

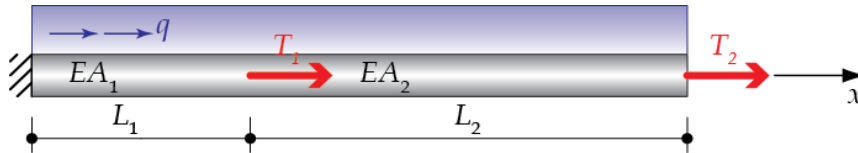
Elementy projektowania inżynierskiego

Rozwiązanie problemu pręta rozciąganego metoda MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy

ORIGIN \equiv 1

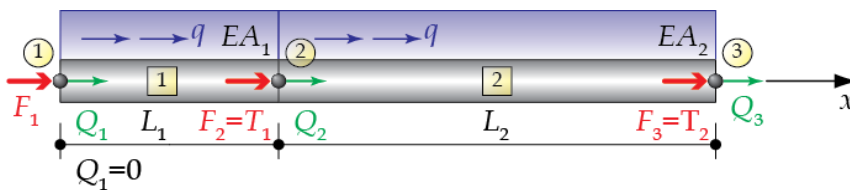
Pręt rozciągany



Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

$$\begin{aligned}
 L1 &:= 0.4 & A1 &:= 0.5 \cdot 10^{-3} \\
 L2 &:= 0.8 & A2 &:= 0.4 \cdot 10^{-3} \\
 q &:= 10 \cdot 10^3 & T1 &:= 40 \cdot 10^3 & T2 &:= 5 \cdot 10^3 \\
 E &:= 200 \cdot 10^9
 \end{aligned}$$

Dyskretyzacja pręta



Definicja macierzy sztywności i wektora równoważników węzłowych obciążenia

$$K_e(EA, L) := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{pmatrix} \qquad P_e(q, L) := \begin{pmatrix} \frac{q \cdot L}{2} \\ \frac{q \cdot L}{2} \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$$\begin{aligned}
 \underline{ln} &:= 3 & \underline{lw} &:= 2 & \underline{lq} &:= 1
 \end{aligned}$$

Budowa macierzy Boole'a

$$i := 1 .. \underline{lw} \cdot \underline{lq} \qquad j := 1 .. \underline{ln} \cdot \underline{lq}$$

$$B1_{i,j} := 0$$

$$B1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B2_{i,j} := 0$$

$$B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B1_{1,1} := 1 \quad B1_{2,2} := 1 \quad B1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B2_{1,2} := 1 \quad B2_{2,3} := 1 \quad B2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obliczenie macierzy sztywności

$$K1 := Ke(E \cdot A1, L1)$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^8 & -2.5 \times 10^8 \\ -2.5 \times 10^8 & 2.5 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$K2 := Ke(E \cdot A2, L2)$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 1 \times 10^8 & -1 \times 10^8 \\ -1 \times 10^8 & 1 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$$P1 := Pe(q, L1)$$

$$P1 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$P2 := Pe(q, L2)$$

$$P2 = \begin{pmatrix} 4 \times 10^3 \\ 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := B1^T \cdot K1 \cdot B1 + B2^T \cdot K2 \cdot B2$$

$$K = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^8 & -2.5 \times 10^8 & 0 \\ -2.5 \times 10^8 & 3.5 \times 10^8 & -1 \times 10^8 \\ 0 & -1 \times 10^8 & 1 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$$P := B1^T \cdot P1 + B2^T \cdot P2$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Budowa wektora sił węzłowych

$$F_j := 0$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 := T1$$

$$F_3 := T2$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \times 10^4 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$K_w := K$$

$$F_w := F$$

$$P_w := P$$

Na stopniu swobody o numerze 1

$$K_{w,j,j} := 0$$

$$K_{w,j,1} := 0$$

$$K_{w,1,1} := 1$$

$$F_{w,1} := 0$$

$$P_{w,j} := 0$$

$$K_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 \times 10^8 & -1 \times 10^8 \\ 0 & -1 \times 10^8 & 1 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$F_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \times 10^4 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$P_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := K_w^{-1} \cdot (P_w + F_w)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2 \times 10^{-4} \\ 3.1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$R := K \cdot Q - P$$

$$R = \begin{pmatrix} -57 \times 10^3 \\ 40 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q_1 := B_1 \cdot Q$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 := B_2 \cdot Q$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2.2 \times 10^{-4} \\ 3.1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Definicja wektora funkcji kształtu

$$N_1(x, L) := 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x, L) := \frac{x}{L}$$

