

Przykład analizy wytrzymałościowej łopatki wirnika z użyciem metody elementów skończonych w systemie Mathcad

Część I

Opracował: dr inż. Paweł Stąpór

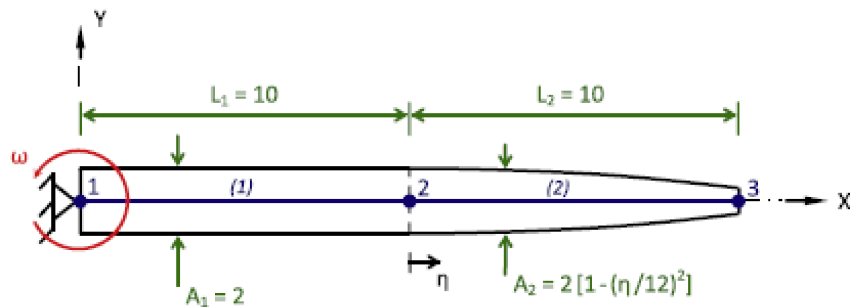
Sformułowanie problemu

Wyznaczyć naprężenia od siły odśrodkowej w łopatce wirnika o zmiennej geometrii dla dwóch przypadków konstrukcyjnych:

a) zewnętrzny koniec łopatki wirnika jest wolny

b) zewnętrzny koniec łopatki wirnika jest zamocowany do sztywnego pierścienia

Łopatka wirnika przymocowana jest do piasty obracającej się ze stałą kątową prędkością $\omega = 10$. Moduł Younga i gęstość materiału z którego wykonana jest łopatka wynosi odpowiednio $E=110e9$ i $\rho=4400$. Wymiary podane są na rysunku 1.



Rysunek 1: Łopatka wirnika (źródło: Payen, D., J., Bathe, K., J., A stress improvement procedure, *Computers and Structures*, strony 311-326, 2012.)

Rozwiązanie zadania metodą elementów skończonych

1. Definicja parametrów fizycznych i geometrycznych zadania

Ustalenie indeksowania elementów macierzy i wektorów: $\text{ORIGIN} := 1$

Całkowita długość łopatki wirnika: $L := 20$

Współrzędna określająca miejsce zmiany geometrii łopatki: $\xi := 10$

Prędkość kątowa obracającej się łopatki: $\omega := 10$

Funkcja definiująca gęstość materiału: $\rho(x) := 4400$

Funkcja definiująca moduł Younga materiału: $E(x) := 110 \cdot 10^9$

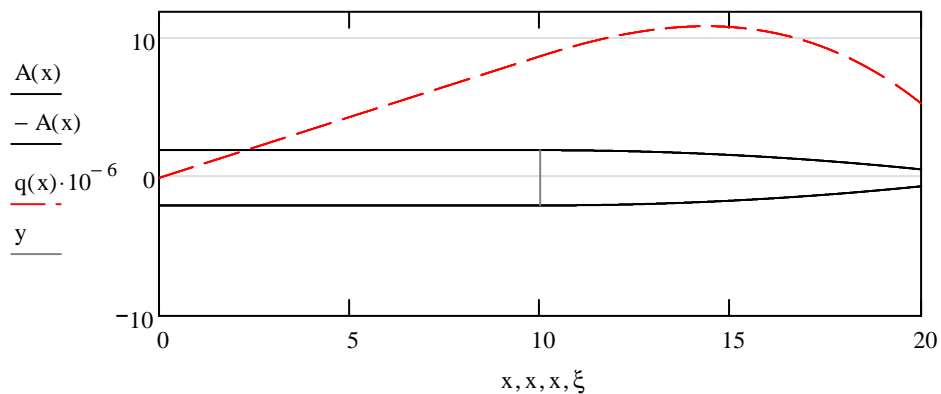
Funkcja definiująca pole przekroju łopatki: $A(x) := \text{if} \left[x < \xi, 2, 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x - \xi}{12} \right)^2 \right] \right]$

Funkcja definiująca intensywność siły odśrodkowej: $q(x) := A(x) \rho(x) \cdot \omega^2 \cdot x$

2. Wykres obciążenia ciągłego

Definicja współrzędnych: $x := 0, 0.01 \dots L$

$y := -A(\xi) \dots A(\xi)$



Rysunek 2: Wykres intensywności obciążenia od siły odśrodkowej $q(x)$ (skala $\times 10^6$) na tle przekroju łopatkki.

