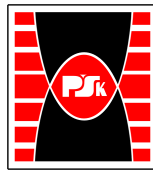


Czesław Cichoń

# METODY OBLICZENIOWE

## Wybrane zagadnienia



Kielce 2005



# Spis treści

<b>Rozdział 1. Wstęp</b>	<b>7</b>
<b>Rozdział 2. Modele matematyczne problemów fizycznych</b>	<b>10</b>
2.1. Uwagi wstępne . . . . .	10
2.2. Problemy opisywane za pomocą równań różniczkowych zwy- czajnych . . . . .	11
2.3. Problemy opisywane za pomocą równań różniczkowych cząst- kowych . . . . .	15
2.4. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych . . . . .	21
2.5. Naturalne i podstawowe warunki brzegowe . . . . .	23
2.6. Niejednorodne warunki brzegowe . . . . .	27
2.7. Sformułowania lokalne i globalne . . . . .	29
2.8. Rozwiązanie przybliżone . . . . .	30
<b>Rozdział 3. Klasyczna metoda różnic skończonych (MRS)</b>	<b>32</b>
3.1. Uwagi wstępne . . . . .	32
3.2. Równania różniczkowe cząstkowe eliptyczne . . . . .	33
3.2.1. Brzegi regularne . . . . .	33
3.2.2. Brzegi nieregularne . . . . .	37
3.3. Równania różniczkowe cząstkowe paraboliczne . . . . .	40
3.4. Równania różniczkowe cząstkowe hiperboliczne . . . . .	47
<b>Rozdział 4. Elementy aproksymacji i interpolacji funkcji</b>	<b>50</b>
4.1. Uwagi wstępne . . . . .	50
4.2. Aproksymacja optymalna . . . . .	50
4.3. Aproksymacja ciągła . . . . .	52
4.4. Aproksymacja punktowa . . . . .	56

4.5. Interpolacja . . . . .	61
4.5.1. Interpolacja Lagrange’a funkcji jednej zmiennej . . . . .	61
4.5.2. Interpolacja Lagrange’a funkcji dwóch zmiennych . . . . .	69
4.6. Interpolacja Hermite’a . . . . .	74
<b>Rozdział 5. Metody wariacyjne rozwiązań przybliżonych</b>	<b>81</b>
5.1. Uwagi wstępne . . . . .	81
5.2. Minimum funkcjonału kwadratowego . . . . .	83
5.3. Przestrzeń energii . . . . .	85
5.4. Metoda Rayleigha-Ritza . . . . .	87
5.5. Metoda residuów ważonych . . . . .	97
5.5.1. Metoda Bubnowa-Galerkina . . . . .	99
5.5.2. Metoda najmniejszych kwadratów . . . . .	118
5.5.3. Metoda kollokacji punktowej . . . . .	122
<b>Rozdział 6. Wprowadzenie do metody elementów skończonych</b>	
<b>MES</b>	<b>127</b>
6.1. Uwagi wstępne – podstawowe etapy procedury (MES) . . . . .	127
6.2. Zbieżność rozwiązania skończenie elementowego . . . . .	132
6.3. Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu . . . . .	135
6.3.1. Model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym . . . . .	135
6.3.2. Rozwiązanie statyczne płaskiej kratownicy . . . . .	159
6.3.3. Inne sformułowania wariacyjne modelu skończenie elementowego . . . . .	169
6.4. Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego czwartego rzędu . . . . .	175
6.4.1. Model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym . . . . .	175
6.4.2. Rozwiązanie statyczne płaskiej ramy . . . . .	182
6.5. Model skończenie elementowy dla problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze dwuwymiarowym . . . . .	195
6.5.1. Dyskretyzacja obszaru . . . . .	196
6.5.2. Wyznaczenie równań MES dla elementu skończonego . . . . .	196
6.6. Liniowy problem teorii sprężystości (LPTS) . . . . .	204
6.6.1. Podstawowy układ równań LPTS . . . . .	204