$$N(x, L) := (N_1(x, L) \quad N_2(x, L))$$

Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

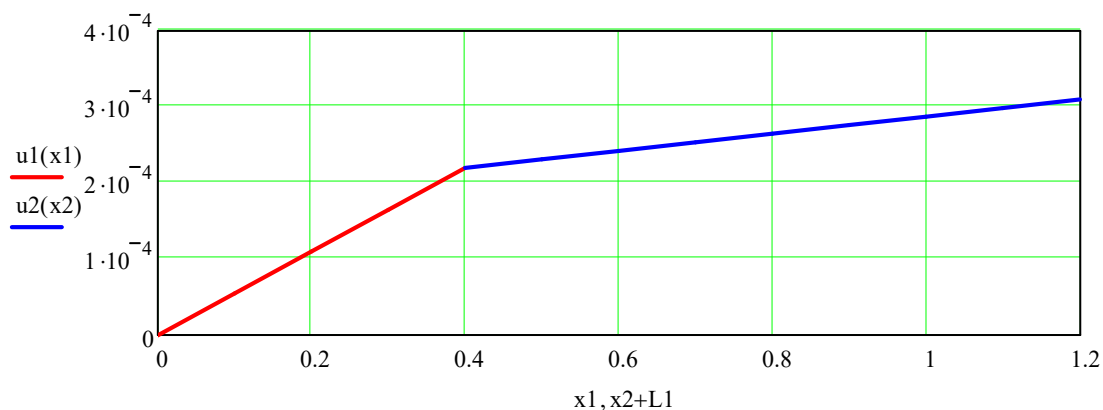
$$u_1(x) := N(x, L_1) \cdot Q_1$$

$$u_2(x) := N(x, L_2) \cdot Q_2$$

Wykres przemieszczenia

$$x1 := 0,0 + 0,1.. L1$$

$$x2 := 0,0 + 0,1.. L2$$

**Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach**

$$F1 := K1 \cdot Q1 - P1$$

$$F1 = \begin{pmatrix} -57 \times 10^3 \\ 53 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$F2 := K2 \cdot Q2 - P2$$

$$F2 = \begin{pmatrix} -13 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Obliczenie siły normalnej

$$V1(x) := E \cdot A1 \cdot \left(\frac{d}{dx} u1(x) \right)$$

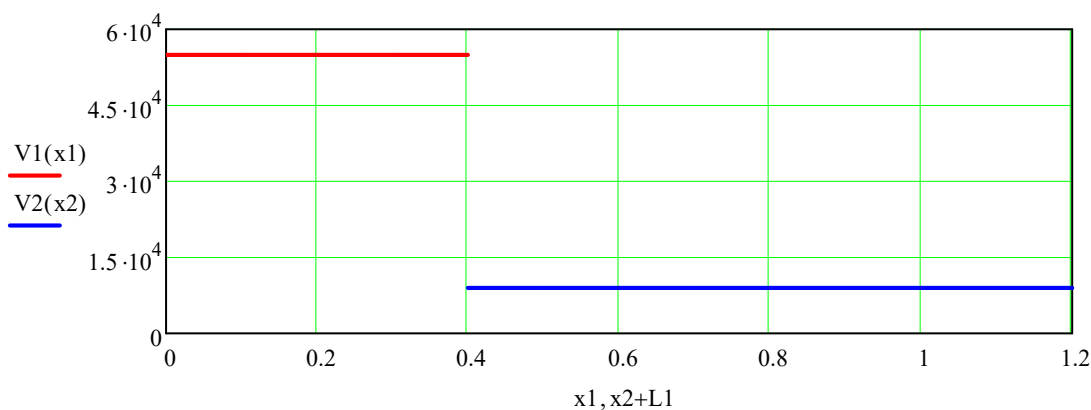
$$V2(x) := E \cdot A2 \cdot \left(\frac{d}{dx} u2(x) \right)$$

$$V1(0) = 55 \times 10^3$$

$$V2(0) = 9 \times 10^3$$

$$V1(L1) = 55 \times 10^3$$

$$V2(L2) = 9 \times 10^3$$



Porównaj wartości sił przekrojowych w węzłach elementów, obliczonych z wykorzystaniem:

- równań równowagi elementów,
- zrózniczkowanych funkcji kształtu.

Jak można poprawić wyniki?

Obliczenie naprężeń normalnych

$$\sigma_1(x) := \frac{V_1(x)}{A_1}$$

$$\sigma_2(x) := \frac{V_2(x)}{A_2}$$

$$\sigma_1(0) = 110 \times 10^6$$

$$\sigma_2(0) = 22.5 \times 10^6$$

$$\sigma_1(L_1) = 110 \times 10^6$$

$$\sigma_2(L_2) = 22.5 \times 10^6$$