3. Obliczenia

Wyznaczenie sztywności przekroju:

$$AE(x) := A(x) \cdot E(x)$$

Definicja funkcji kształtu (liniowy dwuwęzłowy element skończony z jednym stopniem swobody w węźle) i ich pochodnych:

$$N1(x, h) := 1 - \frac{x}{h} \quad N2(x, h) := \frac{x}{h} \quad dN1(x, h) := \frac{d}{dx} N1(x, h) \quad dN2(x, h) := \frac{d}{dx} N2(x, h)$$

gdzie: x - współrzędna lokalna w elemencie skończonym, h - długość elementu

Liczba elementów skończonych użytych do dyskretyzacji obszaru rozwiązania (zakłada się podział na równej długości elementy). Liczba elementów powinna być taka aby zapewnić położenie węzła w punkcie ξ .

$$n := 4$$

Obliczenie długość elementów skończonych:

$$h := \frac{L}{n}$$

Całkowita liczba stopni swobody:

$$\text{NoF} := n + 1$$

Utworzenie zerowych globalnych macierzy sztywności, wektora równoważników obciążenia i macierzy Boole'a (wpisz: $K[NoF, NoF:0]$ $F[NoF:0]$ $C[2, NoF:0]$)

$$K_{NoF, NoF} := 0 \quad F_{NoF} := 0 \quad C_{2, NoF} := 0$$

Program do obliczania macierzy sztywności i wektora równoważników od obciążenia ciągłego

```

KF := for e ∈ 1..n
      d ← (e - 1)·h
      k ←  $\begin{pmatrix} \int_0^h AE(x+d) \cdot dN1(x,h) \cdot dN1(x,h) dx & \int_0^h AE(x+d) \cdot dN1(x,h) \cdot dN2(x,h) dx \\ \int_0^h AE(x+d) \cdot dN2(x,h) \cdot dN1(x,h) dx & \int_0^h AE(x+d) \cdot dN2(x,h) \cdot dN2(x,h) dx \end{pmatrix}$ 
      f ←  $\begin{pmatrix} \int_0^h N1(x,h) \cdot q(x+d) dx \\ \int_0^h N2(x,h) \cdot q(x+d) dx \end{pmatrix}$ 
      C ← 0·C
      C1,e ← 1
      C2,e+1 ← 1
      K ← K + CT·k·C
      F ← F + CT·f
    (K F)

```

Globalna macierz sztywności i globalny wektor obciążenia ciągłego (wpisz K:KF[1,1] F:KF[1,2]): $K := KF_{1,1}$ $F := KF_{1,2}$

$$K = \begin{pmatrix} 4.4 \times 10^{10} & -4.4 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ -4.4 \times 10^{10} & 8.8 \times 10^{10} & -4.4 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & -4.4 \times 10^{10} & 8.545 \times 10^{10} & -4.145 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & -4.145 \times 10^{10} & 6.763 \times 10^{10} & -2.618 \times 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 & -2.618 \times 10^{10} & 2.618 \times 10^{10} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3.667 \times 10^6 \\ 2.2 \times 10^7 \\ 4.317 \times 10^7 \\ 5.136 \times 10^7 \\ 2.015 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Definicja warunków brzegowych dla przypadku pierwszego rozwiązania konstrukcyjnego a)

