przypisać jej zwrot zgodny z kierunkiem poruszania się. W przypadku rozgałęzienia wierzchołków wybieramy dowolną nieoznaczoną krawędź wspólną dla wierzchołka. W przypadku dojścia do końca drogi, należy cofnąć się do najbliższego wierzchołka wspólnego dla trzech lub więcej krawędzi, wybrać kolejną nieoznaczoną krawędź i kontynuować szukanie drogi. Procedurę taką powtarza się aż do wyczerpania wszystkich nieoznaczonych krawędzi.

Takie postępowanie jest przedstawione w postaci schematu blokowego na rys. 7.2.

Dla łatwości zapisu, linię środkową przekroju cienkościennego (czyli dendryt) opiszemy korzystając ze współrzędnych parametrycznych

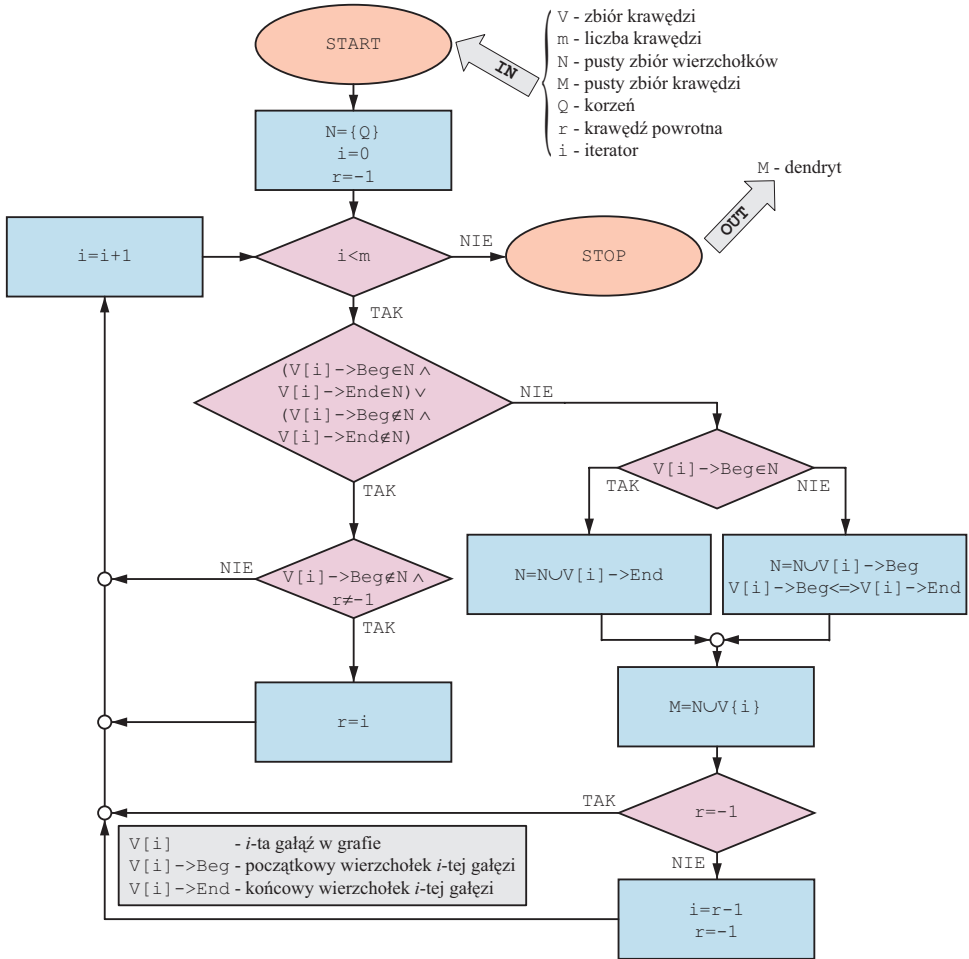
$$\begin{cases} y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}, \quad (7.1)$$

ponadto wprowadzimy lokalny układ współrzędnych (x, s, n) , jak na rys. 7.3, taki że, współrzędna s będzie styczna do linii środkowej. W dowolnym punkcie płaszczyzny przekroju poprzecznego przyjmujemy punkt B , zwany biegunem, wtedy *współrzędna wycinkowa* będzie wynosiła

$$\omega_B(s) = \int_0^s \boldsymbol{\varrho}(s) \mathbf{e}_n(s) ds, \quad (7.2)$$

gdzie

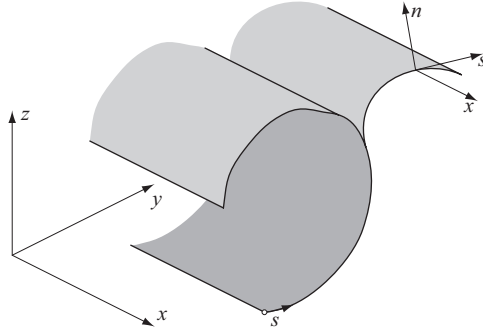
$$\mathbf{e}_n = \left[-\frac{dz(s)}{ds} \quad \frac{dy(s)}{ds} \right], \quad (7.3)$$



Rys. 7.2. Schemat blokowy algorytmu szukania dendrytu

jest wersorem lokalnego układu współrzędnych, a $\varrho(s)$ jest wektorem wodzącym pomiędzy biegunem B a marszrutą dendrytu.

Należy zwrócić uwagę, że wartość $|d\omega|$ jest podwojonym polem powierzchni zawartej pomiędzy przyrostem drogi ds i promieniami wodzącymi $\varrho(s)$ i $\varrho(s + ds)$.



Rys. 7.3. Lokalny układ współrzędnych

Biorąc pod uwagę powyższe uwagi i fakt, że dendryt stanowią prostoliniowe krawędzie pomiędzy wierzchołkami opisującymi charakterystyczne punkty przekroju cienkościennego o stałej grubości t , możemy w prosty sposób określić wartość współrzędnej wycinkowej w wierzchołkach dendrytu. Stosując następnie interpolację współrzędnych y , z i ω w postaci

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathbf{N}(s)\mathbf{y}, \\ z(s) &= \mathbf{N}(s)\mathbf{z}, \\ \omega(s) &= \mathbf{N}(s)\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \left[1 - \frac{s}{l} \quad \frac{s}{l}\right], \\ \mathbf{y} &= \{y_i \quad y_j\}, \\ \mathbf{z} &= \{z_i \quad z_j\}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \{\omega_i \quad \omega_j\}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

w których współrzędne z indeksem i odnoszą się do początkowego wierzchołka krawędzi, współrzędne z indeksem j odnoszą się do końcowego wierzchołka krawędzi a l jest długością krawędzi, możemy policzyć war-

tości charakterystyk przekroju (B.1–B.15). Na przykład moment bezwładności (B.5) będzie można obliczyć według wzoru

$$J_y = \int_d z^2(s) \cdot t(s) \, ds \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^M l_i \cdot t_i \left(z_i^2 + z_i \cdot z_j + z_j^2 \right), \quad (7.6)$$

gdzie d określa dendryt, a M liczbę krawędzi w dendrycie.

7.2.2. Program SecPropFEM

Zagadnienie Neumanna ma postać

$$\nabla^2 \omega(y, z) \equiv \frac{\partial^2 \omega(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega(y, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (7.7)$$

z naturalnym warunkiem brzegowym na konturze przekroju poprzecznego o wektorze $\mathbf{e}_n = \{e_{n_y} \ e_{n_z}\}$ normalnej zewnętrznej \mathbf{n}

$$\left(\frac{\partial \omega(y, z)}{\partial y} - z \right) e_{n_y} + \left(\frac{\partial \omega(y, z)}{\partial z} + y \right) e_{n_z} = 0, \quad (7.8)$$

oraz z podstawowym warunkiem brzegowym

$$\omega(y_S, z_S) = 0. \quad (7.9)$$

w środku zginania S o współrzędnych (y_S, z_S) , jak na rys. 7.4.

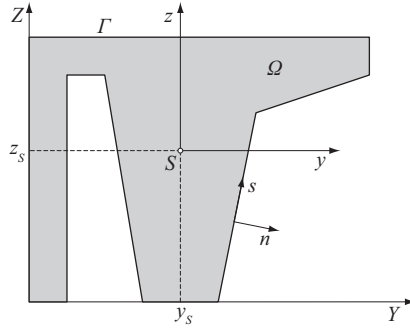
Ważone równanie całkowe dla problemu (7.7) ma postać

$$- \int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) d\Omega = 0, \quad (7.10)$$

gdzie v jest funkcją testową.

Wykorzystanie całkowania przez części prowadzi do równania

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot e_{n_y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot e_{n_z} \right) v \, d\Gamma = 0, \quad (7.11)$$



Rys. 7.4. Przekrój poprzeczny profilu cienkościennego

które po uwzględnieniu warunku brzegowego (7.8) można zapisać w formie [30, 90]

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} (z \cdot e_{n_y} - y \cdot e_{n_z}) v d\Gamma = 0. \quad (7.12)$$

Powyższe równanie zostało rozwiązane metodą elementów skończonych. Wykorzystano płaski, izoparametryczny element skończony o czterech węzłach i jednym stopniu swobody w węźle. Wektor stopni swobody będzie równy

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4\}. \quad (7.13)$$

Macierz funkcji kształtu

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \quad (7.14)$$

stanowią biliniowe funkcje *Lagrange'a*, które w układzie współrzędnych znormalizowanych (ξ, η) mają postać

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \cdot (1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) \cdot (1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \cdot (1 + \eta). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Aproksymacja szukanej funkcji ω i funkcji testowej v jest w postaci

$$\begin{aligned}\omega &= \mathbf{N}\boldsymbol{\omega}, \\ v &= \mathbf{N}\mathbf{d}.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Element jest izoparametryczny, co oznacza, że

$$\begin{aligned}y &= \mathbf{N}\mathbf{y}, \\ z &= \mathbf{N}\mathbf{z},\end{aligned}\tag{7.17}$$

gdzie:

\mathbf{x} , \mathbf{y} – wektory współrzędnych węzłów elementu.

Wykorzystując (7.16) i (7.17) w (7.12) otrzymamy równanie dla elementu

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^T \left\{ \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) d\Omega \boldsymbol{\omega} + \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}\mathbf{z} \cdot \mathbf{e}_{n_y} - \mathbf{N}\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_{n_z}) \mathbf{N}^T d\Gamma \right\} = \mathbf{0},\end{aligned}\tag{7.18}$$

które pozwala zdefiniować macierz sztywności \mathbf{k} równą

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) d\Omega,\tag{7.19}$$

oraz wektor obciążenia \mathbf{p} wynoszący

$$\mathbf{p} = \int_{\Gamma} (\mathbf{N}\mathbf{z} \cdot \mathbf{e}_{n_y} - \mathbf{N}\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_{n_z}) \mathbf{N}^T d\Gamma,\tag{7.20}$$

W ten sposób otrzymamy równanie (7.18) w formie

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{p}.\tag{7.21}$$

Agregując elementy skończone w jeden układ dyskretny dostaniemy układ równań MES w postaci

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}.\tag{7.22}$$

Wszystkie macierze i wektory obliczono numerycznie z wykorzystaniem trzypunktowej kwadratury *Gaussa* (3x3) dla powierzchni elementu.

8. Przykłady

8.1. Uwagi wstępne

Podstawowym celem przykładów opisanych w tym rozdziale jest potwierdzenie efektywności opracowanych algorytmów i programów komputerowych dla dwóch modeli numerycznych, a mianowicie modelu wykorzystującego koncepcję przestrzennego elementu węzłowego oraz modelu z elementami przejściowymi. Obydwa modele numeryczne są sformułowaniami oryginalnymi w zakresie ich uogólnienia na problemy geometrycznie nieliniowe i procedurę budowy macierzy sztywności i wektora sił wewnętrznych dla cienkościennych elementów skończonych. W każdym z tych modeli korzystano z danych literaturowych w zakresie formułowania podstawowych równań dla powłoki i pręta cienkościennego, co określa dokładność użytej teorii mechaniki. Dlatego, posiadając odpowiednie oprogramowanie, rozwiązania dla modeli 1D/3D porównywano przede wszystkim z własnymi rozwiązaniami 3D, a w niektórych tylko przypadkach z rozwiązaniami znanymi z literatury bądź z wynikami uzyskanymi za pomocą systemu obliczeniowego ABAQUS.

W dalszej części rozdziału zamieszczono wybrane przykłady liniowej analizy statycznej oraz analizy wyboczenia i stateczności konstrukcji.

W przykładach zwracano szczególną uwagę na:

1. Poprawność rozwiązania dwoma modelami 1D/3D.
2. Efektywność rozwiązania w porównaniu z rozwiązaniem w pełni 3D.
3. Zilustrowanie różnych możliwości stosowania przestrzennego elementu węzłowego, w tym modelowania złożonych części konstrukcji wę-

złów ram, warunków brzegowych i sposobu przykładania sił skupionych w przekrojach poprzecznych prętów.

4. Oszacowanie optymalnych rozmiarów przestrzennych węzłów (czyli zakresu lokalnych dyskretyzacji 3D).
5. Przejrzystą prezentację graficzną wyników.

Poszczególne przykłady opisane są w jednolitej formie co powinno ułatwić ich śledzenie. Po krótkim sformułowaniu tematu przykładu są zamieszczone dane geometryczne, materiałowe i dane o obciążeniach. Następnie jest podana informacja o sposobie dyskretyzacji MES i dane związane z metodą rozwiązania (dla zagadnień nieliniowych). W końcu prezentowane są wyniki, w formie graficznej lub/i tabelarycznej, wraz z odpowiednim komentarzem.

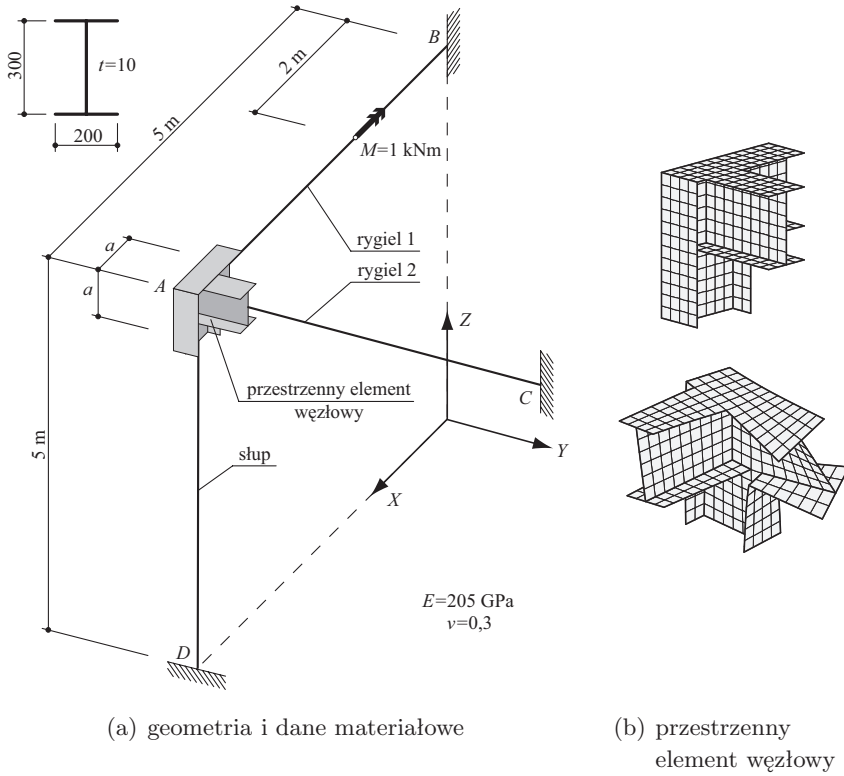
8.2. Statyka

8.2.1. Przykład 3. Rama trójprętowa

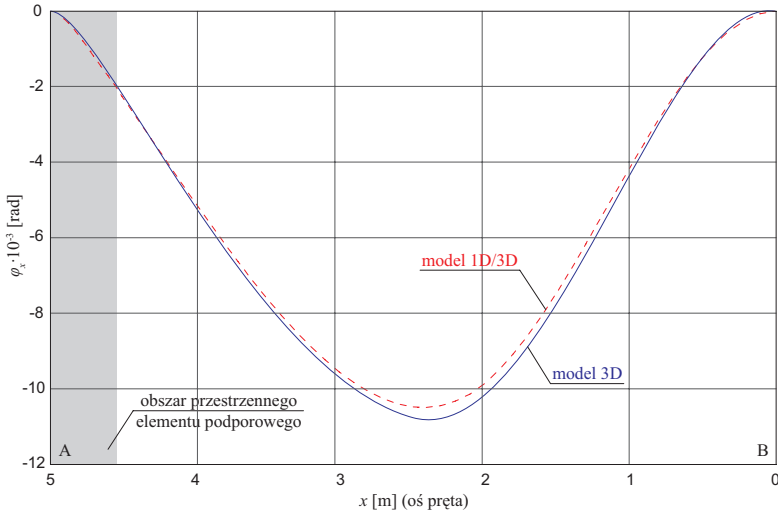
W przykładzie sprawdzono efektywność modelu 1D/3D dla dość złożonego przypadku konstrukcji węzła ramy łączącego trzy pręty. Analizowaną ramę o przekrojach dwuteowych z wyróżnionym przestrzennym elementem węzłowym pokazano na rys. 8.1(a).

Obliczenia zweryfikowano z obliczeniami wykorzystującymi model 3D. Ramę obliczono dyskretyzując ją w przypadku modelu 3D 4192 elementami powłokowymi, natomiast w przypadku modelu 1D/3D użytych zostało 370 elementów powłokowych i 128 belkowych elementów cienkościennych. Model 3D miał $N = 79206$ stopni swobody, natomiast model 1D/3D miał $N = 8121$ stopni swobody przed kondensacją statyczną i $N_s = 987$ po kondensacji statycznej. Na rys. 8.1(b) pokazany jest sposób budowy elementu przestrzennego i jego dyskretyzacja oraz deformacja. Węzeł ramy jest tak skonstruowany, żeby środki zginania poszczególnych prętów schodziły się w jednym punkcie.

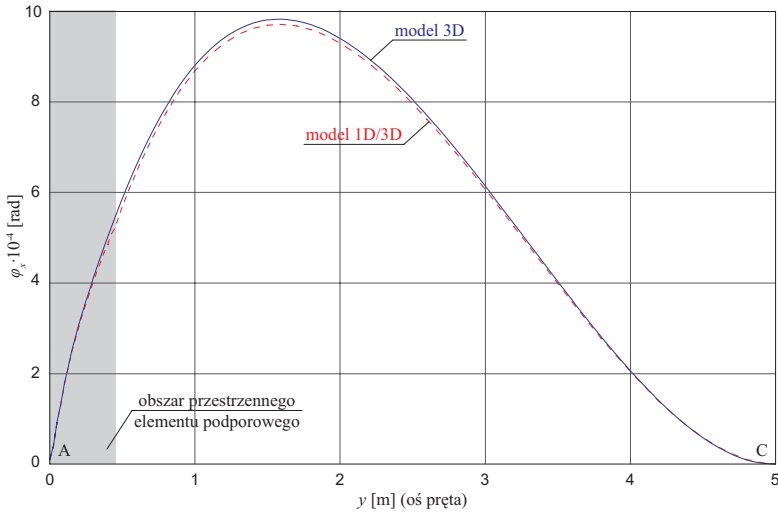
Przy budowie przestrzennego elementu węzłowego ważnym problemem jest odpowiedni dobór wymiarów węzła (parametr a na rys. 8.1(a)). Jest



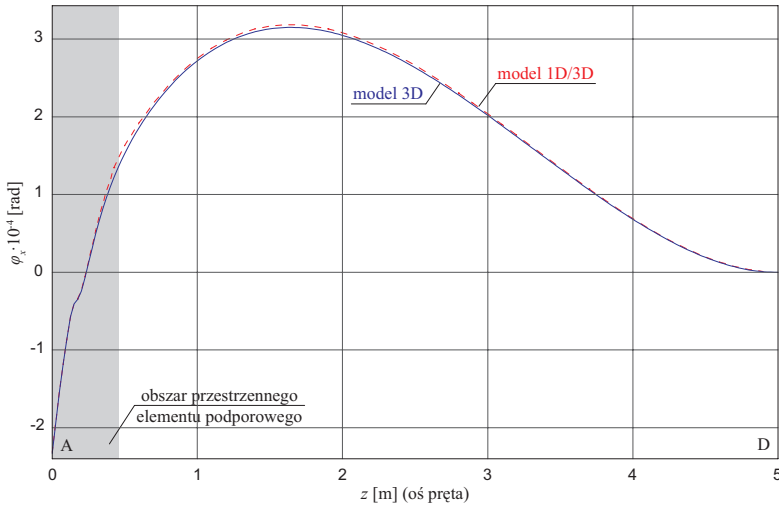
Rys. 8.1. Przykład 3. Rama trójprętowa



Rys. 8.2. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia rygła 1



Rys. 8.3. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia rygła 2



Rys. 8.4. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia słupa

to odległość pomiędzy geometrycznym środkiem węzła ramy a początkiem belkowego elementu cienkościennego. Zbyt mały wymiar a powoduje zwiększenie sztywności elementu przestrzennego. Zatem odpowiedni dobór wielkości elementu przestrzennego ma decydujące znaczenie dla jakości modelu 1D/3D. Dla oszacowania właściwego wymiaru wykonano obliczenia testowe dla różnych wielkości parametru a , wiążąc go z wysokością przekroju poprzecznego profilu dwuteowego prętów ramy, oznaczoną jako h i wynoszącą 300 mm.

Na rys. 8.2–8.4 pokazano wykresy kąta skręcania φ_x dla obu rygli i słupa przy przyjęciu modelu 3D¹ oraz modelu 1D/3D i $a = 1,5h$. Tą wielkość parametru a przyjęto za optymalną, podobnie jak zaproponowano to w [57]. Obliczenia zostały przeprowadzone dla danych: $a = 1h$; $1,25h$; $1,5h$; $1,75h$; $2h$.

¹ W przypadku modelu 3D były to wartości odpowiedniego stopnia swobody elementu skończonego w węzłach na osi ciężkości przekrojów poprzecznych prętów.