---

6.6.2.	Rozwiązanie LPTS - sformułowanie wariacyjne i minimalizacja energii . . . . .	207
6.6.3.	Model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza dla płaskiego stanu naprężenia/odkształcenia . . . . .	208
6.6.4.	Kryteria zbieżności . . . . .	213
6.6.5.	Analiza stanu naprężeń w tarczy . . . . .	214
6.7.	Problemy jednowymiarowe zależne od czasu . . . . .	223
6.7.1.	Wprowadzenie . . . . .	223
6.7.2.	Półdyskretny model skończenie elementowy . . . . .	224
6.7.3.	Aproksymacja w czasie . . . . .	226
<b>Rozdział 7. Wprowadzenie do bezelementowej metody Galerki- na (BMG)</b>		<b>229</b>
7.1.	Uwagi wstępne . . . . .	229
7.2.	Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu . . . . .	231
7.2.1.	Ruchoma, ważona metoda najmniejszych kwadratów . . . . .	231
7.2.2.	Funkcje wagowe . . . . .	233
7.2.3.	Sformułowanie Galerki . . . . .	234
7.3.	Uogólnienie – BMG dla liniowego problemu teorii sprężystości . . . . .	239
7.3.1.	Funkcje kształtu dla wielu wymiarów . . . . .	239
7.3.2.	Sformułowanie Galerki . . . . .	240
<b>Bibliografia</b>		<b>243</b>
<b>Skorowidz</b>		<b>244</b>
<b>Dodatek A. Podstawowe pojęcia i definicje w analizie funkcjonalnej</b>		<b>246</b>
<b>Dodatek B. Wzory Rungego-Kutty do numerycznego rozwiązania problemu początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych</b>		<b>252</b>
<b>Dodatek C. Metoda strzału do numerycznego rozwiązywania problemu brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu</b>		<b>258</b>
<b>Dodatek D. Podstawowe działania w rachunku macierzowym</b>		<b>262</b>



# Rozdział 1

## Wstęp

Podręcznik powstał na potrzeby przedmiotu Metody Obliczeniowe, wykładowanego na Wydziale Zarządzania i Modelowania Komputerowego Politechniki Świętokrzyskiej. Jednakże, poprzez rozszerzenie jego treści i interpretacji rozwiązywanych zadań na zadania z mechaniki konstrukcji inżynierskich, powinien on być również przydatny studentom innych wydziałów politechnicznych. Metody obliczeniowe (nazywane też w sposób równoważny „metodami komputerowymi”) są rozumiane w podręczniku jako metody przybliżonych rozwiązań problemów fizycznych, opisywanych przez modele matematyczne. Metody te są wykorzystywane do formułowania metod komputerowych i algorytmów rozwiązania. Przyjęto, że modelami matematycznymi mogą być problemy brzegowe dla równań różniczkowych, zwyczajnych lub cząstkowych, lub funkcjonały podlegające minimalizacji. Metody rozwiązań przybliżonych to różne metody wariacyjne, i w końcu, reprezentantami metod komputerowych są w podręczniku: metoda elementów skończonych (MES), oraz – w mniejszym stopniu – metoda różnic skończonych (MRS) i bezelementowa metoda Galerkina (BMG).

Stosownie do tych uwag ułożone są poszczególne rozdziały podręcznika. W rozdziale drugim pokazano na przykładach problemu stacjonarnego przepływu ciepła sposób budowy modeli matematycznych. Tam też zdefiniowano dwa typy warunków brzegowych, podstawowe i naturalne, oraz rozważono przypadek niejednorodnych warunków brzegowych.

Rozdział trzeci obejmuje zastosowanie klasycznej metody różnic skończonych do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Autor jest świadomy faktu, że w takim sformułowaniu MRS jest w małym stopniu metodą komputerową, jednakże zawarte tam metody mo-

gą być bardzo przydatne w dalszym procesie edukacji. Jest to również dobre przygotowanie do ewentualnego studiowania bardziej zaawansowanej wersji metody, jaką jest uogólniona metoda różnic skończonych [5].

W rozdziale czwartym podano podstawowe wiadomości na temat aproksymacji i interpolacji funkcji. Treści tego rozdziału są wykorzystane w rozdziałach: szóstym i siódmym. Ta część podręcznika może być jednakże pominięta w wykładach, jeśli metody numeryczne wykładane są oddzielnie.