Wyzerowanie wektorów warunków kinematycznych (przemieszczenia) i statycznych (siły skupione) (wpisz: Q.D[NoF:0] P[NoF:0])

$$Q_{D_{NoF}} := 0 \quad P_{NoF} := 0$$

Wektor stopni swobody w których definiowane są podpory (wprowadź wektor 1x1 z palety matix, nie R:(1)!!)

$$R_w := (1)$$

Wektor wartości stopni swobody w podporach (wpisz: Q.D[1:0])

$$Q_{D_1} := 0$$

Rozwiązanie układu równań z uwzględnieniem warunków brzegowych

$j := 1..rows(R)$ $i := 1..NoF$

$K_{w,R_j} := \text{if}(R_j = i, -1, 0)$

$Q := \text{Isolve}\left(K, F + P - K^{\langle R_1 \rangle} \cdot Q_{D_{R_1}}\right)$

Wektor reakcji (wpisz: $Q[R[j]=]$): $Q_{R_j} =$

$-1.404 \cdot 10^8$

Wektor obliczonych stopni swobody (wpisz: $Q[R[j]:Q.D[R[j]]$): $Q_{w,R_j} := Q_{D_{R_j}}$ $Q =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3.106 \times 10^{-3} \\ 5.713 \times 10^{-3} \\ 7.438 \times 10^{-3} \\ 8.208 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

4. Postprocessing dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)

Definicja funkcji obliczającej przemieszczenia i naprężenia w elementach skończonych

```

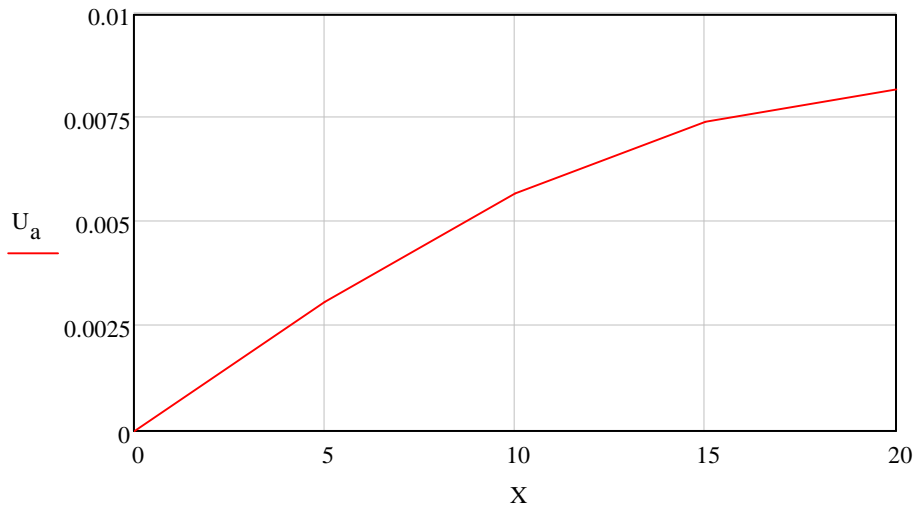
funXUS(Q) :=
  i ← 1
  for e ∈ 1..n
    N ← 2
    d ← (e - 1) · h
    for j ∈ 1..N
      x ←  $\frac{h}{N - 1} \cdot (j - 1)$ 
      Xi ← x + d
      Ui ← (N1(x, h) N2(x, h)) ·  $\begin{pmatrix} Q_e \\ Q_{e+1} \end{pmatrix}$ 
      Si ← (dN1(x, h) dN2(x, h)) ·  $\begin{pmatrix} Q_e \\ Q_{e+1} \end{pmatrix}$  · E(Xi)
      i ← i + 1
  (X U S)
  