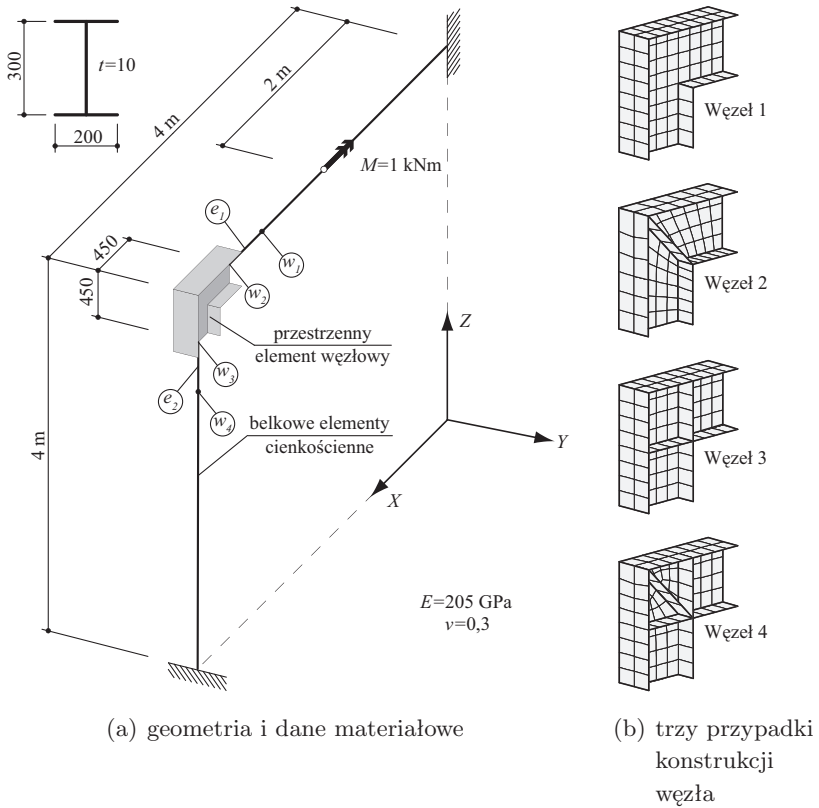
8.2.2. Przykład 4. Rama dwuprętowa

Model skończenie elementowy rama o prętach cienkościennych powinien zapewnić ciągłość transmisji spaczenia. W [4] dla opisu spaczenia przekroju poprzecznego dwuteowego lub ceowego, czyli przekrojów złożonych z trzech ścianek, wprowadzono definicję powierzchni spaczenia, utworzonej z punktów brzegowych ścianek po deformacji i kąta obrotu powierzchni spaczenia. Definicję powierzchni spaczenia wykorzystano do wykazania, że w węźle utworzonym z dwóch lub więcej prętów dwuteowych lub ceowych o dowolnych kątach pomiędzy osiami tych prętów zawsze jest kompletna transmisja spaczenia pod warunkiem, że konstrukcja węzła jest taka, że nie wystąpi zginanie poprzeczne środników. Tylko w takim bowiem przypadku przemieszczenia podłużne wspólnych punktów przekrojów poprzecznych łączących się prętów będą miały te same wartości bezwzględne.

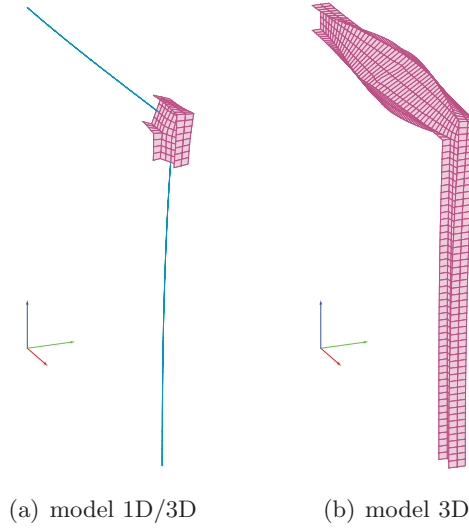
Rozważono dwa przypadki połączenia prętów w węźle, a mianowicie połączenie zachowujące ciągłość środników i połączenie zachowujące ciągłość półek (tzn. środniki lub półki prętów leżą w jednej płaszczyźnie). Wykazano, że w przypadku ciągłości środników ma miejsce niekompletna transmisja spaczenia, możliwa jednakże do zredukowania poprzez odpowiednie usztywnienie węzła za pomocą przepon.

Na rys. 8.5(a) pokazana jest analizowana rama dwuprętowa z różnie skonstruowanymi węzłami rys. 8.5(b).

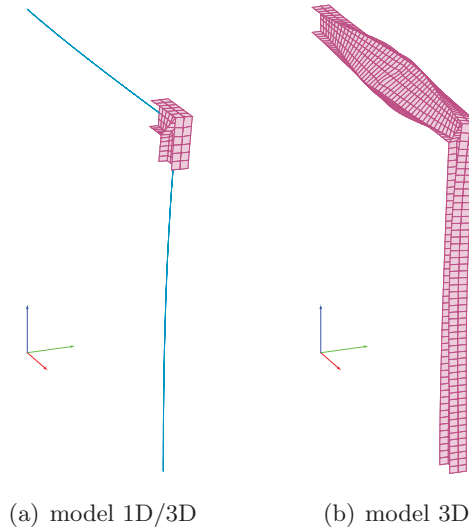
Rozważono model 1D rama zdyskretyzowanej tylko belkowymi elementami cienkościennymi (82 elementy, $N = 574$), i cztery modele 1D/3D rama: z węzłem 1 (72 elementy belkowe i 96 elementów powłokowych, $N = 2492$, $N_s = 518$), z węzłem 2 (72 elementy belkowe i 104 elementy powłokowe, $N = 2612$, $N_s = 518$), z węzłem 3 (72 elementy belkowe i 112 elementów powłokowych, $N = 2732$, $N_s = 518$) i z węzłem 4 (72 elementy belkowe i 128 elementów powłokowych, $N = 2996$, $N_s = 518$). Modele 3D miały odpowiednio: 800 elementów (węzeł 1, $N = 15702$), 916 elementów (węzeł 2, $N = 17766$), 816 elementów (węzeł 3, $N = 15942$), 936 elementów (węzeł 4, $N = 18078$). W tabeli 8.1 zestawiono obliczone wartości sił węzłowych w elementach belkowych przylegających do ścianek



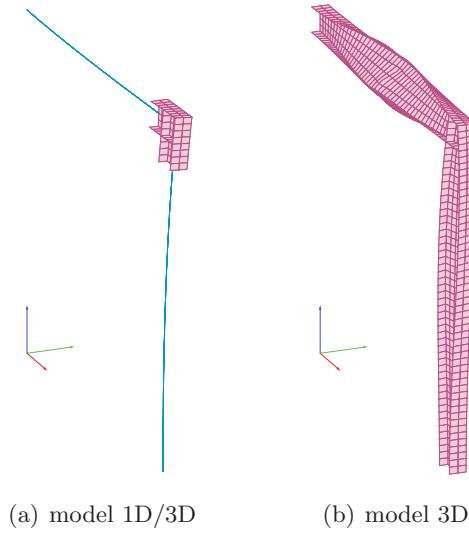
Rys. 8.5. Przykład 4. Rama dwupiętowa



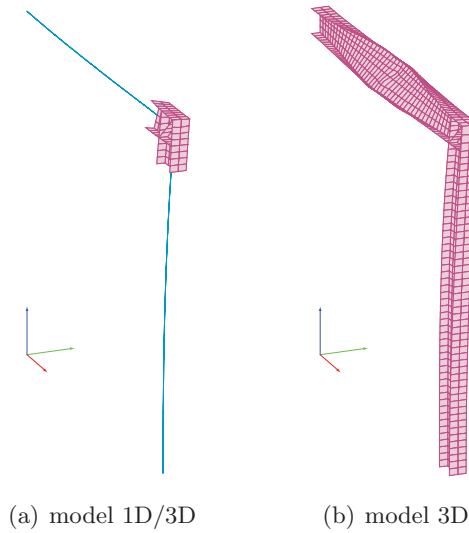
Rys. 8.6. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 1



Rys. 8.7. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 2



Rys. 8.8. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 3



Rys. 8.9. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 4

Tabela 8.1. Przykład 4. Niezerowe siły przekrojowe w węzłach

Model	Siła uogólniona	Element e_1		Element e_2	
		Węzeł w_1	Węzeł w_2	Węzeł w_3	Węzeł w_4
1D	F_y [N]	-63,5719	63,5719	-63,5719	63,5719
	M_x [Nm]	-413,4494	413,4494	74,3992	-74,3992
	M_z [Nm]	-106,1851	103,0065	-384,8420	381,6634
	B [Nm ²]	47,5637	-64,3252	164,9793	-159,659
Węzeł 1					
1D/3D	F_y [N]	-74,1764	74,1764	-74,1764	74,1764
	M_x [Nm]	-340,3747	340,3747	-8,0061	8,0061
	M_z [Nm]	-29,3733	25,3733	-306,995	303,2862
	B [Nm ²]	-87,2625	75,2625	6,0179	-5,9748
Węzeł 2					
1D/3D	F_y [N]	-75,4224	-94,4123	-75,4224	75,4224
	M_x [Nm]	-404,3047	-423,3997	46,3723	-46,3723
	M_z [Nm]	-84,0899	32,6612	-370,3505	366,5794
	B [Nm ²]	30,3219	66,7098	107,183	-103,7579
Węzeł 3					
1D/3D	F_y [N]	75,4224	94,4123	-94,4123	94,4123
	M_x [Nm]	404,3047	423,3997	-79,8671	79,8671
	M_z [Nm]	80,3188	-37,3818	-380,9137	376,1931
	B [Nm ²]	-46,4935	-84,1235	-167,8494	162,3837
Węzeł 4					
1D/3D	F_y [N]	-94,4209	94,4209	-94,4209	94,4209
	M_x [Nm]	-480,6491	480,6491	-22,676	22,676
	M_z [Nm]	-24,5343	19,8132	-438,159	433,438
	B [Nm ²]	187,9029	-209,3618	-42,738	41,3134

węzła przestrzennego. Na szczególną uwagę zasługują wartości bimomentów, oznaczonych przez B (w węzłach 2 i 3, bezpośrednio przy ściankach elementu przestrzennego) jako ilustracja transmisji spaczenia.

Wyniki obliczeń potwierdzają oczekiwane zbliżanie się do rozwiązania dla modelu 1D rozwiązań dla modeli 1D/3D wraz ze zwiększaniem się sztywności węzła. Różnica w znakach bimomentu jest efektem występujących postaci deformacji węzła, i potwierdzona jest również w [57].

Na rys. 8.6(a)–8.9(b) pokazane są odkształcone modele mieszane i powłokowe. Odkształcenie węzła jest praktycznie takie same.

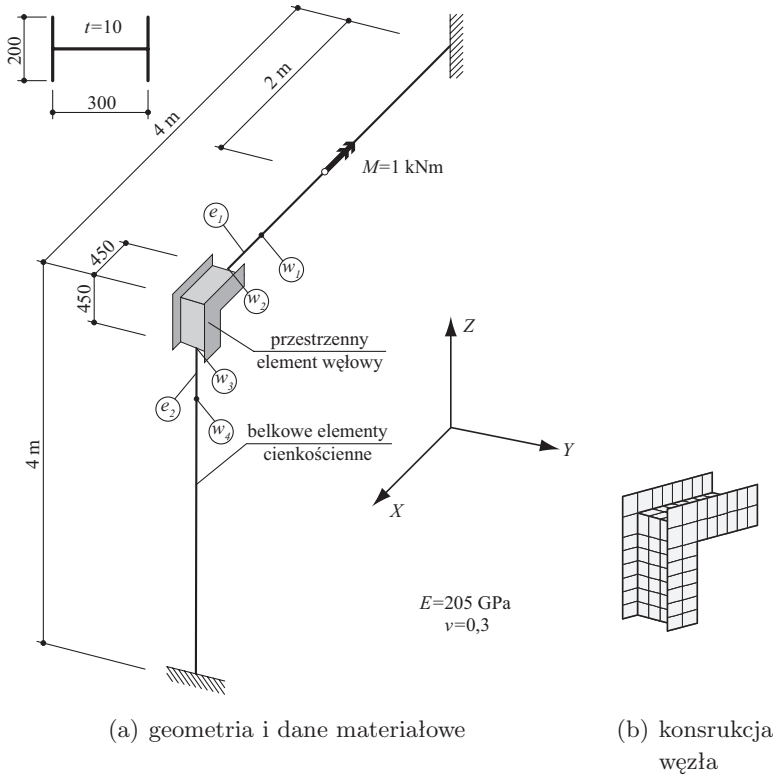
Jeśli zostanie zapewniona równość spaczenia wszystkich przekrojów i będą one miały jednakowe charakterystyki geometryczne, wówczas taką konstrukcję węzła można dyskretyzować za pomocą tylko belkowych elementów cienkościennych (model 1D).

8.2.3. Przykład 5. Rama dwuprętowa

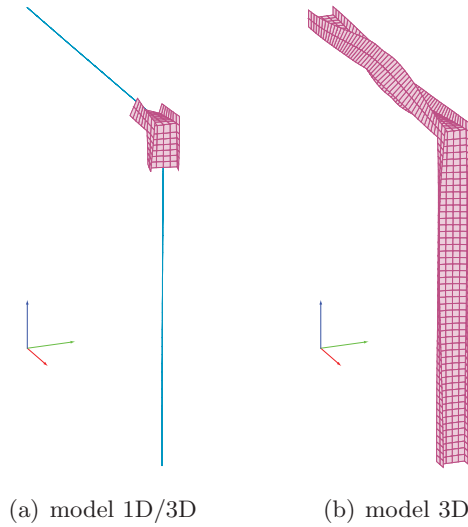
W kolejnym przykładzie wykonano obliczenia statyczne dla ramy dwuprętowej pokazanej na rys. 8.10(a) z obróconym o 90^0 profilem dwuteowym dla zapewnienia ciągłości półek rygła i słupa, co zapewnia opisaną wyżej równość spaczeń. Na rys. 8.10(b) pokazano dyskretyzację skończenie elementową przestrzennego elementu węzłowego. W przypadku modelu 1D rama została zdyskretyzowana 82 belkowymi elementami cienkościennymi ($N = 581$), w modelu 1D/3D wykorzystano 72 belkowe elementy cienkościenne i 112 powłokowe element skończone ($N = 2804$, $N_s = 518$). Model 3D był dyskretyzowany 800 elementami powłokowymi i miał $N = 15702$ stopni swobody.

W tabeli 8.2 zestawiono wartości sił przywęzłowych w elementach przylegających do ścianek przestrzennego elementu węzłowego. Jak należało się spodziewać, wyniki obliczeń wykorzystujących model 1D są zgodne z obliczeniami wykorzystującymi dokładniejszy model 1D/3D.

Na rys. 8.11 pokazana jest deformacja ramy obliczona modelami mieszanym i powłokowym.



Rys. 8.10. Przykład 5. Rama dwuprętowa

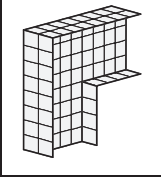
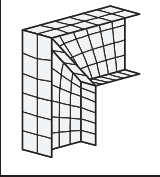
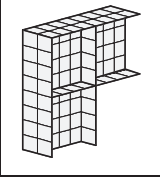
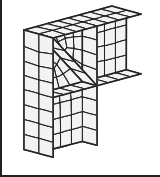
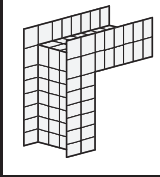


Rys. 8.11. Przykład 5. Deformacja ramy dwuprętowej

Tabela 8.2. Przykład 5. Niezerowe siły przekrojowe w węzłach

Model	Siła uogólniona	Element e_1		Element e_2	
		Węzeł w_1	Węzeł w_2	Węzeł w_3	Węzeł w_4
1D	F_z [N]	-63,7415	63,7415	-63,7415	63,7415
	M_x [Nm]	-419,2265	419,2265	79,2718	-79,2718
	M_y [Nm]	111,1426	-107,9555	390,5428	-387,3558
	B [Nm ²]	52,8816	-69,8677	170,607	-165,0783
1D/3D	F_z [N]	-64,4349	64,4349	-64,4349	64,4349
	M_x [Nm]	-424,3523	424,3523	81,1674	-81,1674
	M_y [Nm]	116,6066	-113,3848	392,1348	-388,9131
	B [Nm ²]	46,4325	-63,7332	168,9599	-163,4271

Tabela 8.3. Współczynnik przekazu bimomentu ζ dla różnie skonstruowanych węzłów

				
91,78 %	20,25 %	17,77 %	15,67 %	7,6 %

W [57] zdefiniowano współczynnik przekazu bimomentu ζ określony zależnością

$$\zeta = \frac{K_{0_{14,7}}}{K_{0_{7,7}}} \cdot 100\% = \frac{K_{0_{7,14}}}{K_{0_{14,14}}} \cdot 100\%. \quad (8.1)$$

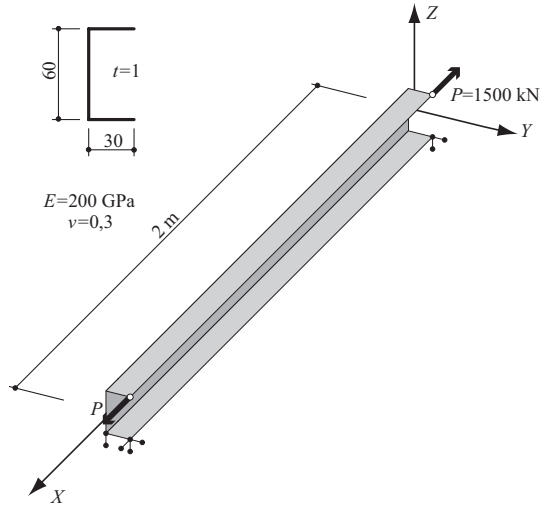
gdzie $K_{0_{7,7}}$, $K_{0_{7,14}}$, $K_{0_{14,7}}$ i $K_{0_{14,14}}$ są elementami macierzy sztywności liniowej \mathbf{K}_0 przestrzennego elementu węzłowego.

Wartość takiego ilorazu może być wskaźnikiem transmisji spaczenia, wyraża on względny udział w sztywności węzła pochodnej kąta skręcenia θ w węźle w_3 (słup) od jednostkowego wymuszenia tego kąta w węźle w_2 (rygiel). W przypadku, kiedy w węźle ramy dwuteowej zachowana jest ciągłość półek (przykład 5), wskaźnik ζ jest wielkością małą w porównaniu z przypadkiem ułożenia dwuteowników z ciągłością środników (przykład 4). Prawdopodobnie tę potwierdzają obliczenia ramy z ciągłością środników i ze wzrastającym usztywnieniem konstrukcyjnym węzła. Wzrostowi sztywności węzła odpowiadało zmniejszanie się wartości ζ [57].

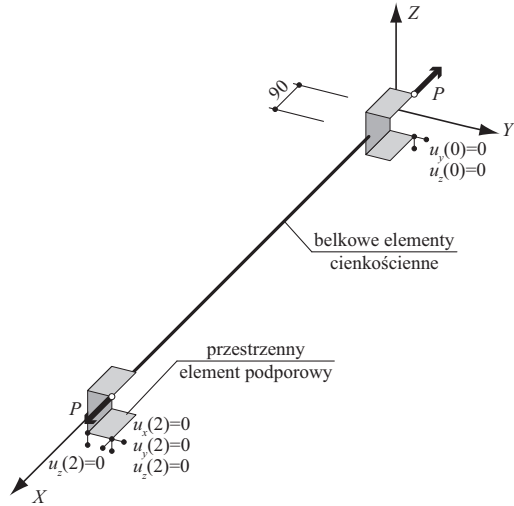
W tab. 8.3 zebrano wartości współczynnika ζ dla różnych konstrukcji węzła.

8.2.4. Przykład 6. Wspornik o przekroju ceowym

Możliwości modelowania rzeczywistych warunków brzegowych w prętach cienkościennych według zaproponowanego w pracy modelu obliczeniowego 1D/3D sprawdzono na przykładzie belki o przekroju ceowym. Na rys. 8.12(a) pokazano rozważaną belkę wraz z obciążeniem i warunkami



(a) geometria i dane materiałowe



(b) model z przestrzennymi elementami podporowymi

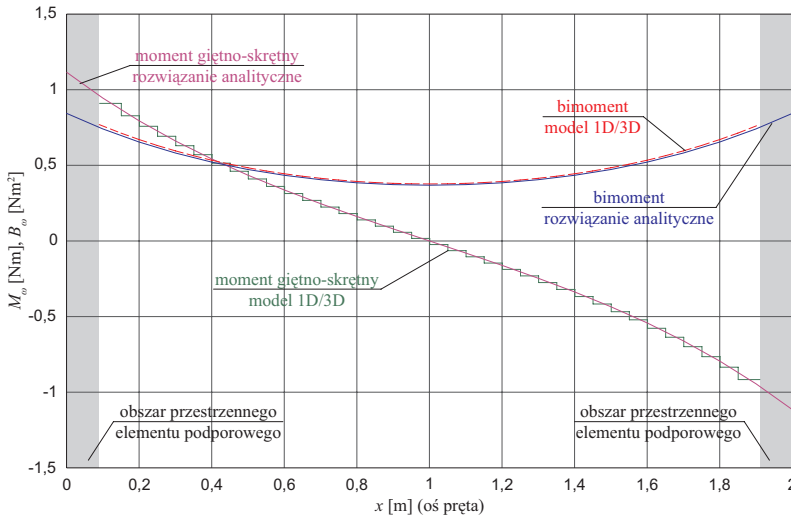
Rys. 8.12. Przykład 6. Wspornik o przekroju ceowym

brzegowymi. Przykład ten wybrano ponieważ posiada on rozwiązanie analityczne [63].

Niezerowe funkcje sił przekrojowych mają postać:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= 1500 \text{ [N]}, & M_y(x) &= 45 \text{ [Nm]}, & M_z(x) &= -33,75 \text{ [Nm]}, \\ B_\omega(x) &= -0,759 \cdot \sinh(1,47x) + 0,8437 \cdot \cosh(1,47x) \text{ [Nm}^2\text{]}, & (8.2) \\ M_\omega(x) &= 1,1157 \cdot \sinh(1,47x) - 11,2402 \cdot \cosh(1,47x) \text{ [Nm]}. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $B_\omega(x)$ jest bimomentem, $M_\omega(x)$ jest momentem giętno-skrętnym od naprężeń stycznych równomiernie rozłożonych.



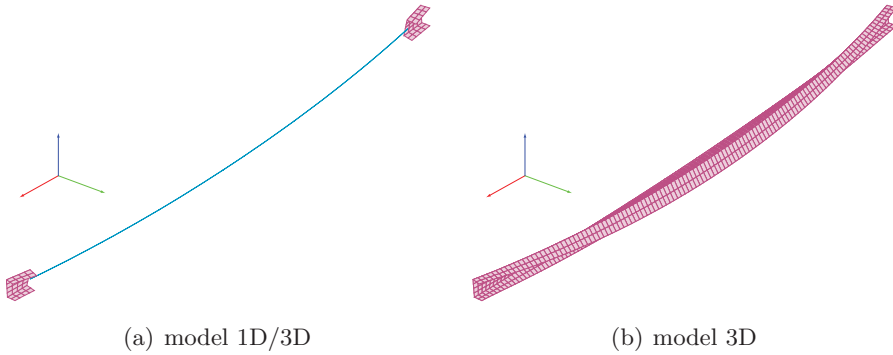
Rys. 8.13. Przykład 6. Wykres bimomentu i momentu giętno-skrętnego

Rozwiązanie skończenie elementowe otrzymano przyjmując dwa przestrzenne elementy podporowe o długości $a = 0,09 \text{ m}$. Przestrzenne elementy podporowe zdyskretyzowano 32 elementami powłokowymi, a część 1D za pomocą 36 belkowych elementów cienkościennych ($N = 985$ i $N_s = 259$), co pokazano na rys. 8.12(b). Na rys. 8.13 zestawiono wykresy bimomentu

i momentu giętno-skrętnego dla rozwiązania analitycznego i dla modelu 1D/3D. Moment giętno-skrętny został obliczony z zależności

$$M_{\omega}(x) = E_r \cdot J_{\omega} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_x(x)}{\partial x^3}, \quad (8.3)$$

gdzie E_r jest zastępczym modułem Younga, J_{ω} jest wycinkowym momentem bezwładności, a $\varphi_x(x)$ jest kątem skręcenia. W elementach belkowych cienkościennych została zastosowana interpolacja Hermite'a, stąd stała wartość momentu giętno-skrętnego w elemencie (nieciągłości na wykresie).