Rozdział piąty jest jednym z dwóch głównych rozdziałów. Zawiera opis podstawowych metod wariacyjnych rozwiązań przybliżonych, jakimi są metoda Rayleigha-Ritza i cała grupa metod wywodzących się z metody residuów ważonych. Wprowadzono tam tak ważne pojęcia, jak słabe sformułowanie wariacyjne i przestrzeń energii. Wskazano na możliwość równoważnego rozwiązania pewnej klasy zadań sprzężonych poprzez rozwiązanie równań problemu brzegowego, lub minimalizację odpowiednio zbudowanego funkcjonału kwadratowego. Rozdział ten zawiera dużą liczbę przykładów, co powinno ułatwić studentom dobre przyswojenie sobie przedstawionych tam treści. W tym i w następnych rozdziałach w dużym stopniu wykorzystano zapis macierzowy.

Metody wariacyjne opisane w rozdziale piątym są użyte w kolejnych dwóch rozdziałach. Rozdział szósty jest drugim głównym rozdziałem i zawiera systematyczny opis metody elementów skończonych. Metoda ta jest omawiana jako pewna procedura wariacyjna poszukiwania rozwiązania przybliżonego. Równania MES są wyprowadzane w różnych sformułowaniach, zależnie od przyjętej metody wariacyjnej. Na prostych, lecz licznych przykładach, pokazano ogólność algorytmu MES i procedurę otrzymywania rozwiązań. Przedyskutowano też zbieżność rozwiązania skończenie elementowego. Jak już wspomniano, pokazano możliwość zastosowania MES do analizy problemów inżynierskich, takich jak analiza ustalonego przepływu ciepła w obszarze dwuwymiarowym czy analiza statyczna płaskich układów prętowych i tarcz. Rozszerzeniem tych zagadnień jest sformułowanie równań MES dla liniowego problemu teorii sprężystości (LPTS) i dla prostych problemów dynamicznych. Rozdział piąty i szósty są gruntownie przeredagowaną wersją odpowiednich rozdziałów z podręcznika [5].

W ostatnim, siódmym rozdziale krótko opisano bezelementową metodę Galerkiną, jako reprezentanta dużej grupy metod komputerowych koncepcyjnie różnych od metody elementów skończonych. Są to bowiem metody, w których rozwiązaniem są funkcje aproksymacyjne, zdefiniowane w obszarze rozwiązania, a nie funkcje interpolacyjne, zdefiniowane w elementach skończonych. Me-



---

tody te nie są jeszcze konkurencyjne w stosunku do MES, są jednak intensywnie rozwijane. Szczególnie są one efektywne w połączeniu z innymi metodami komputerowymi, jak na przykład z metodą elementów skończonych.

Jak widać, w podręczniku pominięto metodę elementów brzegowych (MEB), odsyłając Czytelników do literatury podanej w [2, 3, 5]. Uzasadnieniem tego może być tylko fakt, że metoda ta jest ciągle słabo oprogramowana w studenckich laboratoriach. Również do literatury odsyłamy Czytelników pragnących poznać jeszcze inne, bardziej zaawansowane metody komputerowe, jak na przykład metody wykorzystujące sztuczne sieci neuronowe lub algorytmy genetyczne.

Podręcznik starano się napisać prostym językiem, nie można było jednak zaniechać używania pewnych pojęć i definicji z analizy funkcjonalnej. Dlatego, w dodatku A zestawiono je wraz z prostymi przykładami ich wykorzystania. W dodatkach B i C podano wzory Rungego-Kutty i metody strzału, pomocne przy rozwiązywaniu prostych problemów brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych. I na koniec w dodatku D, zestawiono podstawowe działania w rachunku macierzowym.

Przyjęto konwencję cytowania podstawowej literatury na początku każdego rozdziału. Są to pozycje przede wszystkim [1, 4, 7, 10], z których korzystano bardzo obszernie i to zarówno w zakresie opisu przedstawianych metod, jak i ilustrujących je przykładów.

Podręcznik zapewne by nie powstał, gdyby jego napisania w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X nie podjęła się Pani Danuta Szulborska. Tylko jej cierpliwość i dokładność mogła doprowadzić do końca to zadanie. Rysunki wykonał mgr inż. Paweł Stąpór, znaczna ich część jest nową wersją rysunków autorstwa mgr inż. Piotra Plucińskiego. Obojgu współpracownikom autor składa serdeczne podziękowanie.