```

$XUS := \text{funXUS}(Q)$

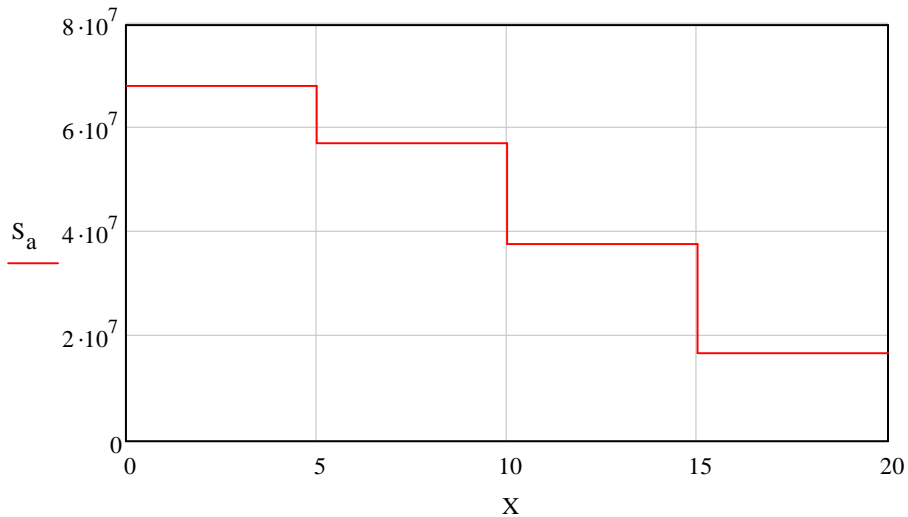
Wpisz $X:XUS[1,1]$ $U_a:XUS[1,2]$ $S_a:XUS[1,3]$

$X := XUS_{1,1}$ $U_a := XUS_{1,2}$ $S_a := XUS_{1,3}$

Wykres przemieszczeń dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)



Wykres naprężeń dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)



Definicja warunków brzegowych dla przypadku drugiego rozwiązania konstrukcyjnego b)

Wyzerowanie wektorów warunków kinematycznych (przemieszczenia) i statycznych (siły skupione)

$$Q_D := 0 \cdot Q_D \quad P := 0 \cdot P$$

Wektor stopni swobody w których definiowane są podpory (wprowadź wektor 2x1 z palety matix)

$$R := \begin{pmatrix} 1 \\ n + 1 \end{pmatrix}$$

Wektor wartości stopni swobody w podporach (wpisz:

$$Q.D[1:0] \quad Q.D[n+1:0]$$

$$Q_{D_1} := 0 \quad Q_{D_{n+1}} := 0$$

Odtworzenie macierzy sztywności i wektora równoważników obciążenia ciągłego

$$K := KF_{1,1} \quad F := KF_{1,2}$$

Rozwiązanie układu równań z uwzględnieniem warunków brzegowych

$$j := 1..rows(R) \quad i := 1..NoF$$

$$K_{i,R_j} := \text{if}(R_j = i, -1, 0)$$

$$Q := \text{Isolve}\left(K, F + P - K^{\langle R_1 \rangle} \cdot Q_{D_{R_1}} - K^{\langle R_2 \rangle} \cdot Q_{D_{R_2}}\right)$$

Wektor reakcji (wpisz:
 $Q[R]j=$):

$$Q_{R_j} = \begin{bmatrix} -6.42 \cdot 10^7 \\ -7.615 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Wektor obliczonych stopni swobody (wpisz:
 $Q[R]j:Q.D[R]j$):

$$Q_{R_j} := Q_{D_{R_j}}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.376 \times 10^{-3} \\ 2.251 \times 10^{-3} \\ 2.139 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