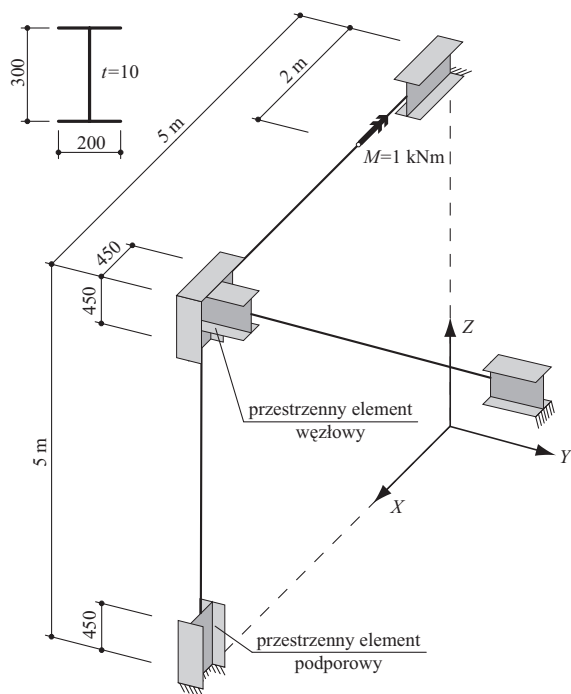


Rys. 8.14. Przykład 6. Deformacja wspornika o przekroju ceowym

Rozwiązanie tego przykładu, było ponadto porównywane z rozwiązaniem 3D. Rozwiązanie 3D otrzymano używając modelu o 944 elementach i $N = 18510$ stopniach swobody. Na rys. 8.14 pokazano deformację obu modeli.

8.2.5. Przykład 7. Rama trójprętowa

Kolejny przykład dotyczy ramy trójprętowej z przykładu 3, rys. 8.1(a), modelowanej za pomocą belkowych elementów cienkościennych oraz przestrzennego elementu węzłowego, i dodatkowo z przestrzennymi elementami podporowymi, rys. 8.15.



Rys. 8.15. Przykład 7. Rama trójprętowa, model z dodatkowymi przestrzennymi elementami podporowymi

Przyjęto przestrzenny element węzłowy i trzy przestrzenne elementy podporowe o długości $a = 0,45$ m. Przestrzenny element węzłowy zdyskretyzowano 370 elementami powłokowymi a przestrzenne elementy podporowe zdyskretyzowano 126 elementami powłokowymi. Część belkowa była zdyskretyzowana 126 elementami cienkościennymi. Model miał $N = 15687$ i $N_s = 903$ stopni swobody. Przypomnijmy, że pełen model 3D z przykładu miał $N = 79206$. W przypadku modelu bez przestrzennych elementów podporowych odebrano wszystkie stopnie swobody na końcach słupów i rygla, w drugim modelu odebrano wszystkie stopnie swobody słupa i stopnie swobody dolnych półek rygli.

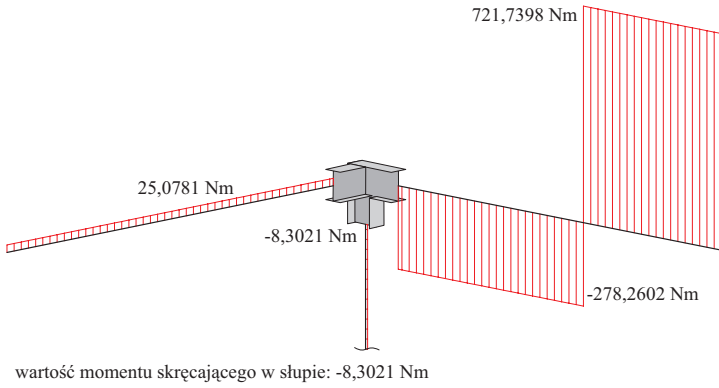
Na rys. 8.16 i 8.17 zestawiono wykresy momentów skręcających i bimomentów w poszczególnych modelach, gdzie widać znaczne różnice w ich wartościach zależnie od sposobu modelowania zamocowania.

8.3. Wyboczenie

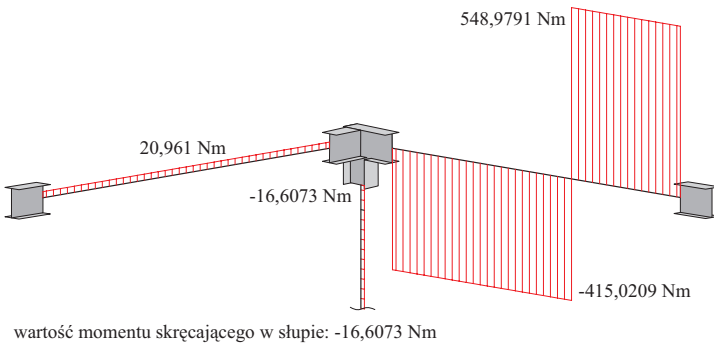
8.3.1. Przykład 8. Rama dwuprętowa

W pracy [40] zostały wyprowadzone macierz liniowa i macierz geometryczna dla dwuwęzłowego belkowego elementu cienkościennego z siedmioma stopniami swobody w węźle, do analizy wyboczenia. Zdefiniowane tam pole przemieszczeń wykorzystano w niniejszej pracy. Element został sformułowany w czterech wersjach, w których węzły elementu były sztywne (element R-R, ang. *rigid-rigid*), jeden z węzłów elementu był modelowany jak przegub (element R-H, ang. *rigid-hinge* lub H-R, ang. *hinge-rigid*), lub oba węzły elementu były modelowane jako przegubowe (element H-H, ang. *hinge-hinge*). Sformułowania te w połączeniu z odbieraniem stopnia swobody związanego ze spaceniem przekroju w węźle ramy miały umożliwić modelowanie różnie skonstruowanych (o różnej sztywności) węzłów ram.

W przykładzie zaczerpniętym z tej pracy, obliczono obciążenie krytyczne dla ramy dwuprętowej o utwierdzeniu na jednej podporze i o dwóch różnie skonstruowanych węzłach jak, pokazano na rys. 8.18, gdzie podano również potrzebne dane geometryczne i materiałowe.

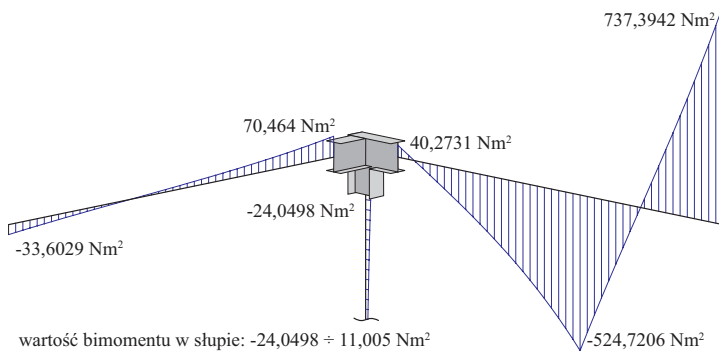


(a) model z przestrzennym elementem węzłowym

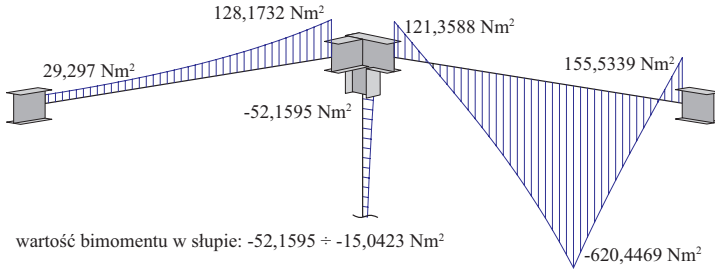


(b) model z dodatkowymi przestrzennymi elementami podporowymi

Rys. 8.16. Przykład 7. Wykresy momentów skręcających

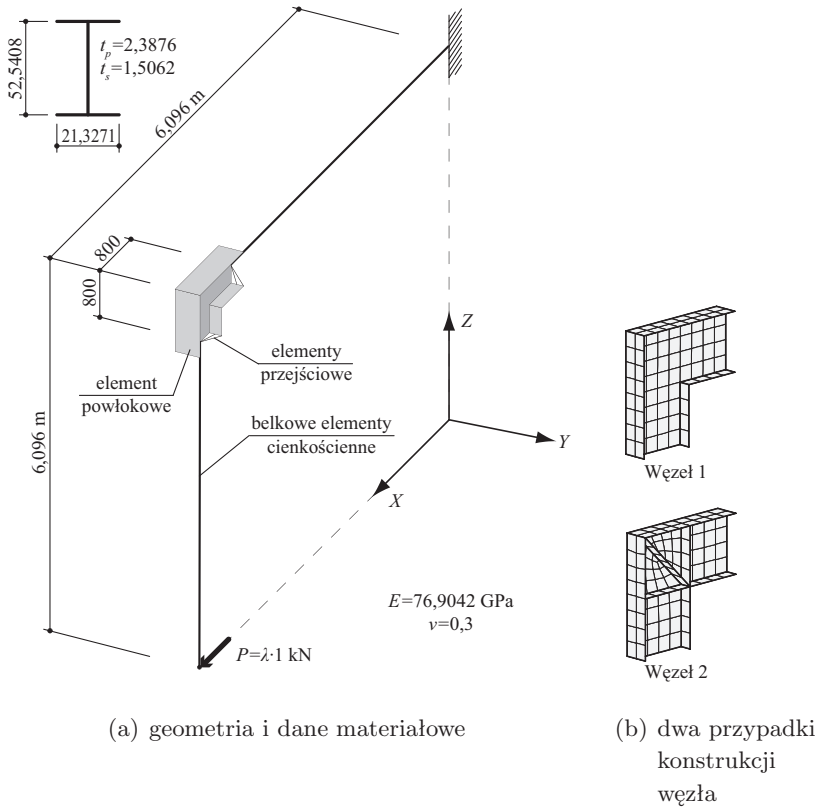


(a) model z przestrzennym elementem węzłowym



(b) model z dodatkowymi przestrzennymi elementami podporowymi

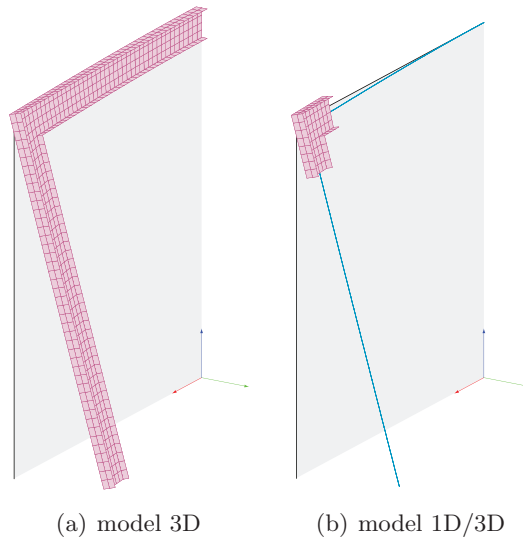
Rys. 8.17. Przykład 7. Wykresy bimomentów



Rys. 8.18. Przykład 8. Rama dwuprętowa

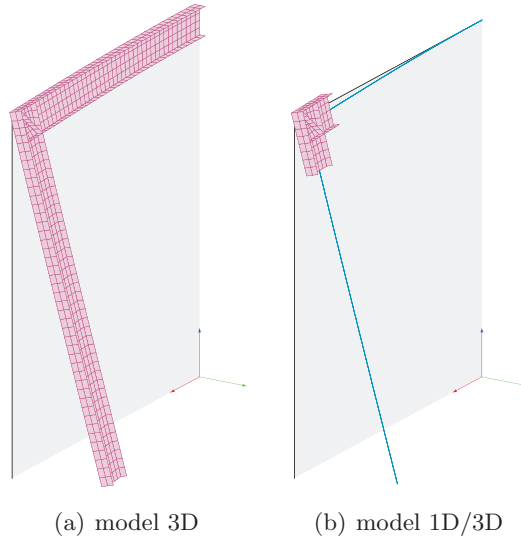
Rozważono model 1D ramy zdyskretyzowanej tylko belkowymi elementami cienkościennymi (122 elementy, $N = 861$), i po dwa modele ramy 1D/3D oraz 3D, odpowiednio: z węzłem 1 (1D/3D: 96 elementy belkowe i 106 elementów powłokowych, $N = 2730$; 3D: 240 elementów powłokowych, $N = 4878$), z węzłem 2 (1D/3D: 138 elementy belkowe i 106 elementów powłokowych, $N = 3414$; 3D: 254 elementy powłokowe, $N = 5058$). W przypadku modeli 1D/3D dodatkowo użyto po 17 elementów przejściowych dla każdej ścianki.

Na rys. 8.19–8.20 przedstawiono pierwszą formę utraty stateczności (wyboczenie z płaszczyzny ramy) dla modeli 1D/3D i 3D oraz osie środków ciężkości prętów ramy i płaszczyznę ramy przed wyboczeniem.



Rys. 8.19. Przykład 8. Pierwsza forma utraty stateczności, węzeł 1

W tab. 8.4 zestawiono wartości krytyczne dwóch najmniejszych mnożników obciążenia. Model 3D w cytowanej pracy został obliczony z wykorzystaniem elementu S8R5 i systemu ABAQUS. Natomiast analizę 1D wykonano tam z użyciem elementów typu R-H (metoda 1), elementów typu R-R (metoda 2) i w końcu z użyciem elementów typu R-R i dodatkowym



Rys. 8.20. Przykład 8. Pierwsza forma utraty stateczności, węzeł 2

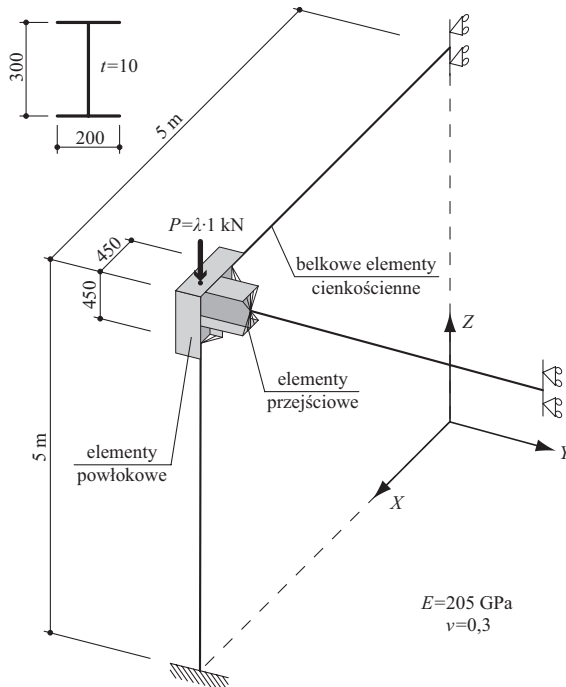
Tabela 8.4. Przykład 8. Dwie najmniejsze wartości krytyczne mnożnika obciążenia λ

Model	λ_1	λ_2
1D	-59,7851	65,5796
1D , metoda 1 [40]	-52,6002	59,0443
1D , metoda 2 [40]	-59,6577	65,4115
1D , metoda 3 [40]	-69,1285	80,6036
Węzeł 1		
1D/3D	-54,6054	60,383
3D	-54,0403	60,2474
3D [40]	-50,6074	58,4318
Węzeł 2		
1D/3D	-66,141	78,133
3D	-66,8592	78,7279
3D [40]	-66,3496	78,1997

wyzerowaniem stopnia swobody związanego ze spaceniem w węźle ramy (metoda 3). Widoczna jest duża zgodność wartości krytycznych mnożnika obciążenia w przypadku modeli 1D/3D w porównaniu z modelami 3D. Różnica pomiędzy wartością krytyczną obciążenia w modelach 3D z węzłem 1: z [40] i otrzymanym przez autora może wynikać z zastosowania różnych elementów powłokowych.

8.3.2. Przykład 9. Rama trójprętowa

W przykładzie obliczono obciążenie krytyczne dla przestrzennej ramy trójprętowej, podobnej jak w przykładach 3 i 7 lecz z różnymi warunkami podparcia, w której węzeł modelowano elementami powłokowymi.

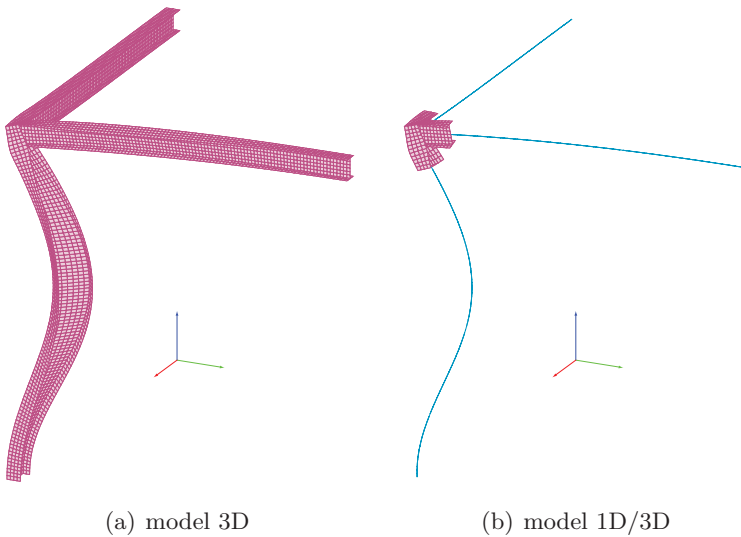


Rys. 8.21. Przykład 9. Rama trójprętowa

Tabela 8.5. Przykład 9. Trzy najmniejsze wartości krytyczne mnożnika obciążenia λ

Model	λ_1	λ_2	λ_3
1D	353,4203	513,0119	756,063
1D/3D	275,6376	469,7605	679,745
3D	275,1766	468,1359	658,6285

Na rys. 8.21 podano potrzebne dane geometryczne i materiałowe. W celu otrzymania dokładniejszej formy wyboczenia w modelu 1D/3D część powłokową zdyskretyzowano 317 elementami skończonymi, a części belkowe 3×46 elementami skończonymi ($N = 8121$). Każdą z części belkowych związano z częścią powłokową za pomocą 29 elementów przejściowych.



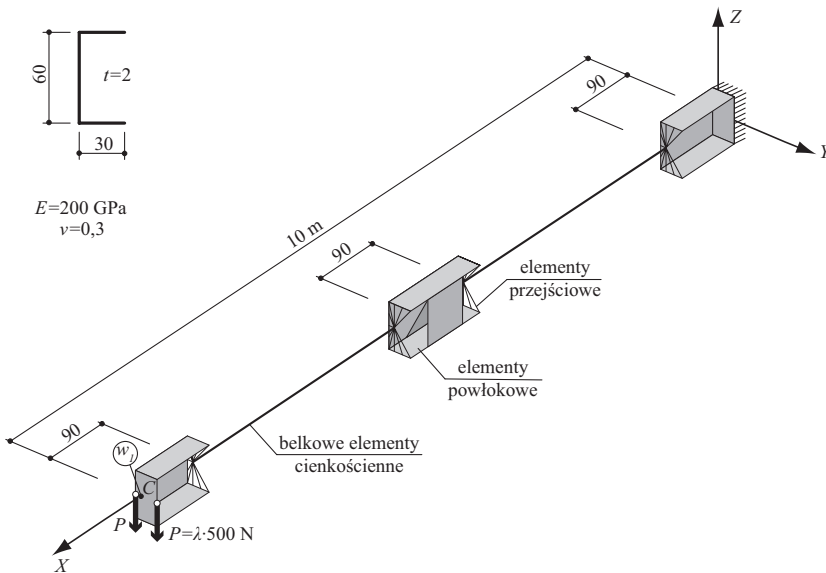
Rys. 8.22. Przykład 9. Pierwsza forma utraty stateczności

Wyniki obliczeń obciążenia krytycznego obliczonego dla modelu modelu mieszanego 1D/3D oraz przy pełnej dyskretyzacji 4192 elementami powłokowymi ($N = 79206$) i 156 elementami belkowymi cienkościennymi

($N = 1078$) zestawiono w tab. 8.5. Na rys. 8.22 pokazano pierwszą formę utraty stateczności. Zgodnie z oczekiwaniem wyniki obliczeń przy dyskretyzacji tylko elementami belkowymi są obarczone dużym błędem. Natomiast widoczna jest duża zgodność wartości obciążeń krytycznych obliczonych za pomocą modelu 1D/3D z obliczeniami przy pełnej dyskretyzacji elementami powłokowymi. W obu przypadkach deformacje węzła są praktycznie takie same.