## Rozdział 2

# Modele matematyczne problemów fizycznych

### 2.1. Uwagi wstępne

Rozważając różne problemy fizyczne budujemy dla nich stosowne modele matematyczne, które następnie rozwiązujemy. Modele te formułujemy przyjmując odpowiednie założenia (niekiedy zbiór tych założeń nazywamy *modelem fizycznym*), często biorąc również pod uwagę metody ich przyszłego rozwiązania. Modele matematyczne są przybliżonym odwzorowaniem problemu rzeczywistego i otrzymane w ten sposób rozwiązanie zawsze musi być zweryfikowane. Należy przy tym mieć na uwadze fakt, że na ogół same równania modelu matematycznego są również rozwiązywane w sposób przybliżony, co potęguje możliwości powstawania błędów.

Modele matematyczne można budować na dwa różne sposoby. Pierwszym sposobem jest rozważenie lokalne problemu, co prowadzi z reguły do równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych. W drugim sposobie budujemy pewien funkcjonal, który opisuje globalne cechy problemu. Prostym przykładem jest analiza pręta rozciąganego. Sformułowanie lokalne problemu obliczenia funkcji wydłużenia pręta prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, natomiast w sformułowaniu globalnym nieznaną funkcję obliczamy z warunku minimalizacji całkowitej energii potencjalnej pręta rozciąganego.

W tym rozdziale pokażemy na przykładach analizy ustalonego przepływu ciepła sposób budowy modelu matematycznego w sformułowaniu lokalnym.

Ze sformułowaniem globalnym problemu spotkamy się w dalszych rozdziałach podręcznika.

Mając na uwadze przyszłe rozważania sklasyfikujemy różne typy równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego. W całym podręczniku będziemy wykorzystywali dwa rodzaje warunków brzegowych: naturalne i podstawowe warunki brzegowe, dlatego również je sformułujemy i przedstawimy ich interpretację.

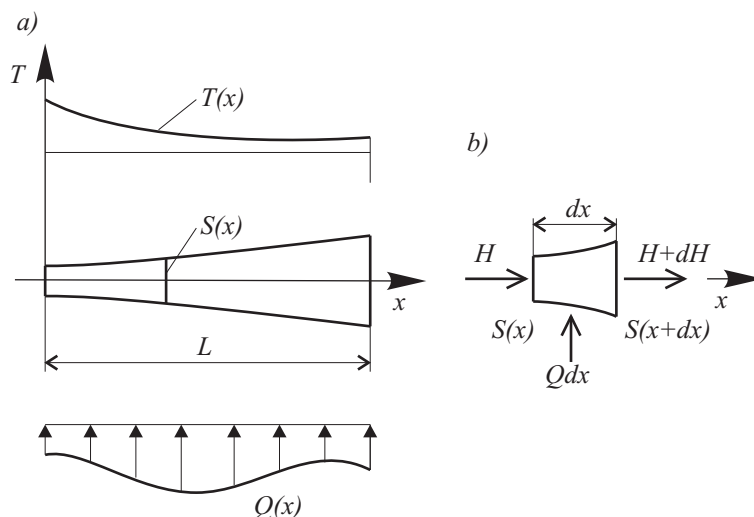
Wszystkie metody rozwiązań wariacyjnych modeli matematycznych omawiane w podręczniku są formułowane w *liniowej przestrzeni wektorowej*, co dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania wymaga, aby warunki brzegowe były jednorodne. Dlatego pokażemy prosty sposób zamiany problemu brzegowego z niejednorodnymi warunkami brzegowymi na równoważny problem brzegowy z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Na zakończenie rozdziału skomentujemy jeszcze oba sformułowania, lokalne i globalne, oraz podamy trzy możliwe sposoby formułowania rozwiązań przybliżonych.

W dodatku A, zestawiono podstawowe pojęcia i definicje z analizy funkcjonalnej, które mogą być pomocne przy studiowaniu tego i następnych rozdziałów.