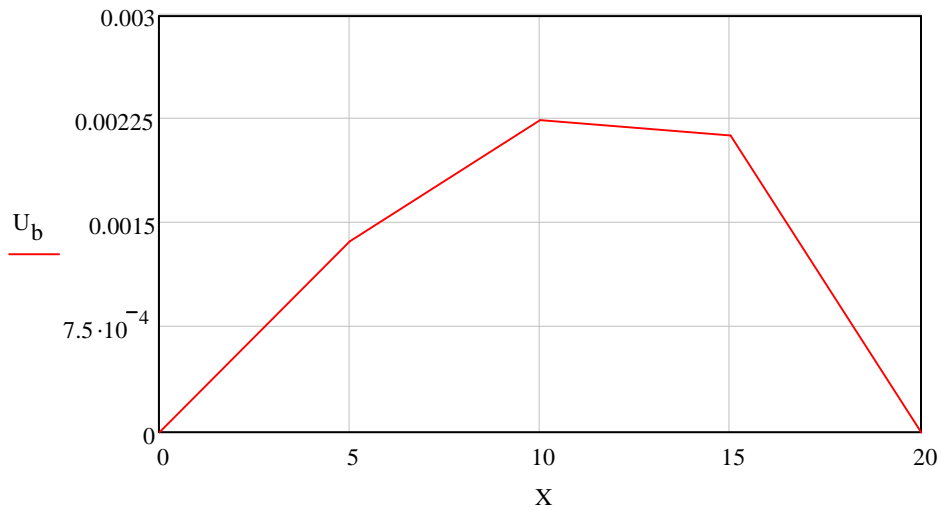
5. Postprocessing dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)