8.4. Stateczność

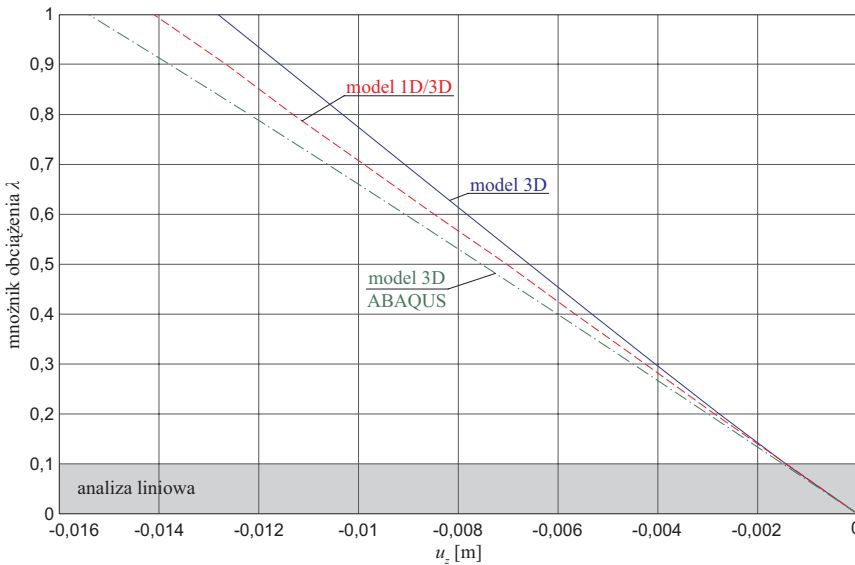
8.4.1. Przykład 10. Wspornik o przekroju ceowym



Rys. 8.23. Przykład 10. Wspornik o przekroju ceowym

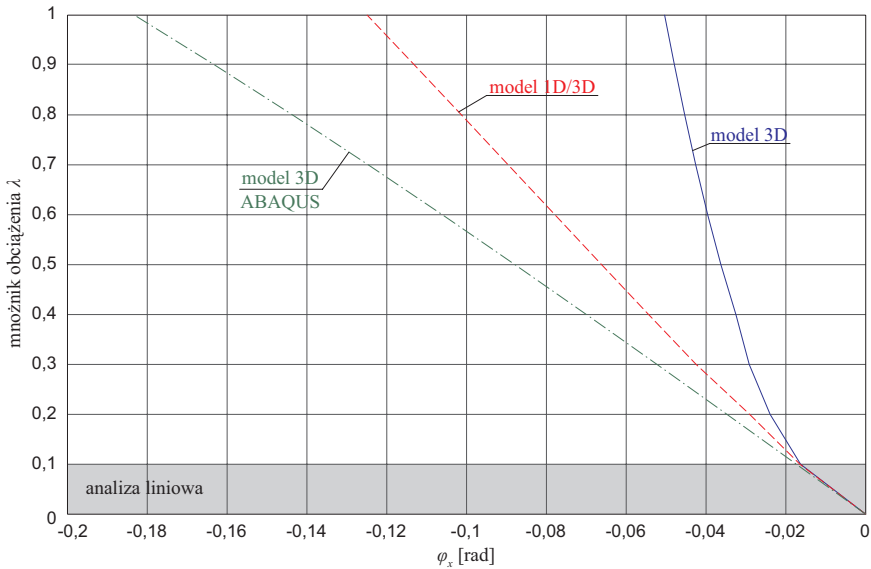
Tematem tego przykładu jest analiza nieliniowa geometrycznie wspornik o przekroju ceowym, wzmocnionego w środkowej części dwoma przewiązkami. Na rys. 8.23 podano potrzebne dane geometryczne i materiałowe.

we. Ze względu na zastosowanie wzmocnienia i sposób obciążenia, model zawierał trzy części przestrzenne (3D) modelowane elementami powłokowymi po 126, elementów dla części podporowej i części z obciążeniem, oraz 112 elementów dla części środkowej. Część 1D zawierała 14 cienkościennych belkowych elementów skończonych. Ponadto, części przestrzenne i jednowymiarowe były łączone za pomocą 21 elementów skończonych przejściowych (dla każdej ze ścianek). Model 3D dyskretyzowany był za pomocą 882 elementów powłokowych. Model 1D/3D miał $N = 7096$ stopni swobody, natomiast model 3D miał $N = 17046$ stopni swobody. Wspornik był obciążony dwiema siłami skupionymi P . Obliczenia wykonano sterując parametrem obciążenia.



Rys. 8.24. Przykład 10. Ugięcie u_z w węźle w_1

Na rys. 8.24 pokazano rzut ścieżki stanu równowagi na płaszczyznę (u_z, λ) w węźle w_1 . Na rys. 8.25 znajduje się rzut ścieżki stanu równowagi na płaszczyznę (φ_x, λ) w węźle w_1 . W obu przypadkach, krzywe ścieżek stanów równowagi obliczone dla modeli 1D/3D i 3D różnią się. Dlatego

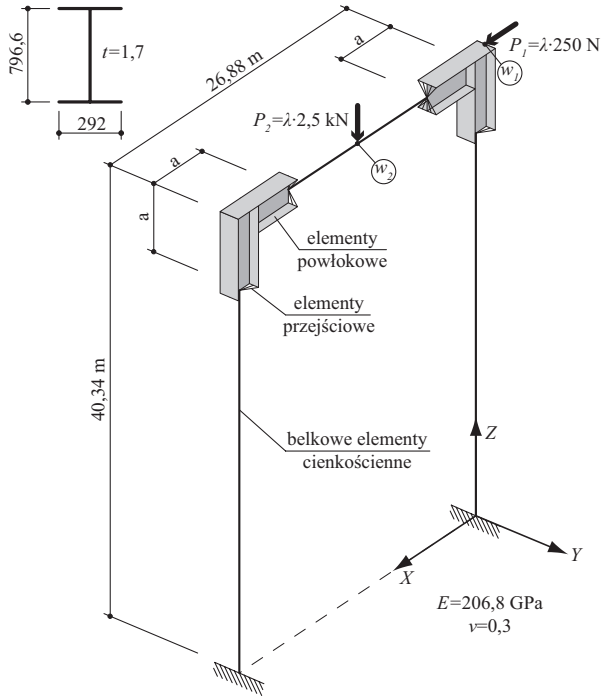
Rys. 8.25. Przykład 10. Obrót φ_x w węźle w_1

dla oceny jakości rozwiązań wykonano dodatkowe obliczenia z użyciem elementów S8R6 w systemie ABAQUS, których wyniki zostały naniesione na wykresy. Jak widać, rozwiązanie 1D/3D jest bliższe dokładniejszemu rozwiązaniu systemem ABAQUS.

Różnice w otrzymanych krzywych stanów równowagi mogą wynikać z różnego stopnia nieliniowości zastosowanych elementów. Zastosowane w pracy płaskie elementy powłokowe, zgodnie z informacją autorów pracy [6], mogą być stosowane do analizy zadań o małym i średnim stopniu nieliniowości. Belkowe cienkościennie elementy skończone, natomiast, charakteryzują się możliwością rozwiązywania zagadnień silnie nieliniowych. Ich zastosowanie w modelu obliczeniowym spowodowała prawdopodobnie poprawę wyników.

Problem ten będzie w przyszłości dalej analizowany przez autora, przytoczymy jednakże jeszcze jeden przykład potwierdzający przypuszczenia autora.

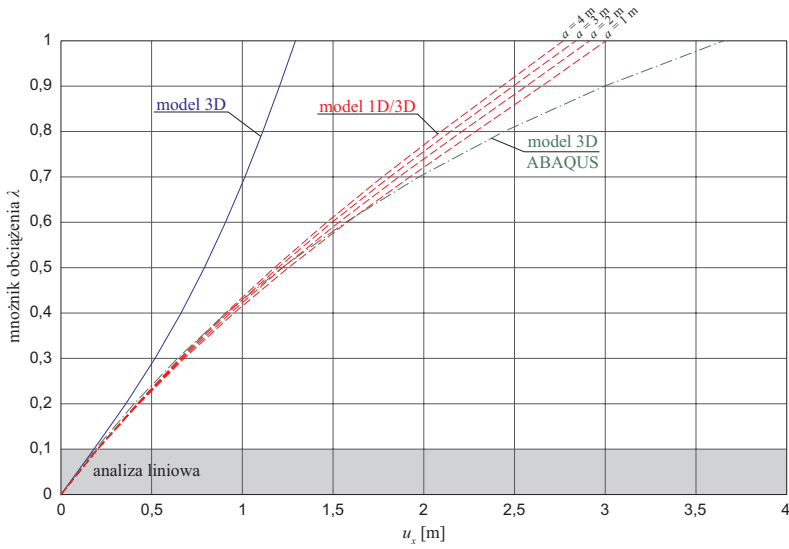
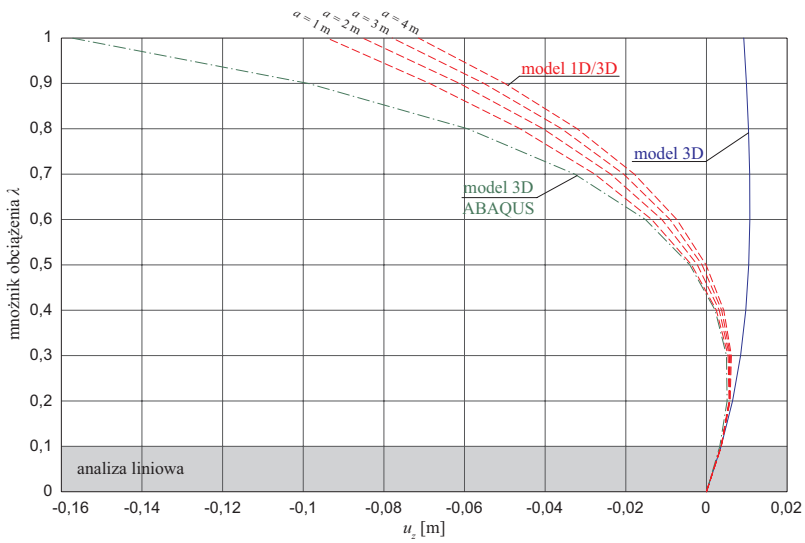
8.4.2. Przykład 11. Rama portalowa

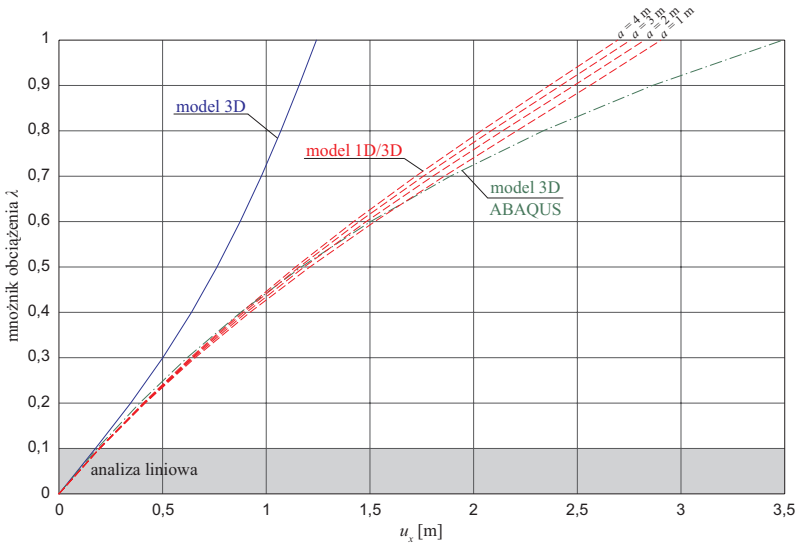
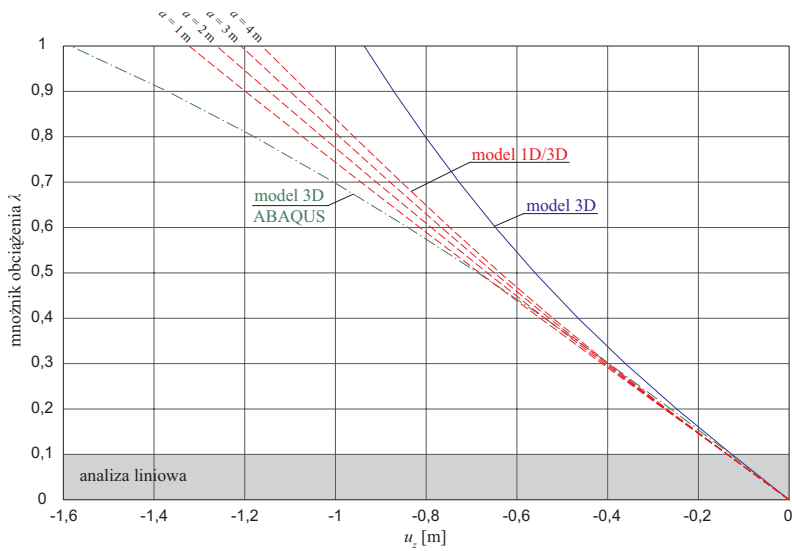


Rys. 8.26. Przykład 11. Rama portalowa

W kolejnym przykładzie poddano analizie nieliniowej geometrycznie ramę portalową o przekroju dwuteowym i obciążeniu pokazanym na rys. 8.26. W tym przykładzie dodatkowo zmieniano parametr a , czyli wielkość części powłokowej w celu sprawdzenia, czy zwiększenie części dyskretyzowanej elementami belkowymi cienkościennymi (o większym stopniu nieliniowości) będzie pływało na poprawę otrzymanych wyników. Jego wartość była zmieniana w granicach $a = 1, 25h \div 5h$.

Model 3D był dyskretyzowany 1304 elementami powłokowymi ($N = 26094$). W przypadku modelu 1D/3D zostało użytych 87 elementów belkowych i od 136 do 376 elementów powłokowych w zależności od wielkości

Rys. 8.27. Przykład 11. Przemieszczenie u_x w węźle w_1 Rys. 8.28. Przykład 11. Przemieszczenie u_z w węźle w_1

Rys. 8.29. Przykład 11. Przemieszczenie u_x w węźle w_2 Rys. 8.30. Przykład 11. Przemieszczenie u_z w węźle w_2

części przestrzennej ($N = 6066 \div 15426$). Części belkowe i powłokowe były łączone za pomocą 17 elementów przejściowych dla każdej ze ścianek.

Na rys. 8.27–8.30 zebrano rzuty ścieżki stanu równowagi na płaszczyznę (u_x, λ) i (u_z, λ) w węzłach w_1 i w_2 .

Z wykresów widać, że zwiększenie części ramy modelowanej elementami belkowymi daje poprawę otrzymanych wyników. Jak to wcześniej stwierdzono, można przypuszczać, że zastosowanie elementów powłokowych o większym stopniu nieliniowości spowoduje dalszą poprawę wyników. Należy jednakże pamiętać, że części modelowana elementami powłokowymi nie powinna mieć mniejszych rozmiarów niż ustalone w przykładzie nr 3.

Oczywiście w przypadku analizy liniowej wszystkie zaprezentowane modele 3D i 1D/3D dają takie same wyniki.

9. Zakończenie

9.1. Podsumowanie, oryginalne elementy pracy

W pracy wykorzystano nieliniową mechanikę ciała stałego do sformułowania modelu matematycznego opisującego problem analizy statycznej, wyboczenia i stateczności (obliczenia podstawowych ścieżek stanów równowagi) ram przestrzennych o prętach cienkościennych otwartych. Model numeryczny dla metody elementów skończonych opracowano dla dwóch modeli dyskretyzacji MES. W każdym przypadku wyróżniono w konstrukcji obszary modelowane belkowymi cienkościennymi elementami skończonymi (1D) i obszary modelowane płaskimi powłokowymi elementami skończonymi (3D). W modelu pierwszym obszary 1D i 3D łączono wykorzystując elementy skończone przejściowe.

W oryginalnym modelu drugim, wprowadzono przestrzenny element węzłowy, w którym w rezultacie kondensacji statycznej aktywnymi stopniami swobody są tylko translacyjne stopnie swobody na ściankach wspólnych dla obszarów 1D i 3D konstrukcji. Taki model dyskretyzacji MES jest szczególnie efektywny w analizie ram o różnych, złożonych przekrojach cienkościennych.

Dla wykonania przykładów opracowane zostały własne programy komputerowe AmFEM, SecPropGRAPH i SecPropFEM w systemie MATLAB. Przy opracowaniu procedur do obliczania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych dla belki cienkościennej, które obliczano dokładnie, skorzystano z obliczeń symbolicznych oferowanych przez system

MATLAB i języka programowania PERL, wspierającego operacje z wykorzystaniem wyrażeń regularnych.

Przykłady obliczeń starano się dobrać tak, aby uwzględnić w nich ważniejsze cechy modeli obliczeniowych i ocenić efektywność i jakość konkretnych rozwiązań. Zwrócono uwagę na pewną niespójność użytych modeli matematycznych opisujących pręt cienkościenny i powłokę co, jak wcześniej wspomniano, będzie przedmiotem dalszych badań autora.

Zdaniem autora, zaproponowane w pracy metody analizy ram przestrzennych są metodami efektywnymi, a opracowane programy komputerowe są dobrym narzędziem przeprowadzenia różnych obliczeń złożonych konstrukcji.

Autor uważa, że do elementów oryginalnych pracy można zaliczyć:

- opracowanie spójnego, mieszanego (1D/3D) modelu matematycznego dla analizy statycznej i stateczności ram przestrzennych o prętach cienkościennych otwartych,
- implementacja przestrzennego elementu węzłowego i podporowego dla analizy liniowej i jego uogólnienie na przypadki analizy nieliniowej geometrycznie,
- oryginalność postępowania w sformułowaniu równań dla elementu przejściowego w ramach przyjętej teorii i jego implementacji w modelu MES,
- oryginalne i efektywne użycie nowoczesnych narzędzi programistycznych (przede wszystkim wyrażeń regularnych i języka programowania PERL) i obliczeniowych dla wyprowadzenia macierzy stycznej i wektora sił wewnętrznych cienkościennego elementu skończonego.

I, w końcu, elementami oryginalnymi pracy są własne programy komputerowe oraz niektóre z opisanych przykładów.

9.2. Możliwe kierunki rozwoju tematu

Problem analizowania ram przestrzennych zbudowanych z elementów cienkościennych nadal jest otwarty. Ze względu na powszechne stosowanie

konstrukcji cienkościennych problem, zdaniem autora, powinien być ciągle dyskutowany.

Do podstawowych kierunków rozwoju tematu autor zalicza wprowadzenie „lepszego” elementu skończonego powłokowego oraz rozpoznanie, i ewentualnie wprowadzenie możliwości występowania uplastycznień, przede wszystkim w węzłach ram i miejscach przyłożenia obciążeń skupionych. Naturalnym byłoby również uogólnienie modeli na analizę konstrukcji o przekrojach zamkniętych.

Celowe wydaje się też kontynuowanie badań eksperymentalnych ram o prętach cienkościennych szczególnie w zagadnieniach dynamicznych, które uzupełnią dotychczasowe prace eksperymentalne dotyczące głównie zagadnień liniowych, np. [12, 35, 68].

A. Opis programu AmFEM

Wykorzystując środowisko MATLAB, opracowano własny program komputerowy, którym wykonywano obliczenia przykładów umieszczonych w pracy. Program pozwala na rozwiązywanie czterech typów zadań:

- wykorzystujących tylko płaskie elementy powłokowe (model 3D),
- wykorzystujących tylko belkowe elementy cienkościenne (model 1D),
- wykorzystujących przestrzenne elementy węzłowe (model mieszany 1D/3D),
- wykorzystujących elementy przejściowe (model mieszany 1D/3D).

Ponadto dla każdego typu zadania można zastosować jeden z pięciu typów analizy:

- analiza liniowa,
- analiza wybożenia,
- analiza typu $p - \Delta$ dla małych nieliniowości,
- analiza nieliniowa wyznaczania podstawowej ścieżki stanów równowagi, ze sterowaniem obciążeniem lub przemieszczeniem [5],
- analiza nieliniowa z wyznaczaniem punktów krytycznych wykorzystująca metodę bisekcji.

Program pozwala też na podstawowy postprocesing zadań:

- manipulację widokiem konstrukcji (powiększanie, pomniejszanie, przesuwanie), wyświetlenie numerów węzłów i numerów elementów,
- wyświetlenie konstrukcji w konfiguracji początkowej i aktualnej,
- zaznaczenie węzłów w których umieszczone jest obciążenie,
- zaznaczenie węzłów z wprowadzonymi warunkami brzegowymi,

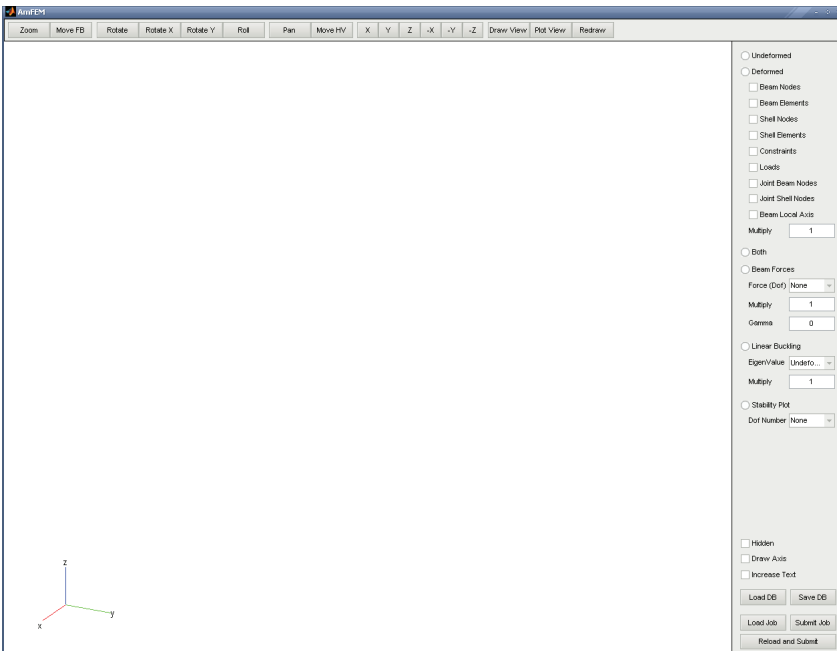
- zaznaczenie węzłów wspólnych dla części powłokowej i belkowej modelu,
- wyświetlenie form wyboczenia,
- wykreślenie podstawowych ścieżek stanów równowagi,
- wyświetlenie wykresów sił przekrojowych w elementach belkowych cienkościennych.

Program uruchamiamy wydając polecenie

```
amfem
```

Listing A.1. Uruchomienie programu AmFEM

z linii poleceń systemu MATLAB. Po uruchomieniu programu (rys. A.1) należy wczytać plik zadania i uruchomić analizę.



Rys. A.1. Okno programu AmFEM

Plik zadania jest skryptem (m-plikiem) systemu MATLAB, który inicjuje odpowiednie struktury zmiennych. Poniżej zamieszczono przykładowy skrypt zadania (podzielony na części i zaopatrzony komentarzem) analizy nieliniowej w którym zastosowano elementy przejściowe.

Definicja typu zadania:

```
Job.Type = 'Transient NonLinear';
```

Listing A.2. Definicja typu zadania

Zmienna `Type` w strukturze `Job` składa się z dwóch części, oddzielonych spacją, które definiują model i rodzaj analizy. Rodzaj modelu określa się przez podanie jednego z słów kluczowych:

`Beam` – tylko elementy cienkościenne,

`Shell` – tylko elementy powłokowe,

`Joint` – zadanie z wykorzystaniem przestrzennego elementu węzłowego,

`Transient` – zadanie z wykorzystaniem elementów przejściowych.

Rodzaj analizy określa się przez podanie jednego z słów kluczowych:

`Linear` – analiza liniowa,

`Buckle` – analiza wyboczenia,

`Delta` – analiza $p - \Delta$,

`NonLinear` – analiza nieliniowa

`Critical` – poszukiwanie punktu krytycznego.

Definicję materiału umieszcza się w strukturze `Material`:

```
Material(1).E = 205e9;
Material(1).Er = 225.27e9;
Material(1).Ni = 0.3;
Material(1).G = 78.85e9;
```

Listing A.3. Definicja stałych materiałowych

Składa się on z czterech pól:

`E` – moduł Younga,

`Er` – zredukowany moduł Younga,

`Ni` – współczynnik Poissona,

G – moduł Kirchhoffa.

W pliku danych można definiować wiele materiałów, dodając kolejne struktury `Material` (kolejne numery struktur podaje się w nawiasach okrągłych).

Definicja grubości elementu powłokowego polega na przypisaniu wartości do pola `Thickness` w strukturze `ShellSection`:

```
ShellSection(1).Thickness = 0.01;
```

Listing A.4. Definicja grubości elementu powłokowego

W pliku danych można definiować wiele grubości, dodając kolejne numerowane struktury `ShellSection`.

Struktura `BeamSection` odpowiada za opis geometrii przekroju cienkościennego. W kolejnych polach definiuje się pole powierzchni przekroju, momenty bezwładności, położenie środka ścinania i momenty wyższych rzędów:

```
BeamSection(1).Area = 6.799999999999963e-003;
BeamSection(1).Jy = 1.024266666666667e-004;
BeamSection(1).Jz = 1.335666666666670e-005;
...
BeamSection(1).Ys = 4.021042851316333e-014;
BeamSection(1).Zs = 1.540261776800476e-014;
...
BeamSection(1).Myooz = 1.468713529473182e-020;
BeamSection(1).Mzooz = -8.762127773378741e-020;
BeamSection(1).Mzooz = -2.782079843262899e-007;
```

Listing A.5. Definicja przekroju elementu cienkościennego

W pliku danych można definiować wiele przekrojów cienkościennych, dodając kolejne numerowane struktury `BeamSection`.

Współrzędne węzłów i tablicę topologii elementów powłokowych umieszcza się w strukturze `ShellInstance`. W tablicy `ShellInstance.Nodes` znajdują się współrzędne węzłów:

```
ShellInstance(1).Nodes = [
```



```

1  4.15  -0.1  4.15
2  4.15   0   4.15
3  3.85   0   3.85
...
349 4.15  -0.1  3.6
];

```

Listing A.6. Definicje współrzędnych węzłów elementów powłokowych a w tablicy `ShellInstance.Elements` znajduje się topologia skończenie elementowa:

```

ShellInstance(1).Elements = [
1  1  2  19  24  124  125  126  127  1  1
2  24  19  20  23  126  128  129  130  1  1
3  23  20  21  22  129  131  132  133  1  1
...
104 32  7  18  89  198  348  349  346  1  1
];

```

Listing A.7. Definicja topologii elementów powłokowych

Oprócz topologii, w tablicy tej umieszczone są informacje o rodzaju materiału i przekroju elementu. Odpowiadają za to dwie ostatnie kolumny tablicy, zawierające numer struktury materiału i numer struktury opisującej grubość powłoki. Jeśli model zawiera więcej niż jedną część powłokową, rozróżnia się je dodając numer kolejny struktury `ShellInstance`.

Za definicję warunków brzegowych i obciążenia odpowiadają struktury `Constraint` i `Load`. Struktura `Constraint` ma dwa pola: `Nodes` – zawierający numery węzłów w których są zdefiniowane warunki brzegowe i pole `Dof` odpowiadające za definicję numerów stopni swobody w węźle. Na przykładzie widzimy odebranie rotacyjnych stopni swobody w węzłach o numerach 1, 2 i 3:

```

ShellInstance(1).Constraint(1).Nodes = [1 2 3];
ShellInstance(1).Constraint(1).Dof = [4 5 6];

```

Listing A.8. Definicja warunków brzegowych w części powłokowej

struktura `Load` składa się z trzech pól: `Magnitude`, `Nodes` i `Dof`, zawierających wartości obciążenia, numery węzłów i umery stopni swobody w których obciążenie jest przyłożone. Na przykładzie widzimy definicję momentu zginającego o wartości 1000, działającego w węźle o numerze 69:

```
ShellInstance(1).Load(1).Magnitude = 1000;
ShellInstance(1).Load(1).Nodes = [69];
ShellInstance(1).Load(1).Dof = [4];
```

Listing A.9. Definicja obciążenia w części powłokowej

W pliku zadania można definiować dowolną liczbę struktur opisujących warunki brzegowe i obciążenie.

Zadania z częścią powłokowa wymagają zdefiniowania charakterystycznych węzłów należących do ścianki od strony elementów belkowych i powłokowych. Odpowiadają za to pola `BeamNodes` i `Wall` w trykturze `ShellInstance`. W tablicy `BeamNodes` definiujemy numery węzłów belkowych skojarzonych ze ściankami.

```
ShellInstance(1).BeamNodes = [37 38];
```

Listing A.10. Definicja belkowych węzłów ścianki

Struktura `Wall` składa się z pól:

- `Nodes` – numery węzłów powłokowych, należących do ścianki,
- `TtNodes` – numery węzłów określających kierunek normalny do ścianki,
- `BeamSection` – numer przekroju,
- `YZOmega` – wartości współrzędnych y , z i funkcji spaczenia ω węzłów powłoki w głównych osiach centralnych przekroju.

```
ShellInstance(1).Wall(1).Nodes = [17 336 10 ... 13];
ShellInstance(1).Wall(2).Nodes = [15 304 7 ... 11];

ShellInstance(1).Wall(1).TtNodes = [35 36];
ShellInstance(1).Wall(2).TtNodes = [39 40];

ShellInstance(1).Wall(1).BeamSection = 1;
```

```

ShellInstance(1).Wall(2).BeamSection = 1;

ShellInstance(1).Wall(1).YZOmega = [
  0.1   0.15  0.015
  0.05  0.15  0.0075
  0     0.15  0
  ...
  0.1  -0.15 -0.015
];

ShellInstance(1).Wall(2).YZOmega = [
  0.1   0.15  0.015
  0.05  0.15  0.0075
  0     0.15  0
  ...
  0.1  -0.15 -0.015];

```

Listing A.11. Definicja parametrów ścianki

Definicja współrzędnych węzłów belkowych i tablicy topologii jest analogiczna jak w przypadku elementów powłokowych, za pomocą pól `Nodes` i `Elements` w strukturze `BeamInstance`:

```

BeamInstance.Nodes = [
  1  0  0  4
  2  0.1  0  4
  ...
  74  4  0  0
];

BeamInstance.Elements = [
  1  1  2  1  1
  2  2  3  1  1
  ...
  72  73  74  1  1
];

```

Listing A.12. Definicja współrzędnych węzłów i topologii części belkowej

W pliku zadania można zdefiniować tylko jedną część belkową.

Pola `Constraint` i `Load` służą do definicji warunków brzegowych i obciążenia analogicznie jak w przypadku elementów powłokowych. Poniżej pokazano zamocowanie odbierające wszystkie stopnie swobody w węzłach o numerach 1 i 74:

```
BeamInstance.Constraint(1).Nodes = [1 74];  
BeamInstance.Constraint(1).Dof = [1:7];
```

Listing A.13. Definicja warunków brzegowych w części belkowej

i obciążenie momentem skręcającym o wartości -2000 węzła 21:

```
BeamInstance.Load(1).Magnitude = -2000;  
BeamInstance.Load(1).Nodes = [21];  
BeamInstance.Load(1).Dof = [4];
```

Listing A.14. Definicja obciążenia w części belkowej

W polu `BeamInstance.ForceElements` można zdefiniować numery elementów dla których wartość sił przekrojowych zostanie umieszczona na rysunku.

```
BeamInstance.ForceElements = [1 74];
```

Listing A.15. Definicja elementów dla których zostaną wyświetlone wartości sił przekrojowych

Struktura `Settings` odpowiada za definicję różnych parametrów związanych z procesem obliczeń i postprocessingiem. Możemy w niej zdefiniować mnożniki skali rysowanych modeli skończenie elementowych:

```
Settings.DisplacementMultiply = 200;  
Settings.ForceMultiply = 0.001;
```

Listing A.16. Ustawienie początkowych wartości mnożników skali

włączyć uwzględnianie efektów od obrotów skończonych:

```
Settings.SecondRotation = 'yes';
```

Listing A.17. Uwzględnienie efektów od obrotów skończonych w elementach belkowych

czy ustawić wartość parametru kary dla elementów przejściowych:

```
Settings.ConstraintsPenalty = Material(1).E;
```

Listing A.18. Ustawienie wartości parametru kary

Ponadto w strukturze tej definiuje się sposób sterowania w metodzie Newtona-Raphsona. Pole `StabilityControl` odpowiada za wybór metody sterowania: obciążeniem (wartość ustawiona na `'force'`) lub przemieszczeniem (`'displacement'`). Pole `StabilityIncrement` odpowiada za definicję wartości przyrostów obciążenia lub przemieszczenia w kolejnych krokach obliczeń. Pola `StabilityJoint`, `StabilityElement`, `StabilityNodes` i `StabilityDof` odpowiadają za definicje elementów, węzłów i stopni swobody dla których sporządzone mają zostać wykresy ścieżek stanów równowagi:

```
Settings.StabilityControl = 'force';
Settings.StabilityIncrement = [0.1:0.1:1];
Settings.StabilityJoint = 1;
Settings.StabilityElement = 'beam';
Settings.StabilityNodes = [54 54 54 54 54 54];
Settings.StabilityDof = [1 2 3 4 5 6];
```

Listing A.19. Definicja parametrów sterowania w metodzie Newtona-Raphsona

Na rys. A.2 pokazano podsumowanie po obliczeniu zadania nieliniowego z elementami przejściowymi.

Na rys. A.3 i A.4 pokazano odpowiednio okno programu AmFEM z narysowanym odkształconym modelem skończenie elementowym i wykreśloną ścieżką stanów równowagi. Natomiast na rys. A.5 znajduje się okno programu z narysowaną formą wyboczenia.

```

Command Window
FEM Solver Program for MATLAB
*****
Job filename: rama_0outsomik_nonline_transient_v1.n
Job type: Transient Nonlinear
Control: Force

Joints
-----
Number of joints: 1
Number of walls: 2

Shell Elements
-----
Nodes per element: 8
Dof per node: 6
Dof per element: 48

Number of elements: 96
Number of nodes: 329
Number of dof: 1974

Thin-Walled Elements
-----
Nodes per element: 2
Dof per node: 7
Dof per element: 14

Number of elements: 72
Number of nodes: 74
Number of dof: 518

Transient Elements
-----
Number of elements: 34

Total number of dof: 2492

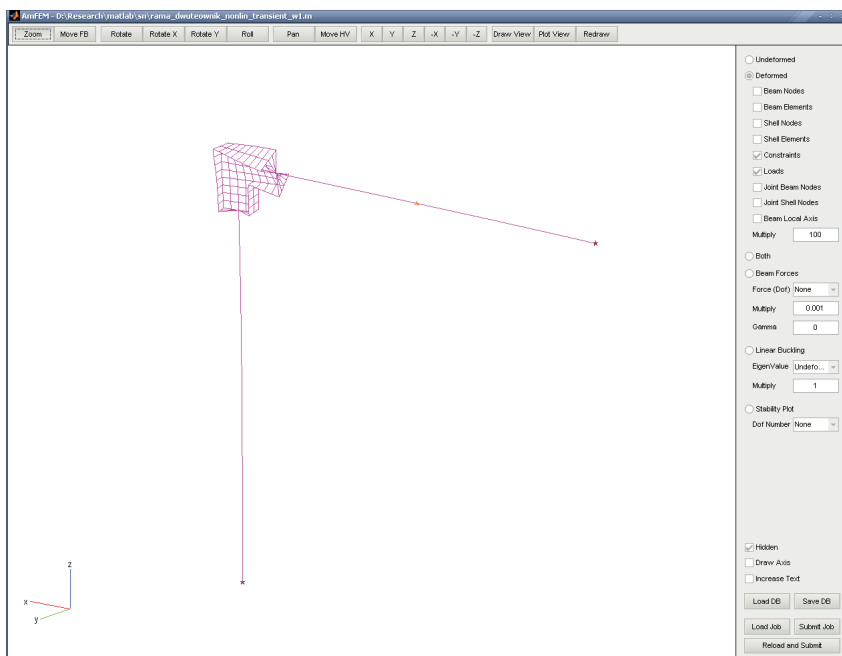
Increment | Lambda | Iteration | Convergence O | Convergence F | Status
-----|-----|-----|-----|-----|-----
1 | 0.1000 | 3 | 1.7702e-006 | 3.0741e-012 | OK
2 | 0.2000 | 3 | 3.5363e-006 | 5.1182e-012 | OK
3 | 0.3000 | 3 | 4.1485e-006 | 9.0791e-012 | OK
4 | 0.4000 | 3 | 4.3864e-006 | 8.9420e-012 | OK
5 | 0.5000 | 3 | 4.5288e-006 | 1.2751e-011 | OK
6 | 0.6000 | 3 | 4.6009e-006 | 1.4632e-011 | OK
7 | 0.7000 | 3 | 4.6283e-006 | 1.6992e-011 | OK
8 | 0.8000 | 3 | 4.6243e-006 | 2.0764e-011 | OK
9 | 0.9000 | 3 | 4.5967e-006 | 2.4802e-011 | OK
10 | 1.0000 | 3 | 4.5503e-006 | 2.8231e-011 | OK

Total time: 40.9531

```

Rys. A.2. Podsumowanie zadania w oknie Command Window systemu MATLAB

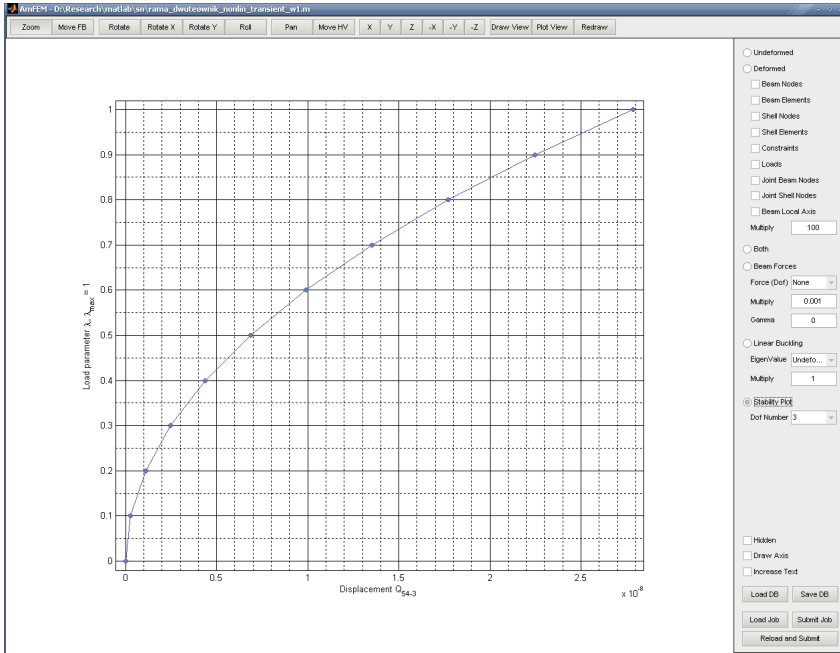
We wszystkich typach zadań, w strukturach `BeamOut` i `ShellOut` umieszczone są pola o nazwie `Q`, zawierające wartości przemieszczeń uogólnionych w węzłach belkowych i powłokowych. W przypadku zadań z wyboczenia, oprócz wyników z analizy liniowej, dodatkowe wyniki umieszczane są w strukturach `BeamBuckle` i `ShellBuckle`. Dla każdej wartości krytycznej obciążenia jest w nich tworzona struktura `Mode` w której umieszczone są zmienne zawierające wartość mnożnika obciążenia krytycznego `EigenValue` i wektor formy wyboczenia `EigenVector`. Dla zadań nieliniowych i zadań typu $p - \Delta$ oprócz wartości przemieszczeń uogólnionych, dostępna jest jeszcze wynikowa struktura `Stability`, zawierająca wyniki dotyczące ścieżek stanów równowagi dla każdego zdefiniowanego węzła w rekordzie `Settings`. Struktura zawiera między innymi pola `Inc` oraz `Q` w których zapamiętane są wartości parametru obciążenia i korespondujące z nimi wartości przemieszczeń.



Rys. A.3. Okno programu AmFEM z narysowanym odkształconym modelem

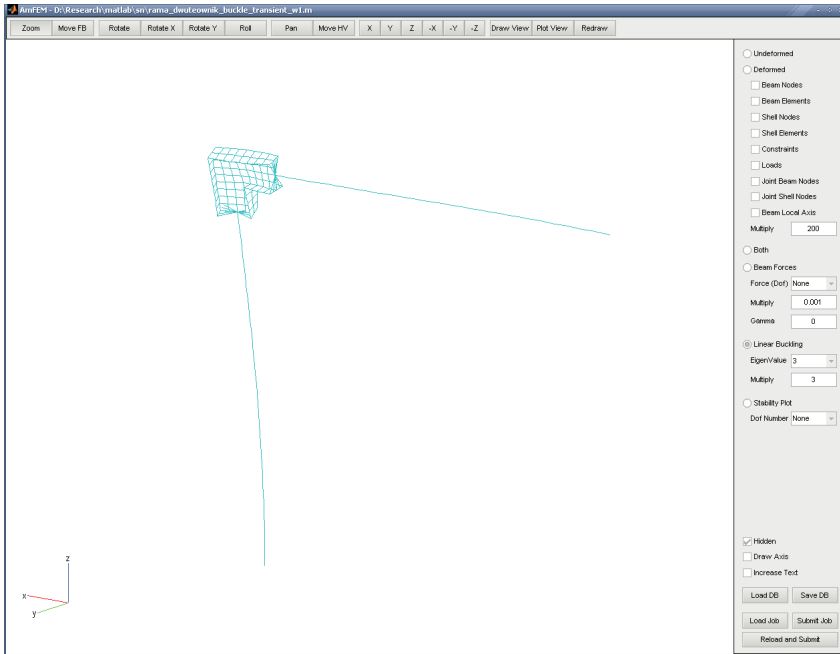
Na górnym pasku narzędzi znajdują się przyciski pozwalające na zmianę widoku rysunku:

- | | |
|----------|---|
| Zoom | – powiększanie i pomniejszanie widoku konstrukcji (realizowane przez zmianę ustawień kamery), |
| Move FB | – przesuwanie szkicu konstrukcji do przodu i do tyłu, |
| Rotate | – dowolny obrót szkicu konstrukcji (realizowane przez zmianę ustawień kamery), |
| Rotate X | – obrót szkicu konstrukcji w płaszczyźnie ekranu wokół osi poziomej (realizowane przez zmianę ustawień kamery), |
| Rotate Y | – obrót szkicu konstrukcji w płaszczyźnie ekranu wokół osi pionowej (realizowane przez zmianę ustawień kamery), |



Rys. A.4. Okno programu AmFEM z wykreśloną ścieżką stanów równowagi

- | | |
|---|---|
| <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;">Pan</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;">Move HV</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: fit-content; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">X</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">-X</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: fit-content; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">Y</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">-Y</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: fit-content; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">Z</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: 20px; text-align: center;">-Z</div> </div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;">Draw View</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;">Plot View</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; width: fit-content;">Redraw</div> | <ul style="list-style-type: none"> – przesuwanie szkicu konstrukcji w płaszczyźnie ekranu (realizowane przez zmianę ustawień kamery), – przesuwanie szkicu konstrukcji w kierunku poziomym i pionowym, – włączenie widoku z kierunku osi X lub $-X$, – włączenie widoku z kierunku osi Y lub $-Y$, – włączenie widoku z kierunku osi Z lub $-Z$, – włączenie domyślnego widoku szkicu konstrukcji, – włączenie domyślnego widoku wykresu ścieżki stanu równowagi, – odświeżenie ekranu. |
|---|---|



Rys. A.5. Okno programu AmFEM z narysowaną formą wyboczenia

Narzędzia dotyczące zmiany rysowanych elementów znajdują się na bocznym pasku w następujących grupach:

— model w konfiguracji początkowej i aktualnej:

- Undeformed — narysowanie konstrukcji w konfiguracji początkowej,
- Deformed — narysowanie konstrukcji w konfiguracji aktualnej,
- Beam Nodes — wyświetlenie numerów węzłów belkowych,
- Beam Elements — wyświetlenie numerów elementów belkowych,
- Shell Nodes — wyświetlenie numerów węzłów powłokowych,
- Shell Elements — wyświetlenie numerów elementów powłokowych,

- Constraints – zaznaczenie węzłów z wprowadzonymi warunkami brzegowymi,
- Loads – zaznaczenie węzłów w których umieszczone jest obciążenie,
- Joint Beam Nodes – wyświetlenie węzłów belkowych ścianki,
- Joint Shell Nodes – wyświetlenie węzłów powłokowych ścianki,
- Beam Local Axis – wyświetlenie lokalnych układów współrzędnych elementów belkowych,
- Multiply – ustawienie wartości mnożnika skali w konfiguracji aktualnej,
- Both – narysowanie konstrukcji niezdeformowanej i zdeformowanej,

— wykreślenie wykresów sił przekrojowych w elementach belkowych:

- Beam Forces – włączenie rysowania wykresów sił przekrojowych,
- Force (Dof) – siła przekrojowa,
- Multiply – wartości mnożnika skali wykresy sił przekrojowych,
- Gamma – kąt obrotu wykresu wokół osi elementu belkowego,

— narysowanie formy wybożenia:

- Linear Buckling – włączenie rysowania formy wybożenia,
- EigenValue – numer formy wybożenia,
- Multiply – wartości mnożnika szkicu formy wybożenia,

— narysowanie ścieżki stanu równowagi:

- Stability Plot – włączenie rysowania ścieżki stanu równowagi,

▾

- numer stopnia swobody umieszczonego na wykresie ścieżki stanu równowagi,

— w każdym powyższym przypadku można jeszcze wybrać:

 Hidden

- ukrycie niewidocznych krawędzi,

 Draw Axis

- naszkicowanie globalnego układu współrzędnych,

 Increase Text

- powiększenie czcionki używanej do numerowania węzłów i elementów.

Wczytywanie plików zadań oraz wczytywanie i zapisywanie wyników obliczeń można zrealizować używając przycisków:

- wczytanie i zapisanie wyników analizy,

- wczytanie zadania i uruchomienie analizy,

- ponowne wczytania zadania i uruchomienie analizy.

B. Opis programu SecPropGRAPH

Program SecPropGRAPH służy do obliczania charakterystyk geometrycznych cienkościennych przekrojów otwartych. Program jest funkcją systemu MATLAB o składni¹:

```
Section = SecPropGRAPH(Vertices , Edges)
```

Listing B.1. Uruchomienie programu SecPropGRAPH

gdzie:

Vertices – tablica współrzędnych wierzchołków,

Edges – tablica definicji krawędzi,

Section – wynikowa struktura.

Tablica **Vertices** posiada trzy kolumny. W pierwszej kolumnie umieszcza się numer kolejny wierzchołka, a w dwóch kolejnych współrzędne (y, z) wierzchołków w układzie współrzędnych użytkownika.

Tablica **Edges** zawiera definicję krawędzi opisujących przekrój cienkościenny otwarty. Posiada cztery kolumny. W pierwszej kolumnie umieszcza się numer kolejny krawędzi, w dwóch kolejnych numery wierzchołków tworzących krawędź. Ostatnia kolumna definiuje grubość krawędzi.