Obliczenie przemieszczeń i naprężeń w elementach skończonych

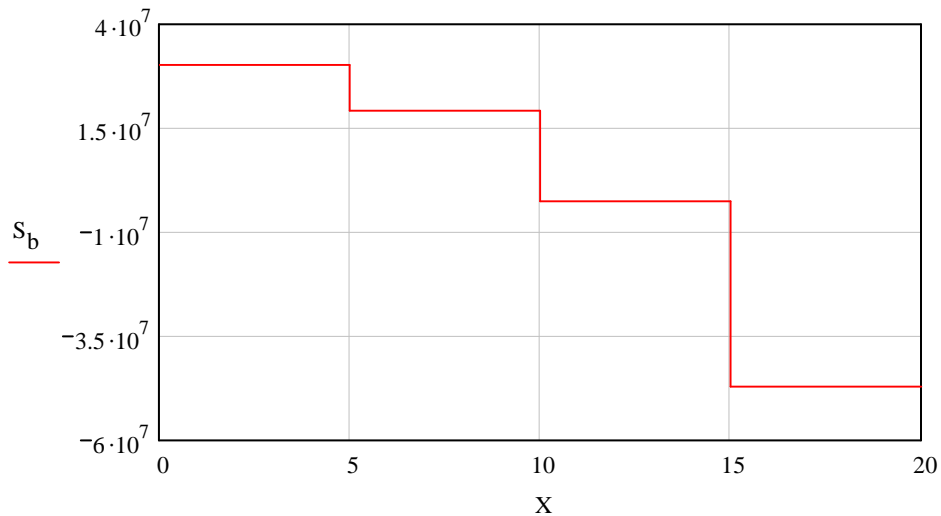
$$XUS := \text{funXUS}(Q)$$

$$X := XUS_{1,1} \quad U_b := XUS_{1,2} \quad S_b := XUS_{1,3}$$

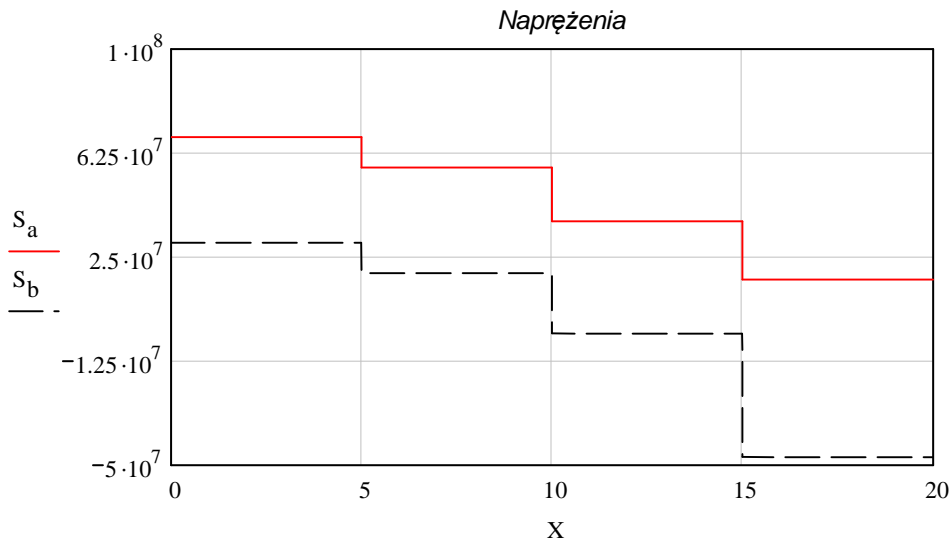
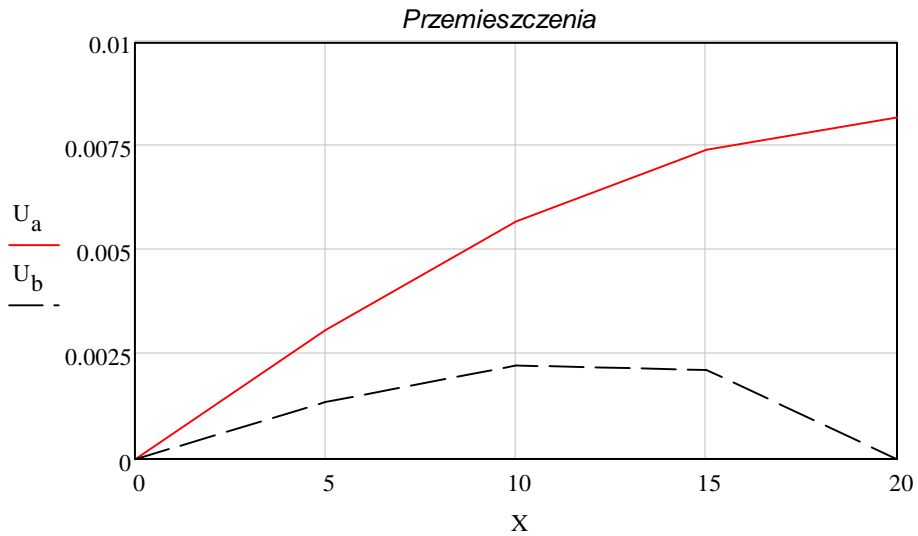
Wykres przemieszczeń dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)



Wykres naprężeń dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)



6. Porównanie wyników dla dwóch rozwiązań konstrukcyjnych



Wyznaczenie naprężeń ekstremalnych dla rozwiązania konstrukcyjnego a)

$$\max(S_a) = 6.834 \times 10^7 \quad \min(S_a) = 1.694 \times 10^7$$

Wyznaczenie naprężeń ekstremalnych dla rozwiązania konstrukcyjnego b)

$$\max(S_b) = 3.027 \times 10^7 \quad \min(S_b) = -4.707 \times 10^7$$

Wykonaj analizę zadania dla zwiększonej liczby elementów skończonych ($n=16, 32, 64 \dots$). Które z rozwiązań jest korzystniejsze ze względu na wielkość naprężeń w łopatkę wirnika?

Zbadaj wpływ prędkości obrotowej na rozwiązanie. W tym celu wykonaj analizę w zakresie prędkości kątowych $\varpi = 5, 10, 15, 20$.

Zbadaj wpływ parametrów materiału na wielkość naprężeń. Wykonaj analizę dla wartości modułu Younga i gęstości $E=80e9$ i $\rho=2000$ (materiał 2).

Jak zmieni się rozwiązanie kiedy łopatkę wirnika zostanie wykonana z dwóch materiałów (materiał 1 w pierwszej części, materiał 2 w drugiej części)?