Tablice z danymi wejściowymi muszą być zainicjowane przed uruchomieniem programu. Przy większych zadaniach łatwiej będzie użyć skryptu w postaci m-pliku z definicją danych wejściowych i odpowiednim wywołaniem programu SecPropGRAPH. Przykładowy skrypt może wyglądać następująco:

¹ Nazwy **Vertices**, **Edges** i **Section** są nazwami zmiennych i mogą być inne.

```
Vertices = [  
  1 -0.04  0  
  2 -0.03  0  
  3 -0.02  0  
  ...  
 17 -0.02  0.1  
];  
  
Edges = [  
  1  1  2  0.005  
  2  2  3  0.005  
  3  3  4  0.005  
  ...  
 16 16 17  0.005  
];  
  
Section = SecPropGRAPH(Vertices , Edges)
```

Listing B.2. Definicja danych wejściowych i uruchomienie programu

W wyniku działania programu otrzymamy strukturę Section:

```
Area: 8.0000e-004  
Sy: 9.7409e-021  
Sz: -2.3293e-021  
So: 9.9262e-023  
Jy: 1.1487e-006  
Jz: 7.5446e-008  
Jyz: -1.4426e-021  
Jr: 1.2242e-006  
Jt: 6.6667e-009  
Jo: 7.0940e-011  
Jyo: -2.1403e-023  
Jzo: -9.9262e-023  
Jry: -5.9613e-009  
Jrz: 5.9252e-009  
Jro: -3.7094e-011
```

```

UserYc : -0.0062
UserZc : 0.0437
UserYs : 0.0067
UserZs : 0.0170
UserYq : -0.0162
UserZq : 6.9389e-018
Ys : 0.0159
Zs : -0.0252
Yq : -0.0050
Zq : -0.0446
Gamma : -0.1116
Transform : [2x2 double]
Vertices : [17x4 double]

```

Listing B.3. Wynikowa struktura danych

W poniższych wzorach oznaczono:

d – dendryt linii środkowej przekroju,

s – parametr drogi skierowanej linii środkowej,

$t(s)$ – grubość krawędzi,

$h(s)$ – długość krawędzi,

$\omega(s)$ – współrzędna wycinkowa,

$y(s)$, $z(s)$ – współrzędne linii środkowej przekroju w postaci parametrycznej.

Struktura zawiera następujące pola:

Area – pole powierzchni przekroju poprzecznego profilu cienkościennego,

$$A = \int_d t(s) ds, \quad (\text{B.1})$$

S_y – moment statyczny względem osi y ,

$$S_y = \int_d z(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.2})$$

S_z – moment statyczny względem osi z ,

$$S_z = \int_d y(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.3})$$

S_ω – wycinkowy moment statyczny,

$$S_\omega = \int_d \omega(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.4})$$

J_y – moment bezwładności względem osi y ,

$$J_y = \int_d z^2(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.5})$$

J_z – moment bezwładności względem osi z ,

$$J_z = \int_d y^2(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.6})$$

J_{yz} – odśrodkowy moment bezwładności,

$$J_{yz} = \int_d y(s) \cdot z(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.7})$$

J_r – biegunowy moment bezwładności,

$$J_r = \int_d \left(y^2(s) + z^2(s) \right) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.8})$$

J_t – moment bezwładności przy skręcaniu,

$$J_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 \cdot h_i, \quad (\text{B.9})$$

J_ω – wycinkowy moment bezwładności,

$$J_\omega = \int_d \omega^2(s) \cdot t(s) \, ds, \quad (\text{B.10})$$

$J_{y\omega}$ – wycinkowy moment odśrodkowy,

$$J_{y\omega} = \int_d y(s) \cdot \omega(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.11})$$

$J_{z\omega}$ – wycinkowy moment odśrodkowy,

$$J_{z\omega} = \int_d z(s) \cdot \omega(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.12})$$

J_{ry} – moment wyższego rzędu,

$$J_{ry} = \int_d \left(y^2(s) + z^2(s) \right) \cdot y(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.13})$$

J_{rz} – moment wyższego rzędu,

$$J_{rz} = \int_d \left(y^2(s) + z^2(s) \right) \cdot z(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.14})$$

$J_{r\omega}$ – moment wyższego rzędu,

$$J_{r\omega} = \int_d \left(y^2(s) + z^2(s) \right) \cdot \omega(s) \cdot t(s) ds, \quad (\text{B.15})$$

$UserY_c, UserZ_c$ – współrzędne (y_C, z_C) środka ciężkości w układzie współrzędnych użytkownika,

$UserY_s, UserZ_s$ – współrzędne (y_S, z_S) środka zginania w układzie współrzędnych użytkownika,

$UserY_q, UserZ_q$ – współrzędne (y_Q, z_Q) głównego punktu zerowej współrzędnej wycinkowej w układzie użytkownika,

Y_s, Z_s – współrzędne (Y_S, Z_S) środka zginania w układzie osi głównych centralnych,

Y_q, Z_q – współrzędne (Y_Q, Z_Q) głównego punktu zerowej współrzędnej wycinkowej w układzie osi głównych centralnych,

Γ – kąt γ transformacji z lokalnego układu współrzędnych (określonego przez użytkownika) do układu osi głównych centralnych,

Transform – tablica transformacji z lokalnego układu współrzędnych użytkownika do układu osi głównych centralnych,

Vertices – współrzędne wierzchołków w układzie osi głównych centralnych.

Tablica transformacji `Section.Transform` może mieć postać:

```
Section.Transform =
0.9938  -0.1113
0.1113  0.9938
```

Listing B.4. Tablica transformacji

i jest liczona według zależności

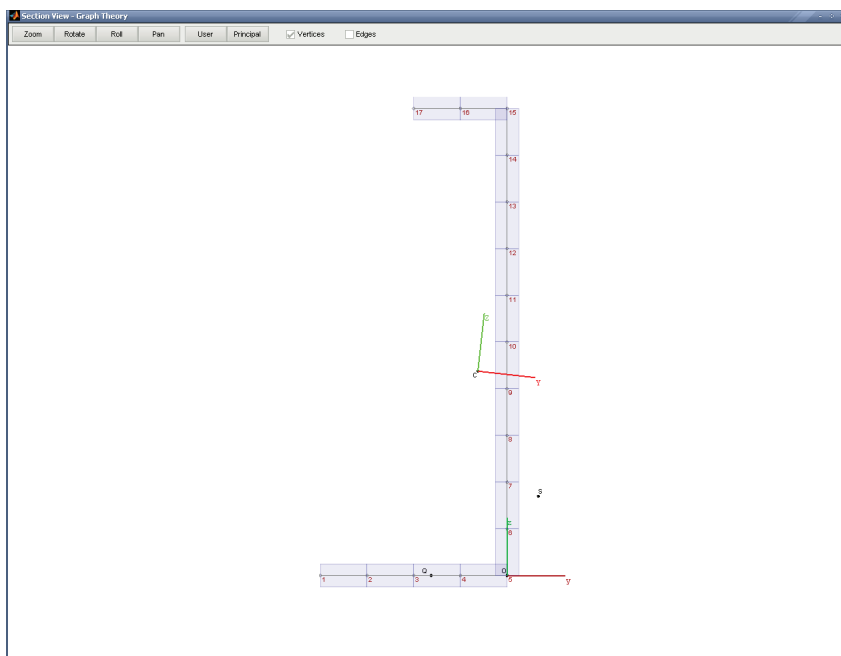
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Tablica `Section.Vertices` ma cztery kolumny. W pierwszej znajdują się kolejne numery wierzchołków, w dwóch kolejnych ich współrzędne (w układzie płóнным centralnym), a ostatnia kolumna zawiera wartości współrzędnej wycinkowej w wierzchołkach:

```
Section.Vertices =
1.0000  -0.0287  -0.0472  0.0004
2.0000  -0.0187  -0.0461  0.0002
3.0000  -0.0088  -0.0450  0.0001
...
17.0000 -0.0199  0.0544  -0.0013
```

Listing B.5. Tablica wynikowa `Section.Vertices`

Na rys. B.1 pokazano przykładowe okno programu SecPropGRAPH ze szkicem przekroju cienkościennego (składającego się z 16 krawędzi) i zaznaczonymi numerami wierzchołków. Ponadto, na rysunku widać początek O i osie układu współrzędnych użytkownika, początek C i osie układu głównego centralnego, środek zginania S , główny punkt zerowej współrzędnej wycinkowej Q .



Rys. B.1. Okno programu SecPropGRAPH

Na górnym pasku znajdują się następujące narzędzia:

- | | |
|--|---|
| <input type="button" value="Zoom"/> | – powiększanie i zmniejszanie szkicu przekroju, |
| <input type="button" value="Rotate"/> | – dowolny obrót szkicu, |
| <input type="button" value="Roll"/> | – obrót szkicu w płaszczyźnie ekranu, |
| <input type="button" value="Pan"/> | – przesuwanie szkicu, |
| <input type="button" value="User"/> | – włączenie widoku w układzie współrzędnych użytkownika, |
| <input type="button" value="Principal"/> | – włączenie widoku w układzie współrzędnych głównych centralnych, |
| <input type="checkbox"/> Edges | – włączenie wyświetlania numerów wierzchołków, |
| <input type="checkbox"/> Vertices | – włączenie wyświetlania numerów krawędzi. |

C. Opis programu SecPropFEM

Program SecPropFEM przeznaczony jest do obliczania charakterystyk geometrycznych dowolnych płaskich przekrojów. Program jest funkcją systemu MATLAB o składni¹:

```
Section = SecPropFEM(Nodes, Elements, WarpNodes)
```

Listing C.1. Uruchomienie programu SecPropFEM

gdzie:

Nodes – tablica współrzędnych węzłów,

Elements – tablica topologii,

WarpNodes – tablica z numerami wyróżnionych węzłów (może być pusta),

Section – wynikowa struktura.

Tablica **Nodes** posiada trzy kolumny. W pierwszej kolumnie umieszcza się numer kolejny węzła, a w dwóch kolejnych współrzędne (y, z) węzłów w układzie współrzędnych użytkownika.

Tablica **Elements** zawiera definicję elementów czworokątnych. Posiada pięć kolumny. W pierwszej kolumnie umieszcza się numer kolejny elementu, w czterech kolejnych numery węzłów tworzących element.

W tablicy **MarkNodes** umieszcza się numery węzłów wyróżnionych. Dla tych węzłów obliczane są współrzędne w układzie głównym centralnym i wartość funkcji spaczenia.

¹ Nazwy **Nodes**, **Elements**, **WarpNodes** i **Section** są nazwami zmiennych i mogą być inne.

Tablice z danymi wejściowymi muszą być zainicjowane przed uruchomieniem programu. Przy większych zadaniach łatwiej będzie użyć skryptu w postaci m-pliku z definicją danych wejściowych i odpowiednim wywołaniem programu SecPropFEM. Przykładowy skrypt może wyglądać następująco:

```

Nodes = [
    1   0   0
    2  10   0
    3  0.5  0.4679
    ...
 1031 9.5517 0.8977
];

Elements = [
    1  304  305  484  482
    2  305   1  306  484
    3  482  484  485   3
    ...
 869 1031  340  341 1027
];

MarkNodes = [6 5 92 3 4];

Section = SecPropFEM(Nodes , Elements , MarkNodes)

```

Listing C.2. Definicja danych wejściowych i uruchomienie programu

W wyniku działania programu otrzymamy strukturę Section:

```

Section =
    Area: 59.0995
        Sy: 2.3358e-012
        Sz: 3.3640e-013
        So: -8.0602e-012
        Jy: 8.0853e+003
        Jz: 493.9747
        Jyz: -6.5694e-010

```

```
Jr: 8.5793e+003
Jt: 39.2345
Jo: 6.8183e+004
Jyo: 3.4987e-009
Jzo: -1.5277e-012
Jry: 1.0099e+004
Jrz: 1.1253e+003
Jro: 352.0739
UserYc: 2.7050
UserZc: 14.9184
UserYs: -2.6243
UserZs: 14.9593
Ys: -5.3292
Zs: 0.0462
Gamma: 9.9697e-004
Transform: [2x2 double]
WarpNodes: [5x4 double]
My4: 1.0903e+004
Mz4: 1.4808e+006
Mo4: 2.0518e+008
My3: 1.4323e+003
Mz3: 1.1066e+003
Mo3: 2.4420e+004
Moy2: 8.0718e+003
Moz2: 2.1468e+003
Moy: -2.7319
Moz: -314.9520
My3z: 175.1253
My3o: 654.6312
Mz3y: 1.9298e+003
Mz3o: 5.1253e+005
Mo3y: 1.9469e+005
Mo3z: 2.3138e+007
My2z2: 8.2034e+004
My2o2: 1.4098e+006
My2oy2: 8.1960e+004
My2oz2: 3.9380e+004
```

```
My2z: 18.7441
My2o: 113.1077
My2oy: -4.0762
My2oz: -4.0549e+003
Mz2o2: 1.2342e+007
Mz2oy2: 1.4663e+006
Mz2oz2: 3.9891e+005
  Mz2y: 8.6669e+003
  Mz2o: 238.9662
  Mz2oy: 745.0466
  Mz2oz: -5.1755e+004
Mo2oy2: 1.2385e+007
Mo2oz2: 4.9927e+006
  Mo2y: 1.6276e+005
  Mo2z: 8.7164e+003
  Mo2oy: 5.5594e+003
  Mo2oz: -5.2791e+005
Myoy2: 8.6934e+003
Myoz2: 6.4417e+003
Mzoy2: 374.2829
Mzoz2: 29.7665
  Myoy: 3.2428e-004
  Myoz: -474.3565
  Mzoy: 8.0657e+003
  Mzoz: 0.0035
Mooy2: 155.6904
Moоз2: 190.9111
  Mooy: 109.2331
  Moоз: -7.0502
My2zo: 2.4241e+005
Mz2yo: 1.1355e+004
Mo2yz: 4.0196e+004
Myzoy2: 1.1321e+003
Myzoz2: 451.5591
  Myzo: 7.0166e+004
  Myzoy: 8.6619e+003
  Myzoz: -24.8622
```



```

Myooy2: 4.8034e+003
Myooz2: 1.9853e+003
Mzooy2: 5.5781e+005
Mzooz2: 9.4859e+005
  Myooy: 7.0318e+004
  Myooz: -112.2013
  Mzooy: 201.2043
  Mzooz: -6.6912e+004

```

Listing C.3. Wynikowa struktura danych

W poniższych wzorach oznaczono:

a – powierzchnia przekroju poprzecznego,

ω – funkcja spaczenia,

y, z – współrzędne punktu w przekroju poprzecznym.

Struktura zawiera następujące pola:

Area – pole powierzchni przekroju poprzecznego profilu cienkościennego,

$$A = \iint_a dy dz, \quad (\text{C.1})$$

S_y – moment statyczny względem osi y ,

$$S_y = \iint_a z dy dz, \quad (\text{C.2})$$

S_z – moment statyczny względem osi z ,

$$S_z = \iint_a y dy dz, \quad (\text{C.3})$$

S_ω – moment statyczny spaczenia,

$$S_\omega = \iint_a \omega dy dz, \quad (\text{C.4})$$

J_y – moment bezwładności względem osi y ,

$$J_y = \iint_a z^2 dy dz, \quad (\text{C.5})$$

J_z – moment bezwładności względem osi z ,

$$J_z = \iint_a y^2 dy dz, \quad (\text{C.6})$$

J_{yz} – odśrodkowy moment bezwładności,

$$J_{yz} = \iint_a y \cdot z dy dz, \quad (\text{C.7})$$

J_r – biegunowy moment bezwładności,

$$J_r = \iint_a (y^2 + z^2) dy dz, \quad (\text{C.8})$$

J_t – moment bezwładności przy skręcaniu,

$$J_t = \iint_a \left(y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dy dz, \quad (\text{C.9})$$

J_ω – moment bezwładności spaczenia,

$$J_\omega = \iint_a \omega^2 dy dz, \quad (\text{C.10})$$

$J_{y\omega}$ – moment odśrodkowy spaczenia,

$$J_{y\omega} = \iint_a y \cdot \omega dy dz, \quad (\text{C.11})$$

$J_{z\omega}$ – moment odśrodkowy spaczenia,

$$J_{z\omega} = \iint_a z \cdot \omega dy dz, \quad (\text{C.12})$$

J_{ry} – moment wyższego rzędu,

$$J_{ry} = \iint_a (y^2 + z^2) \cdot y dy dz, \quad (\text{C.13})$$

J_{rz} – moment wyższego rzędu,

$$J_{rz} = \iint_a (y^2 + z^2) \cdot z \, dy \, dz, \quad (\text{C.14})$$

$J_{r\omega}$ – moment wyższego rzędu,

$$J_{r\omega} = \iint_a (y^2 + z^2) \cdot \omega \, dy \, dz, \quad (\text{C.15})$$

$\text{UserYc}, \text{UserZc}$ – współrzędne (y_C, z_C) środka ciężkości w układzie współrzędnych użytkownika,

$\text{UserYs}, \text{UserZs}$ – współrzędne (y_S, z_S) środka zginania w układzie współrzędnych użytkownika,

$\text{UserYq}, \text{UserZq}$ – współrzędne (y_Q, z_Q) głównego punktu zerowej współrzędnej wycinkowej w układzie użytkownika,

Ys, Zs – współrzędne (Y_S, Z_S) środka zginania w układzie osi głównych centralnych,

Yq, Zq – współrzędne (Y_Q, Z_Q) głównego punktu zerowej współrzędnej wycinkowej w układzie osi głównych centralnych,

Gamma – kąt γ transformacji z układu użytkownika do układu osi głównych,

Transform – tablica transformacji z układu użytkownika do układu osi głównych,

NodesWarping – współrzędne wyróżnionych węzłów i wartość funkcji spazczenia w wyróżnionych węzłach w układzie głównych osi centralnych,

My4 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^4} = \iint_a y^4 \, dy \, dz, \quad (\text{C.16})$$

Mz4 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^4} = \iint_a z^4 \, dy \, dz, \quad (\text{C.17})$$

Mo4 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^4} = \iint_a \omega^4 \, dy \, dz, \quad (\text{C.18})$$

My3 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^3} = \iint_a y^3 \, dy \, dz, \quad (\text{C.19})$$

Mz3 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^3} = \iint_a z^3 \, dy \, dz, \quad (\text{C.20})$$

Mo3 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^3} = \iint_a \omega^3 \, dy \, dz, \quad (\text{C.21})$$

Moy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega,y^2} = \iint_a \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.22})$$

Moz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega,z^2} = \iint_a \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.23})$$

Moy – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega,y} = \iint_a \frac{\partial \omega}{\partial y} \, dy \, dz, \quad (\text{C.24})$$

Moz – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega,z} = \iint_a \frac{\partial \omega}{\partial z} \, dy \, dz, \quad (\text{C.25})$$

My3z – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^3z} = \iint_a y^3 \cdot z \, dy \, dz, \quad (\text{C.26})$$

My3o – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^3\omega} = \iint_a y^3 \cdot \omega \, dy \, dz, \quad (\text{C.27})$$

Mz3y – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^3y} = \iint_a z^3 \cdot y \, dy \, dz, \quad (\text{C.28})$$

Mz3o – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^3\omega} = \iint_a z^3 \cdot \omega \, dy \, dz, \quad (\text{C.29})$$

Mo3y – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^3y} = \iint_a \omega^3 \cdot y \, dy \, dz, \quad (\text{C.30})$$

Mo3z – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^3z} = \iint_a \omega^3 \cdot z \, dy \, dz, \quad (\text{C.31})$$

My2z2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2z^2} = \iint_a y^2 \cdot z^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.32})$$

My2o2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega^2} = \iint_a y^2 \cdot \omega^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.33})$$

My2oy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega,y^2} = \iint_a y^2 \cdot \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} \right)^2 dy dz, \quad (C.34)$$

My2oz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega,z^2} = \iint_a y^2 \cdot \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (C.35)$$

My2z – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2z} = \iint_a y^2 \cdot z dy dz, \quad (C.36)$$

My2o – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega} = \iint_a y^2 \cdot \omega dy dz, \quad (C.37)$$

My2oy – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega,y} = \iint_a y^2 \cdot \frac{\partial\omega}{\partial y} dy dz, \quad (C.38)$$

My2oz – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2\omega,z} = \iint_a y^2 \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z} dy dz, \quad (C.39)$$

Mz2o2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega^2} = \iint_a z^2 \cdot \omega^2 dy dz, \quad (C.40)$$

Mz2oy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega,y^2} = \iint_a z^2 \cdot \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} \right)^2 dy dz, \quad (C.41)$$

$M_{z^2\omega,z^2}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega,z^2} = \iint_a z^2 \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.42})$$

M_{z^2y} – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2y} = \iint_a z^2 \cdot y dy dz, \quad (\text{C.43})$$

$M_{z^2\omega}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega} = \iint_a z^2 \cdot \omega dy dz, \quad (\text{C.44})$$

$M_{z^2\omega,y}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega,y} = \iint_a z^2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dz, \quad (\text{C.45})$$

$M_{z^2\omega,z}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2\omega,z} = \iint_a z^2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz, \quad (\text{C.46})$$

$M_{\omega^2\omega,y^2}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2\omega,y^2} = \iint_a \omega^2 \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.47})$$

$M_{\omega^2\omega,z^2}$ – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2\omega,z^2} = \iint_a \omega^2 \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.48})$$

M_{ω^2y} – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2y} = \iint_a \omega^2 \cdot y dy dz, \quad (\text{C.49})$$

Mo2z – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2 z} = \iint_a \omega^2 \cdot z \, dy \, dz, \quad (\text{C.50})$$

Mo2oy – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2 \omega, y} = \iint_a \omega^2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \, dy \, dz, \quad (\text{C.51})$$

Mo2oz – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2 \omega, z} = \iint_a \omega^2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} \, dy \, dz, \quad (\text{C.52})$$

Myoy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega, y^2} = \iint_a y \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.53})$$

Myoz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega, z^2} = \iint_a y \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.54})$$

Mzoy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega, y^2} = \iint_a z \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.55})$$

Mzoz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega, z^2} = \iint_a z \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.56})$$

Myoy – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega, y} = \iint_a y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \, dy \, dz, \quad (\text{C.57})$$

Myoz – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega,z} = \iint_a y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz, \quad (\text{C.58})$$

Mzoy – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega,y} = \iint_a z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dz, \quad (\text{C.59})$$

Mzoz – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega,z} = \iint_a z \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz, \quad (\text{C.60})$$

Mooy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega\omega,y^2} = \iint_a \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.61})$$

Moоз2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega\omega,z^2} = \iint_a \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.62})$$

Mooy – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega\omega,y} = \iint_a \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dz, \quad (\text{C.63})$$

Moоз – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega\omega,z} = \iint_a \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz, \quad (\text{C.64})$$

My2zo – moment wyższego rzędu,

$$M_{y^2z\omega} = \iint_a y^2 \cdot z \cdot \omega dy dz, \quad (\text{C.65})$$

Mz2yo – moment wyższego rzędu,

$$M_{z^2y\omega} = \iint_a z^2 \cdot y \cdot \omega \, dy \, dz, \quad (\text{C.66})$$

Mo2yz – moment wyższego rzędu,

$$M_{\omega^2yz} = \iint_a \omega^2 \cdot y \cdot z \, dy \, dz, \quad (\text{C.67})$$

Myzoy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{yz\omega, y^2} = \iint_a y \cdot z \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.68})$$

Myzoz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{yz\omega, z^2} = \iint_a y \cdot z \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dz \, dz, \quad (\text{C.69})$$

Myzo – moment wyższego rzędu,

$$M_{yz\omega} = \iint_a y \cdot z \cdot \omega \, dy \, dz, \quad (\text{C.70})$$

Myzoy – moment wyższego rzędu,

$$M_{yz\omega, y} = \iint_a y \cdot z \frac{\partial \omega}{\partial y} \, dy \, dz, \quad (\text{C.71})$$

Myzoz – moment wyższego rzędu,

$$M_{yz\omega, z} = \iint_a y \cdot z \frac{\partial \omega}{\partial z} \, dy \, dz, \quad (\text{C.72})$$

Myooy2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega\omega, y^2} = \iint_a y \cdot \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz, \quad (\text{C.73})$$

Myooz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega\omega,z} = \iint_a y \cdot \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.74})$$

Mzooz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega\omega,y} = \iint_a z \cdot \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.75})$$

Mzooz2 – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega\omega,z} = \iint_a z \cdot \omega \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dy dz, \quad (\text{C.76})$$

Myooy – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega\omega,y} = \iint_a y \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dz, \quad (\text{C.77})$$

Myooz – moment wyższego rzędu,

$$M_{y\omega\omega,z} = \iint_a y \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz, \quad (\text{C.78})$$

Mzooy – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega\omega,y} = \iint_a z \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dz, \quad (\text{C.79})$$

Mzooz – moment wyższego rzędu,

$$M_{z\omega\omega,z} = \iint_a z \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} dy dz. \quad (\text{C.80})$$

Tablica transformacji Section.Transform może mieć postać:

Section.Transform =	
1.0000	0.0000
0.0000	1.0000

Listing C.4. Tablica transformacji

i jest liczona według zależności

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.81})$$


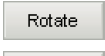
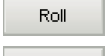
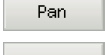


Tablica `Section.WarpNodes` ma cztery kolumny. W pierwszej znajdują się kolejne numery węzłów wyróżnionych (w tablicy `MarkNodes`), w dwóch kolejnych ich współrzędne w układzie głównym centralnym, a ostatnia kolumna zawiera wartości funkcji spaczenia:

```
Section.WarpNodes =
  6.0000  7.3096  14.6129  85.4245
  5.0000 -2.1904  14.6223 -47.0651
  92.0000 -2.2050 -0.0411  0.2982
  ...
  4.0000  7.3096 -14.4577 -85.4245
```

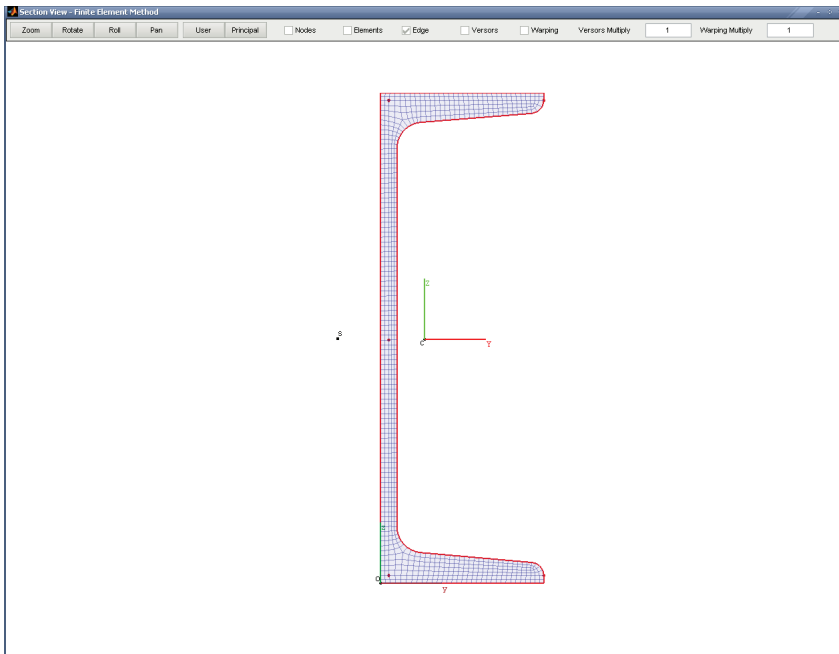
Listing C.5. Tablica wynikowa `Section.WarpNodes`

Na rys. C.1 pokazano przykładowe okno programu SecPropFEM ze szkicem przekroju cienkościennego (składającego się z 869 elementów). Ponadto na rysunku widać początek O i osie układu współrzędnych użytkownika, początek C i osie układu głównego centralnego, środek zginania S . Czerwonym kolorem są oznaczone wyróżnione węzły i wykryta krawędź zewnętrzna przekroju poprzecznego.

Na górnym pasku znajdują się narzędzia:

- | | |
|---|---|
|  | – powiększanie i zmniejszanie szkicu przekroju, |
|  | – dowolny obrót szkicu, |
|  | – obrót szkicu w płaszczyźnie ekranu, |
|  | – przesuwanie szkicu, |
|  | – włączenie widoku w układzie współrzędnych użytkownika, |
|  | – włączenie widoku w układzie współrzędnych głównych centralnych, |

- Nodes – włączenie wyświetlania numerów węzłów,
- Elements – włączenie wyświetlania numerów elementów,
- Edge – włączenie wyświetlania zewnętrznej krawędzi,
- Vectors – włączenie wyświetlania normalnych zewnętrznej krawędzi,
- Warping – włączenie wyświetlania funkcji spaczenia,



Rys. C.1. Okno programu SecPropFEM

Można ponadto zmienić wartości parametrów:

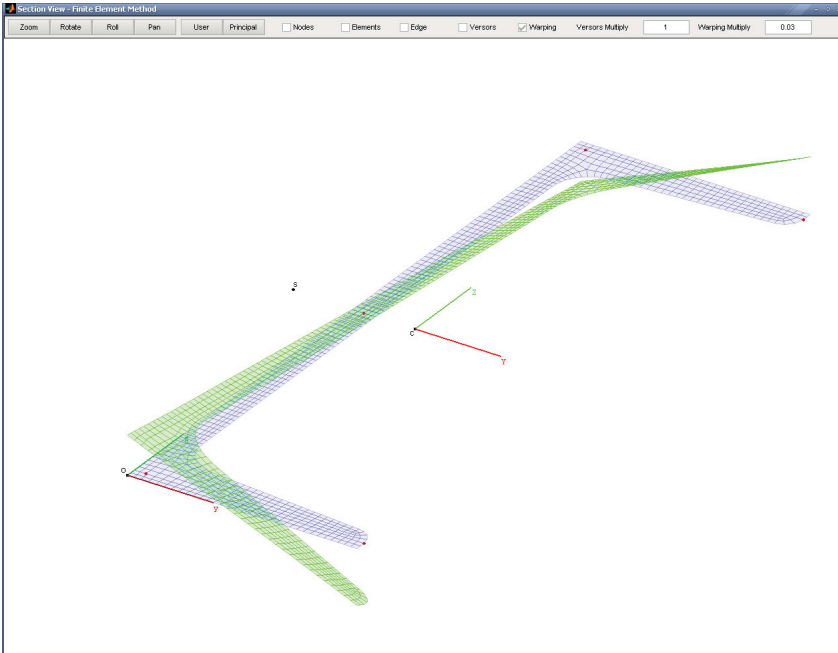
Vectors Multiply

- wartość mnożnika skali używanej przy rysowaniu normalnych zewnętrznej krawędzi,

Warping Multiply

- wartość mnożnika skali używanej przy rysowaniu funkcji spaczenia.

Na rys. C.2 pokazano przykładowe okno programu SecPropFEM ze szkicem przekroju cienkościennego i narysowaną funkcją spaczenia, oznaczoną kolorem zielonym.



Rys. C.2. Okno programu SecPropFEM z narysowaną funkcją spaczenia

D. Wyrażenia regularne i język programowania PERL

W tym dodatku podano podstawowe informacje, które są przeznaczone dla czytelnika nie zaznajomionego z problematyką budowy wyrażeń regularnych i językiem PERL. Wykorzystano treści zawarte w literaturze [21, 25, 29, 103, 104].

D.1. Wyrażenia regularne

Wyrażenia regularne (ang. *regular expressions*) są to wzorce, które opisują łańcuchy symboli. Teoria wyrażeń regularnych jest związana z teorią języków regularnych. Wyrażenia regularne mogą określać zbiór pasujących łańcuchów, mogą również wyszczególniać istotne części łańcucha.

Wyrażenia regularne w praktyce znalazły bardzo szerokie zastosowanie, pozwalają bowiem w łatwy sposób opisywać wzorce tekstu, natomiast istniejące algorytmy w efektywny sposób określają, czy podany ciąg znaków pasuje do wzorca lub wyszukują w tekście wystąpienia wzorca. Wyrażenia regularne w praktycznych zastosowaniach są zapisywane za pomocą bogatszej i łatwiejszej w użyciu składni niż ta stosowana w rozważaniach teoretycznych. Co więcej, opisane niżej powszechnie wykorzystywane wsteczne referencje (czyli użycie wcześniej dopasowanego fragmentu tekstu jako części wzorca), powodują, że wyrażenie regularne je zawierające może nie definiować języka regularnego.

Wyrażenia regularne stanowią integralną część narzędzi systemowych takich jak `sed`, `grep`, wielu edytorów tekstu, języków programowania przetwarzających tekst AWK i PERL. Są także dostępne jako odrębne biblioteki dla wszystkich języków używanych obecnie.

Definicja wyrażen regularnych zaczerpnięta z informatyki teoretycznej mówi, że wyrażeniem regularnym nad alfabetem Σ nazywamy ciąg znaków składający się z symboli \emptyset , ϵ , $+$, $*$, $()$, $()$ oraz symboli a_i z alfabetu Σ następującej postaci:

1. \emptyset , ϵ (słowo puste) są wyrażeniami regularnymi.
2. Wszystkie symbole $a_i \in \Sigma$ są wyrażeniami regularnymi.
3. Jeśli e_1 i e_2 są wyrażeniami regularnymi, to są nimi również:
 - e_1* – domknięcie Kleene'ego,
 - e_1e_2 – konkatenacja,
 - $e_1 + e_2$ – suma,
 - (e_1) – grupowanie.
4. Wszystkie wyrażenia regularne są postaci opisanej w punktach 1–3.

Własności wyrażen regularnych:

- $e + e = e$,
- $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$ – suma jest przemienna,
- $ee = ee = e$ – łańcuch pusty jest elementem neutralnym konkatenacji,
- $(e_1 + e_2) + e_3 = e_1 + (e_2 + e_3)$ – suma jest łączna,
- $(e_1e_2)e_3 = e_1(e_2e_3)$ – konkatenacja również jest łączna,
- $(e_1 + e_2)X = e_1X + e_2X$ – konkatenacja jest rozdzielna względem sumy,
- $X(e_1 + e_2) = Xe_1 + Xe_2$,
- $e * e = ee*$,
- $(e*) * = e*$ – domknięcie Kleene'ego jest idempotentne (właściwość operatora tzn. funkcji lub działania algebraicznego, która pozwala stosować go wielokrotnie bez zmiany wyniku),
- $*e * e * = e*$.

Przykłady:

- e_1* – dowolny ciąg składający się z e_1 , na przykład e_1e_1 , $e_1e_1e_1e_1$, a także pusty,
- e_1e_2 – sekwencja, najpierw e_1 , następnie e_2 ,

- $e_1 + e_2$ – alternatywa, albo e_1 , albo e_2 ,
- wyrażenie $(P+p)erl$ definiuje język zawierający dokładnie dwa słowa: „Perl” i „perl”. To samo można wyrazić wprost $Perl+perl$,
- wyrażenie $(a+b)*baba(a+b)*$, definiuje język wszystkich słów nad alfabetem $\{a, b\}$, które zawierają podślowo „baba”.

W praktyce stosowany jest inny sposób zapisu wyrażeń regularnych od teoretycznego. W tabeli D.1 podsumowano podstawowe różnice.

Tabela D.1: Różnice i części wspólne zapisu teoretycznego i praktycznego

Informatyka teoretyczna	Praktyka	Komentarz
\emptyset, ϵ	brak	zbioru pustego nie podaje się wprost
$(.)$	$\backslash(. \backslash)$	w niektórych implementacjach (np. PERL) symbole specjalne poprzedza się backslashem \backslash
$+$	$\backslash $	
$0+1+2+3+a+b+c+d$	$[0123abcd]$ lub krócej $[0-3a-d]$	zakres znaków
$a+b+\dots+z+A+B+\dots+Z$	$.$	dowolny znak z alfabetu (tutaj małe i duże litery, w praktyce cały zestaw znaków), w teoretycznym zapisie wymaga wyliczenia wszystkich znaków z alfabetu
$*$	$\backslash*$	0 lub więcej wystąpień
$e+\epsilon$	$e?$	wyrażenie e występuje 0 lub 1 raz
$ee+$	$e+$	wyrażenie e występuje 1 lub więcej razy

Informatyka teoretyczna	Praktyka	Komentarz
brak	\wedge	metaznak oznaczający początek łańcucha (lub początek wiersza, jeśli przetwarzane są wielowierszowe napisy)
brak	$\$$	metaznak oznaczający koniec łańcucha
<i>eeee</i>	$e\{4\}$	określona liczba powtórzeń (tutaj 4)
<i>eeee(e+?)(e+?)(e+?)</i>	$e\{4,7\}$	określony zakres liczby powtórzeń wyrażenia <i>e</i> (tutaj od 4 do 7)

Podstawowe elementy wyrażeń regularnych:

- każdy znak, oprócz znaków specjalnych, określa sam siebie, np. *a* określa łańcuch złożony ze znaku *a*,
- kolejne symbole oznaczają, że w łańcuchu muszą wystąpić dokładnie te symbole w dokładnie takiej samej kolejności, np. *ab* oznacza że łańcuch musi składać się z litery *a* poprzedzającej literę *b*,
- kropka *.* oznacza dowolny znak z wyjątkiem znaku nowego wiersza,
- znaki specjalne poprzedzone odwrotnym ukośnikiem ** powodują, że poprzedzanym znakom nie są nadawane żadne dodatkowe znaczenia i oznaczają same siebie, np. *\.* oznacza znak kropki (a nie dowolny znak),
- zestaw znaków między nawiasami kwadratowymi oznacza jeden dowolny znak objęty nawiasami kwadratowymi, np. *[abc]* oznacza *a*, *b* lub *c*, można używać także przedziałów: *[a-c]*, daszek \wedge na początku zestawu oznacza wszystkie znaki oprócz tych z zestawu,
- pomiędzy nawiasami okrągłymi (*()*) grupuje się symbole, do ich późniejszego wykorzystania,
- gwiazdka *** po symbolu, (nawiasie, pojedynczym znaku) nazywana jest

- domknięciem Kleene'a i oznacza zero lub więcej wystąpień poprzedzającego wyrażenia,
- znak zapytania ? po symbolu oznacza najwyżej jedno (być może zero) wystąpienie poprzedzającego wyrażenia,
 - plus + po symbolu oznacza co najmniej jedno wystąpienie poprzedzającego go wyrażenia,
 - daszek ^ oznacza początek wiersza, dolar \$ oznacza koniec wiersza,
 - pionowa kreska | to operator alternatywy np. jeśli napiszemy `a|b|c` oznacza to, że w danym wyrażeniu może wystąpić `a` lub `b` lub `c`,
 - znaki `<` i `>` oznaczające początek i koniec wyrazu, np. `<a` znajdzie wszystkie wyrazy zaczynające się na `a`, natomiast `et>` znajdzie wyrazy które kończą się na `et`.

Przykłady

- wyrażenie regularne, które opisuje kod pocztowy: `[0-9]{2}-[0-9]{3}`,
- wyrażenie regularne reprezentujące liczbę rzeczywistą składa się z następujących elementów: `[+-]?[0-9]+(\.[0-9]+)?`,
- wyrażenie opisujące adresy poczty elektronicznej:
`^[a-zA-Z0-9]+(\.[a-zA-Z0-9]+)*@[a-zA-Z0-9-]+\.[a-zA-Z0-9-]{1,}*\.[a-zA-Z]{2,}{1}$`.

D.2. Wybrane elementy języka PERL

PERL jest to interpretowany język programowania autorstwa *Larry'ego Walla* początkowo przeznaczony głównie do pracy z danymi tekstowymi, obecnie używany do wielu innych zastosowań. Wzorowany na takich językach jak C oraz skryptowe: `sed`, `AWK` i `sh`. Nazwa jest akronimem słów *Practical Extraction and Report Language*.

PERL został zaprojektowany jako praktyczne narzędzie do analizy plików tekstowych i tworzenia raportów. Jednym z naczelnych haseł jest „Można to zrobić na różne sposoby” (ang. *There is more than one way to do it* — TIMTOWTDI — wymawiane jak *Tim Toady*). Wszechstronność

języka pozwala na programowanie w różnych modelach: proceduralnym, funkcyjnym czy obiektowym.

PERL posiada większość cech języka interpretowanego, ale nie wykonuje ściśle każdego wiersza kodu źródłowego po kolei. Program jest najpierw kompilowany do kodu pośredniego (podobnie jak Java) i jednocześnie dokonywana jest jego optymalizacja. Możliwe jest skompilowanie programu do kodu pośredniego i używanie go zamiast postaci źródłowej, jednak nadal konieczny jest interpreter – program wykonujący.

Cechą specyficzną języka jest wykorzystywanie znaków przedrostkowych w różnych znaczeniach zależnie od kontekstu, np:

- `$a` – zmienna skalarna `a`,
- `@a` – zmienna tablicowa `a`,
- `$a[0]` – element 0 zmiennej tablicowej `a`, który to element jest skalarem,
- `$#a` – wartość ostatniego indeksu zmiennej tablicowej `a`,
- `@$a[0]` lub `@{$a[0]}` – dereferencja elementu 0 zmiennej tablicowej `a`, który to element jest skalarem będącym referencją do zmiennej tablicowej (wyrażenie zwraca listę),
- `@a[@b]` – lista złożona z elementów tablicy `a` o indeksach będącym elementami tablicy `b`,
- `%a` – tablica asocjacyjna lub hash `a`,
- `$a{key}` – wartość elementu o kluczu `key` należącego do `a`, który to element jest skalarem,
- `@a{@b}` – lista złożona z wartości znajdujących się w `a` o kluczach będących elementami tablicy `b` (wyrażenie zwraca listę),
- `@$a{$b[0]}` lub `@{$a{$b[0]}}` – dereferencja wartości należącej do `a` o kluczu równym wartości elementu zero tablicy `b`, która to wartość (elementu `a`) jest referencją do zmiennej tablicowej,
- `$a->{$b[0]}{$b[1]}` lub `$a->{$b[0]}->{$b[1]}` – dereferencja zmiennej skalarnej `a` będącej referencją do tablicy asocjacyjnej, z której pobrany jest element odpowiadający kluczowi równemu elementowi 0 tablicy `b`, następuje jego dereferencja i z powstałej tablicy asocjacyjnej pobrany jest element o kluczu równym elementowi 1 tablicy `b`.

W języku PERL wyróżniamy m.in. następujące zmienne predefiniowane:

- `$_` – jest to domyślny argument funkcji, w przypadku gdy jest ich więcej zapisują się w tablicy `@_`,
- `$` – numer linii w czytany pliku,
- `@ARGV` – globalna tablica z dodatkowymi parametrami, z którymi został uruchomiony skrypt.

Jak w większości języków programowania, tak i w PERLu można posługiwać się operatorami: przypisania (`=`), arytmetycznymi (`+`, `-`, `*`, `\`), logicznymi (`&&`, `||`, `!`) i porównania (`eq`, `ne`, `lt`, `gt`, `le`, `ge`, `cmp`, `==`, `!=`, `<`, `>`, `<=`, `>=`, `<=>`). Posiada szereg instrukcji sterujących: warunkową `if`, pętle: `for`, `foreach`, `while`, `do-until`. Pozwala też na definiowanie funkcji.

Ponadto PERL oferuje operatory wyrażeń regularnych:

- dopasowanie tekstu: `$Text =~ /expression_1/`; – znajduje łańcuch `expression_1`,
- podział tekstu na części: `@Table = split(/,/, $Text)`; – w tym przypadku, dzielenie przy przecinkach,
- szukanie i zmiana `$Text =~ s/expression_1/expression_2/`; – zamienia łańcuch `expression_1` na łańcuch `expression_2`.

Bibliografia

- [1] ABAQUS. *ABAQUS Version 6.5 Documentation*. ABAQUS, Inc, 2004.
- [2] S.Y. Back, K.M. Will. A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(7), s. 1173–1191, 1998.
- [3] A. Baigent, G.J. Hancock. Structural analysis of assemblages of thin-walled members. *Engineering Structures*, 4(3), s. 207–216, 1982.
- [4] C. Basaglia, D. Camotim, N. Silvestre. Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. *Thin-Walled Structures*, 46(1), s. 79–101, 2008.
- [5] J.L. Batoz, G. Dhat. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(8), s. 1262–1267, 1979.
- [6] J. Bielski, M. Radwańska. Computational problems of FE-analysis of elastic-plastic surface structures. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8, 1, s. 17–42, 2001.
- [7] W.N. Biełokurow, M.N. Zaks. Badanie deformacji pręta cienkościennego wywołanych deplanacją węzła. *Stroitielnaja Mechanika*, 6, 1970 (rosyjski).
- [8] A. Borkowski, C. Cichoń, M. Radwańska, A. Sawczuk, Z. Waszczyszyn. *Mechanika budowli. Ujęcia komputerowe. Tom 3*. Arkady, Warszawa, 1995.
- [9] R.S. Borsum, R.H. Galager. Finite element analysis of torsional and torsional–flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(3), s. 335–352, 1970.
- [10] D.W. Byczkow. *Mechanika cienkościennych konstrukcji prętowych*. Gosstrojizdat, Moskwa, 1962 (rosyjski).
- [11] K.S. Chavan, P. Wriggers. Consistent coupling of beam and shell models for thermo-elastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(14), s. 1861–1876, 2004.
- [12] S.M. Chou, J. Rhodes. Review and compilation of experimental results on thin-walled structures. *Computers and Structures*, 65(1), s. 47–67, 1997.

- [13] C. Cichoń, S. Koczubiej. Przestrzenny element węzłowy ramy o prętach cienkościennych. *Problemy naukowo-badawcze budownictwa, Tom III-Konstrukcje budowlane i inżynierskie*, s. 455–462, 2007.
- [14] C. Cichoń, S. Koczubiej. Konsystentny model MES dla ram przestrzennych o prętach cienkościennych. *Czasopismo Techniczne, 21, Budownictwo 1-B/2008*, s. 3–20, 2008.
- [15] C. Cichoń, P. Pluciński. Analiza statyki i wybożenia ram cienkościennych o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym z mieszanym 1D/3D sformułowaniem metody elementów skończonych. *IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Materiały Konferencyjne*, s. 29–36, Zakopane, 2000.
- [16] C. Cichoń, P. Pluciński, S. Waszczuk. Buckling of thin-walled frames with partial warping restrains. *Archive of Civil Engineering, XLVI(2)*, s. 244–254, 2000.
- [17] A. Coci, M. Gattas. Natural approach for geometric non-linear analysis of thin walled frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30(2)*, s. 2007–2031, 1990.
- [18] M.A. Criesfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [19] K.S. Cywilin. Macierzowa metoda analizy ram prostokątnych wykonanych z prętów cienkościennych. *Prakladnaja mechanika, 4*, 1969 (rosyjski).
- [20] Z. Cywiński. Metoda iteracyjna Crossa w zastosowaniu do rozwiązywania skręcanych, płaskich, cienkościennych układów ramowych o przekrojach otwartych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, 32, Budownictwo Lądowe 5*, 1962.
- [21] B. d Foy. *Perl. Mistrzostwo w programowaniu*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2008.
- [22] R. de Borst. *Computational Methodism Non-linear Solid Mechanics*. Delft University of Technology, Delft, 1999.
- [23] A. Eriksson. On a thin shell element for non-linear analysis, based on the isoparametric concept. *Computers and Structures, 42(6)*, s. 927–939, 1992.
- [24] J.D. Faires, R.L. Burden. *Numerical Methods*. PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.
- [25] J.E.F. Friedl. *Wyrażenia regularne*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2001.
- [26] A.S. Gendy, A.F. Saleeb, T.Y. Chang. Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis. *Computers and Structures, 42(4)*, s. 531–550, 1992.

- [27] J.E. Goldberg. Torsion of I-type and H-type beam. *American Society of Civil Engineers*, 78, 1952.
- [28] B.N. Gorbunow, A.I. Strielbicka. *Teoria ram wykonanych z pretów cienkościennych*. Ogiz, Moskwa, 1948 (rosyjski).
- [29] J. Goyvaerts, S. Levithan. *Wyrażenia regularne. Receptury*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2010.
- [30] F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer. Zur Berechnung von Woblfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der finiten Elemente. *Bauingenieur*, 73(3), s. 138–134, 1998 (niemiecki).
- [31] A. Grzędzielski, J. Nowiński. Środek sił poprzecznych i środek skręcania przekrojów belek cienkościennych, osadzonych swobodnie. *Techniki Lotnicze*, 1/1939, 1952.
- [32] R.W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Prentice–Hall, Inc., Quantum Publishers, Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [33] Y. Hu, X. Jin, B. Chen. A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections. *Computers and Structures*, 61(5), s. 890–908, 1996.
- [34] T.J.R. Hughes, F. Brezzi. On drilling degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(1), s. 105–121, 1989.
- [35] N. Jankowska. *Wpływ odkształcalności węzłów na rozkład sił przekrojowych w ramach cienkościennych*. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 2006.
- [36] J. Jonsson. Distortion theory of thin-walled beams. *Thin-walled Structures*, 33(4), s. 269–303, 1999.
- [37] L.M. Kaczanow. *Podstawy teorii plastyczności*. Wydawnictwo Nauka, Moskwa, 1969.
- [38] S.N. Kan, L.G. Panowko. *Elementy mechaniki konstrukcji cienkościennych*. Oborongiz, 1952 (rosyjski).
- [39] N.I. Karakin. *Podstawy analizy konstrukcji cienkościennych*. Moskwa, 1962 (rosyjski).
- [40] M.Y. Kim, S.P. Chang, S.B. Kim. Spatial stability analysis of thin-walled space frames. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 39(3), s. 499–525, 1996.
- [41] N.L. Kim, M.Y. Kim. Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering shear deformation effects. *Thin-walled Structures*, 43(5), s. 701–734, 2005.
- [42] N.L. Kim, B.J. Lee, M.Y. Kim. Exact element static stiffness matrices of

- shear deformable thin-walled beam-columns. *Thin-walled Structures*, 42(9), s. 1231–1256, 2004.
- [43] S. Koczubiej. Modelowanie skończenie elementowe rzeczywistych warunków brzegowych w ramach cienkościennych. *Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, 1799, Budownictwo*, 113, s. 115–124, 2008.
- [44] S. Koczubiej, C. Cichoń. Konsystentne połączenie modeli 1D i 3D w analizie MES wyboczenia ram o prętach cienkościennych. *XII Symposium Stateczności Konstrukcji*, Materiały Konferencyjne, s. 183–190, Łódź-Zakopane, 2009. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej.
- [45] S. Koczubiej, C. Cichoń. Shell-beam model of thin-walled space structures for geometrically nonlinear analysis. *19 th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Materiały Konferencyjne, Warszawa, 2011. W opracowaniu.
- [46] D. Krajcinovic. Matrix force analysis of thin-walled structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1, 1970.
- [47] I. Kreja, T. Mikulski, C. Szymczak. Application of superelements in static analysis of thin-walled structures. *Journal of Civil Engineering and Management*, X(2), s. 113–122, 2004.
- [48] S. Krenk, L. Damkilde. Warping of joints in I-beam assemblages. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(11), s. 2457–2474, 1991.
- [49] M. Kujawa. *Statyka i analiza wrażliwości rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych. Analiza teoretyczna i badania doświadczalne*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2009.
- [50] H.G. Kwak, D.Y. Kim, H.W. Lee. Effect of warping in geometric nonlinear analysis of spatial beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 57(7), s. 729–751, 2001.
- [51] J. Liberty. *Księga eksperta C++*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 1999.
- [52] K. Loudon. *Algorytmy w C*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2003.
- [53] R.Ł. Małkina. *Analiza cienkościennych belek i ram metodą kolejnych przybliżeń*. Moskwa, 1955 (rosyjski).
- [54] MATLAB. *MATLAB R2006b Help*. The MathWorks, Inc, 2006.
- [55] J.L. Meek, P. Swannell. Stiffness matrices for beam members including warping torsion effects. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(1), s. 193–197, 1976.
- [56] B. Michalak. Analiza statyczna rusztów złożonych z elementów cienkościennych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej*, 182(12), 1973.

- [57] T. Mikulski. *Ramy cienkościenne. Modelowanie i analiza wrażliwości*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2010.
- [58] Z.A. Mohammed, E.W. Frank. Torsional constant for matrix analysis of structures including warping effect. *International Journal of Solids and Structures*, 33(3), s. 361–374, 1996.
- [59] P.J.B. Morell. The influence of joint detail on torsion behavior of thin-walled structures having an axial discontinuity. *Thin-Walled Structures*, Proc. Int. Conf., University of Strathclyde, 1979.
- [60] J. Naleszkiewicz. *Zagadnienia stateczności sprężystej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.
- [61] H.J. Neu. Zur berechnung von rechteckramen aus offenen, dünnwandigen profiltragern bei biegung und verwindung. *Automobil-Industrie*, 1, 1969.
- [62] P. Petersen, S. Krenk, L. Damkilde. Stability of thin-walled frames. Lyngby, 1991.
- [63] S. Piechnik. *Pręty cienkościenne otwarte*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2000.
- [64] S. Piechnik. *Mechanika techniczna ciała stałego*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2007.
- [65] J.S. Przemieniecki. *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1985.
- [66] M. Radwańska. *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2009.
- [67] M. Radwańska, A. Urbański, Z. Waszczyszyn. Faced and curved shell finite elements with 6 dof per node. *XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*, Materiały Konferencyjne, s. 92–100, Kielce–Cedzyna, 1993.
- [68] K.J.R. Rasmussen. Bifurcation of locally buckled point symmetric columns—Analytical developments. *Thin-Walled Structures*, 44(11), s. 1161–1174, 2006.
- [69] J.N. Reddy. *Applied Functional Anaysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw–Hill Book Company, New York, 1986.
- [70] R.J. Reill. Stiffness analysis of grid including warping. *ASCE Journal of the Structural Division*, 98(7), s. 1511–1523, 1972.
- [71] J.R. Riddington, F.A. Ali, H.A. Hamid. Influence of joint detail nt the flexural/torsional interaction of thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, 24, s. 97–111, 1996.

- [72] J. Rutecki. *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1957.
- [73] A.F. Saleeb, T.Y.P. Chang, A.S. Gendy. Effective modelling of spatial buckling of beam assemblages accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(2), s. 469–502, 1992.
- [74] P.W. Sharman. Analysis of structures with thin-walled open sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, 27(10), s. 665–677, 1985.
- [75] J. Sieczkowski, L. Łopieński. *Przykłady obliczeń belek i ram metodą Crossa*. Arkady, Warszawa, 1965.
- [76] L.N. Stawarki. Analiza wytrzymałości dźwigarów przestrzennych wykonanych z prętów cienkościennych o symetrycznym przekroju otwartym. Moskwa, 1951 (rosyjski).
- [77] J.K. Szmidt. Analiza ram z elementów cienkościennych. *Rozprawy inżynierskie*, 23(3), s. 447–472, 1975.
- [78] J.K. Szmidt. O równowadze sił momentowych w narożu cienkościennej ramy. *Rozprawy inżynierskie*, 23(2), s. 317–324, 1975.
- [79] C. Szymczak. Wyboczenie skrętne prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju otwartym. *Rozprawy inżynierskie*, 26, s. 323–330, 1978.
- [80] C. Szymczak, I. Kreja. Analiza wrażliwości dwuteowego pręta cienkościennego ze względu na zmiany parametrów przewiązek. *Inżynieria i Budownictwo*, 59(1), s. 41–43, 2003.
- [81] C. Szymczak, I. Kreja, T. Mikulski, M. Kujawa. *Sensitivity analysis of beams and frames made of thin-walled members*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2003.
- [82] C. Szymczak, M. Kujawa. Analiza statyczna rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych. *VIII Konferencja Naukowa Połączenia i węzły w konstrukcjach metalowych*, Materiały Konferencyjne, s. 391–398, Olsztyn–Łańsk, 2003.
- [83] C. Szymczak, T. Mikulski. Modelowanie węzłów ram zbudowanych z prętów cienkościennych. *VIII Konferencja Naukowa Połączenia i węzły w konstrukcjach metalowych*, Materiały Konferencyjne, s. 399–408, Olsztyn–Łańsk, 2003.
- [84] G.S. Tong, Y.L. Zang. Warping and bimoment transmission through diagonally stiffened beam-to-column joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 61(6), s. 749–763, 2005.

- [85] A.A. Umański. Skręcanie i zginanie konstrukcji cienkościennych. Moskwa, 1939 (rosyjski).
- [86] I.W. Urban. *Teoria belkowych konstrukcji cienkościennych*. Transizdat, Moskwa, 1955 (rosyjski).
- [87] P. Vacharajittiphan, N.S. Trahair. Warping and distortion of I-section joints. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 100(3), s. 547–564, 1974.
- [88] H. Wagner. Verdrehung und Knickung von offen Profillen, 1929.
- [89] W. Wagner, F. Gruttmann. Modeling of shell-beam transitions in the presence of finite rotations. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 9(3), s. 405–418, 2002.
- [90] W. Wagner, F. Gruttmann. Ein einheitliches Modell zur Berechnung der Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion in beliebigen Querschnitten prismatischer Stäbe. *Technische Mechanik*, 23(2–4), s. 251–264, 2003 (niemiecki).
- [91] W. Wagner, S. Klinkel, F. Gruttmann. Elastic and plastic analysis of thin-walled structures using improved hexahedral elements. *International Journal of Plasticity*, 80(9–10), s. 857–869, 2002.
- [92] P. Waldron. Elastic analysis of curved thin-walled girders including the effect of warping restraint. *Engineering Structures*, 7(2), s. 93–104, 1985.
- [93] P. Waldron. Stiffness analysis of thin-walled girders. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 112(6), s. 1366–1384, 1986.
- [94] W.Z. Własow. Nowa metoda obliczania belek przyrmatycznych wykonanych z profili cienkościennych. Moskwa, 1936 (rosyjski).
- [95] W.Z. Własow. *Sprężyste pręty cienkościenne*. Gosizdatfizmatlit, Moskwa, 1959 (rosyjski).
- [96] W.Z. Własow. *The Walled Elastic Beams. 2nd Edition*. Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 2000.
- [97] Z. Waszczyszyn, C. Cichoń, M. Radwańska. *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Arkady, Warszawa, 1990.
- [98] Z. Waszczyszyn, C. Cichoń, M. Radwańska. *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [99] S. Weiss, K. Gergovich. *Podstawy mechaniki pręta cienkościennego*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1973.
- [100] P. Wróblewski. *Algorytmy, struktury danych i techniki programowania*. Wydawnictwo HELION, Gliwice, 2003.
- [101] Y.B. Yang, W. McGuire. A procedure for analysing space frames with

-
- partial warping restraint. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(8), s. 1377–1398, 1984.
- [102] H. Yuren, C. Bozhen. A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections. *Computers and Structures*, 61(5), s. 897–908, 1996.
- [103] PERL. <http://pl.wikipedia.org/wiki/Perl>, [dostęp: 10.11.2010].
- [104] PERL. <http://pl.wikibooks.org/wiki/Perl>, [dostęp: 12.10.2010].

Spis rysunków

1.1.	Węzły umożliwiające stosowanie teorii pręta cienkościennego	19
1.2.	Koncepcje dyskretyzacji skończenie elementowej 1D/3D	21
1.3.	Obliczanie przestrzennego elementu węzłowego	22
2.1.	Trzy stany równowagi ciała	30
3.1.	Hipoteza kinematyczna Reissnera–Mindlina	38
3.2.	Parametry przemieszczeniowe przekroju poprzecznego otwartego . . .	45
4.1.	Powłokowy element skończony	59
4.2.	Przykład 1. Skrzynka ściskana równomiernie	63
4.3.	Przykład 1. Wyboczenie skrzynki	63
4.4.	Belkowy cienkościenny element skończony	64
4.5.	Element skończony prętowy	65
4.6.	Plik tekstowy ze zdefiniowanymi równaniami geometrycznymi	69
4.7.	Plik tekstowy z obliczonymi przyrostami równań geometrycznych . . .	70
4.8.	Plik tekstowy z obliczonymi liniowymi przyrostami równań geometrycznych	73
4.9.	Plik tekstowy z obliczonymi kwadratowymi przyrostami równań geometrycznych	73
4.10.	Plik tekstowy z obliczonym wyrażeniem podcałkowym na macierz sztywności przyrostowej	74
4.11.	Plik tekstowy z obliczonym wyrażeniem podcałkowym na macierz sztywności przyrostowej po wycałkowaniu po przekroju poprzecznym	75
4.12.	Przykładowe, końcowe wzory na elementy macierzy sztywności przyrostowej	78
4.13.	Przykład 2. Rama portalowa	79
4.14.	Przejściowy element skończony	80
5.1.	Przestrzenny element węzłowy	86

6.1. Metoda Newtona–Raphsona	92
7.1. Graf	98
7.2. Schemat blokowy algorytmu szukania dendrytu	100
7.3. Lokalny układ współrzędnych	101
7.4. Przekrój poprzeczny profilu cienkościennego	103
8.1. Przykład 3. Rama trójprętowa	107
8.2. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia rygla 1	108
8.3. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia rygla 2	108
8.4. Przykład 3. Wykres kąta skręcenia słupa	109
8.5. Przykład 4. Rama dwuprętowa	111
8.6. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 1	112
8.7. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 2	112
8.8. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 3	113
8.9. Przykład 4. Deformacja ramy dwuprętowej, węzeł 4	113
8.10. Przykład 5. Rama dwuprętowa	116
8.11. Przykład 5. Deformacja ramy dwuprętowej	117
8.12. Przykład 6. Wspornik o przekroju ceowym	119
8.13. Przykład 6. Wykres bimomentu i momentu giętno-skrętnego	120
8.14. Przykład 6. Deformacja wspornika o przekroju ceowym	121
8.15. Przykład 7. Rama trójprętowa, model z dodatkowymi przestrzennymi elementami podporowymi	122
8.16. Przykład 7. Wykresy momentów skrecających	124
8.17. Przykład 7. Wykresy bimomentów	125
8.18. Przykład 8. Rama dwuprętowa	126
8.19. Przykład 8. Pierwsza forma utraty stateczności, węzeł 1	127
8.20. Przykład 8. Pierwsza forma utraty stateczności, węzeł 2	128
8.21. Przykład 9. Rama trójprętowa	129
8.22. Przykład 9. Pierwsza forma utraty stateczności	130
8.23. Przykład 10. Wspornik o przekroju ceowym	131
8.24. Przykład 10. Ugięcie u_z w węźle w_1	132
8.25. Przykład 10. Obrót φ_x w węźle w_1	133
8.26. Przykład 11. Rama portalowa	134
8.27. Przykład 11. Przemieszczenie u_x w węźle w_1	135
8.28. Przykład 11. Przemieszczenie u_z w węźle w_1	135
8.29. Przykład 11. Przemieszczenie u_x w węźle w_2	136

8.30. Przykład 11. Przemieszczenie u_z w węźle w_2	136
A.1. Okno programu AmFEM	144
A.2. Podsumowanie zadania w oknie Command Window systemu MATLAB	152
A.3. Okno programu AmFEM z narysowanym odkształconym modelem	153
A.4. Okno programu AmFEM z wykreśloną ścieżką stanów równowagi	154
A.5. Okno programu AmFEM z narysowaną formą wyboczenia	155
B.1. Okno programu SecPropGRAPH	165
C.1. Okno programu SecPropFEM	183
C.2. Okno programu SecPropFEM z narysowaną funkcją spaczenia	184

Spis tabel

8.1.	Przykład 4. Niezerowe siły przekrojowe w węzłach	114
8.2.	Przykład 5. Niezerowe siły przekrojowe w węzłach	117
8.3.	Współczynnik przekazu bimomentu ζ dla różnie skonstruowanych węzłów	118
8.4.	Przykład 8. Dwie najmniejsze wartości krytyczne mnożnika obciążenia	128
8.5.	Przykład 9. Trzy najmniejsze wartości krytyczne mnożnika obciążenia	130
D.1	Różnice i części wspólne zapisu teoretycznego i praktycznego	187

Model powłokowo-belkowy MES w analizie statycznej i stateczności konstrukcji o prętach cienkościennych otwartych

W pracy sformułowano modele matematyczne do analizy statycznej i stateczności sprężystych konstrukcji przestrzennych o prętach cienkościennych otwartych. W konstrukcji wyróżniono części (węzły ramy, podpory, miejsca przyłożenia obciążenia, miejsca z dodatkowymi wzmocnieniami konstrukcyjnymi), które traktowano jako obiekty geometrycznie trójwymiarowe 3D (powłokowe) i pozostałe części uważane za geometrycznie liniowe 1D (belkowe). Rozwiązania numeryczne otrzymano stosując metodę elementów skończonych (MES) w całkowitym opisie Lagrange'a. Przy formułowaniu macierzy dla elementów skończonych skorzystano z teorii płyt Reisnera–Mindlina i teorii prętów cienkościennych Własowa. Równania przyrostowe równowagi MES rozwiązywano metodą Newtona–Raphsona, sterując parametrem obciążenia lub wybranym przemieszczeniem.

Opracowano dwie metody analizy. W metodzie pierwszej, równania ciągłości przemieszczeń między częściami 3D i 1D konstrukcji traktowano jako równania więzów i włączono do równań równowagi MES poprzez odpowiednio zdefiniowaną funkcję kary. W konsekwencji wymagało to opracowania tzw. *elementów przejściowych*, pomiędzy węzłami powłoki a węzłem cienkościennego elementu skończonego. Jest to metoda ogólna, możliwa do zastosowania przy rozwiązaniu zarówno zagadnień liniowych jak i nieliniowych. W pracy metodę tą zastosowano do analizy stateczności konstrukcji cienkościennych.

W drugiej metodzie, obszary 3D konstrukcji, zdyskretyzowane elementami skończonymi powłokowymi, kondensowano do tzw. *przestrzennych elementów węzłowych*, z translacyjnymi stopniami swobody na ściankach, łączących te elementy z przylegającymi do nich prętami cienkościennymi. W końcu, stopnie swobody przestrzennych elementów węzłowych transformowano do cienkościennych belkowych stopni swobody. Taki model dyskretyzacji MES okazał się być szczególnie efektywny w analizie liniowej ram o różnych, złożonych przekrojach cienkościennych.

Opisane modele zostały zaimplementowane w autorskim programie komputerowym AmFEM, działającym w systemie obliczeniowym MATLAB. Dodatkowo opracowano programy SecPropGRAPH i SecPropFEM, pomocne do obliczania charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego elementu cienkościennego, niedostępnych w literaturze. Szczególnie dużo uwagi poświęcono opracowaniu procedur do obliczania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych dla elementu cienkościennego, które w ramach przyjętych założeń obliczano dokładnie. W tym celu skorzystano z obliczeń symbolicznych (oferowanych przez system MATLAB) i języka programowania PERL, wspierającego operacje z wykorzystaniem wyrażeń regularnych.

Wykonano liczne przykłady, ilustrujące ważniejsze cechy opracowanych modeli analizy i wskazujące na efektywność proponowanych rozwiązań. Zdaniem autora, metody te mogą być szczególnie przydatne w analizach, liniowej i geometrycznie nieliniowej, przestrzennych konstrukcji cienkościennych o dowolnie złożonych przekrojach poprzecznych otwartych.

Shell-Beam FE Model in Static and Stability Analysis of Thin-Walled Structures with Open Cross-Section

Mathematical models for the static and stability analysis of elastic spatial thin-walled structures with open cross-section were formulated in the doctoral thesis. In the structure, parts treated as 3D (shell) geometric objects (frame joints, supports, sites where loads are applied, sites with additional bracing) and the remaining ones, considered as 1D (beam) geometrically linear objects, were specified. Numerical solutions were obtained using Finite Element Method (FEM) with the Total Lagrangian Approach. While computing matrices for finite elements, Reissner–Mindlin plate theory and Vlasov thin-walled beam theory were employed. FEM equilibrium governing equations were solved with the Newton–Raphson method, controlling the load parameter or a selected displacement.

Two analysis methods were developed. In the first method, the equations accounting for the continuity of displacements between the 3D and 1D structure parts, were treated as constraints equations and included in FEM equilibrium equations due to the properly defined penalty function. As a result, it was necessary to include the so-called *transition elements* between the shell nodes and beam nodes. The method is general and can be applied to solving both linear and non-linear problems. In the study, the method was used to analyse the stability of thin-walled structures.

In the other method, 3D parts of the structure were discretized with the shell finite elements and condensed to the so-called *space joint elements*

with translational degrees of freedom on the walls, which connected those elements to the adjacent thin-walled beams. Finally, the degrees of freedom of space joint elements were transformed to thin-walled beam degrees of freedom. Such a FEM discretization model proved to be particularly effective for the linear analysis of frames with different, complex cross-sections.

The models described above were implemented into the AmFEM computer program, developed by the author, which was running under MATLAB computing software. Additionally, SecPropGRAPH and SecPropFEM programs were written that facilitated computing the geometric characteristics of the thin-walled element cross-section, which were not available in the literature on the subject. A lot of attention was given to devising procedures for the calculations of tangent matrices and internal forces vector for the thin-walled element, which in accordance with the assumptions adopted, were computed accurately. Symbolic calculations (provided by MATLAB software) and PERL programming language, supporting operations that employ regular expressions, were used.

Many examples were performed to illustrate major features of the proposed analysis methods and to indicate the effectiveness of the solutions put forward. In the author's opinion, the methods can help with linear and geometrically non-linear analyses of spatial thin-walled structures with arbitrarily complex open cross-sections.