## 2.2. Problemy opisywane za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych

Rozważymy problem przepływu ciepła wzdłuż pręta o powierzchni przekroju poprzecznego  $S(x)$ , pokazanego na rys.2.1a [9]. Ciepło  $Q(x)$  [J/s m] może być dostarczane do pręta przez jego pobocznice lub może być wytwarzane przez wewnętrzne źródło.  $Q(x)$  jest dodatnie, jeśli do pręta jest dostarczane ciepło. Zdefiniowany tak problem może być uznany za problem jednowymiarowy, jeśli wymiary przekroju poprzecznego pręta są małe w stosunku do jego długości, co pozwala przyjąć, że zmiana temperatury wzdłuż pręta jest dużo większa niż zmiana temperatury po jego wysokości. Innym przykładem jednowymiarowego przepływu ciepła jest przepływ ciepła przez ścianę o małej grubości w porównaniu z pozostałymi wymiarami ściany.

Równanie różniczkowe, będące modelem matematycznym problemu przepływu ciepła w pręcie, otrzymamy rozważając nieskończenie mały element  $dx$  pręta, pokazany na rys. 2.1b. Na rysunku tym  $H$  jest ciepłem dopływającym w jednostce czasu do przekroju  $S(x)$ , a  $H + dH$  oznacza ciepło wypływające w jednostce czasu z przekroju  $S(x + dx)$ . Zarówno  $H$  jak i  $H + dH$  są do-



Rys.2.1. a) przepływ ciepła w pręcie, b) element  $dx$  pręta

datnie, jeśli są skierowane wzdłuż osi  $x$ .  $Q dx$  jest ciepłem wytwarzanym lub dostarczanym w jednostce czasu przez brzeg  $dx$ .

Przedstawiony problem jest *stacjonarny*, co oznacza, że jest niezależny od czasu. Wykorzystując *równanie bilansu cieplnego*, otrzymamy, że

$$H + Q dx = H + dH \quad (2.1)$$

skąd

$$\frac{dH}{dx} = Q \quad (2.2)$$

Z definicji mamy wzór

$$H(x) = S(x) q(x)$$

gdzie  $q(x)$  jest *przepływem* [ $\text{J}/\text{m}^2\text{s}$ ], czyli ilością ciepła przepływającą przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu, dodatnim, jeśli ciepło przepływa w kierunku osi  $x$ .

W ten sposób (2.2) można napisać w formie

$$\frac{d}{dx}(Sq) = Q \quad (2.3)$$

Następnym krokiem jest sformułowanie *równania konstytutywnego*, określającego sposób przepływu ciepła w materiale pręta. Oznaczając przez  $T(x)$  funkcję temperatury i przez  $k$  współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału [J/°C m s], *prawo Fouriera* przewodzenia ciepła ma postać

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.4)$$

Znak minus w powyższym równaniu wynika z następującego rozumowania. Wracając do rys. 2.1a widzimy, że temperatura  $T$  zmniejsza się ze wzrostem  $x$ , czyli  $dT/dx < 0$ . Z wzoru (2.4) wynika, że wówczas  $q > 0$ , co jest zgodne z rzeczywistością fizyczną, że ciepło przepływa z obszaru cieplejszego do obszaru zimniejszego.

Podstawiając (2.4) do (2.3) otrzymamy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dx} \left( Sk \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0 \quad 0 < x < L \quad (2.5)$$

lub, jeśli  $Sk = const$ , w prostszej formie

$$Sk \frac{d^2T}{dx^2} + Q = 0 \quad 0 < x < L \quad (2.6)$$

Do rozwiązania tego równania różniczkowego konieczne jest jeszcze sformułowanie *warunków brzegowych* na brzegach pręta. Równanie różniczkowe jest rzędu drugiego i musimy podać dwa warunki brzegowe, ustalając wartości temperatury  $T$  lub przepływu  $q$ . Jednoznaczność rozwiązania wymaga, aby ustalając warunki dla  $T$  i  $q$  były one podane na dwóch różnych brzegach, na przykład

$$q(x=0) = - \left( k \frac{dT}{dx} \right) \Big|_{x=0} = h \quad (2.7a)$$

$$T(x=L) = g \quad (2.7b)$$

gdzie  $h$  i  $g$  są wielkościami znanymi.

Warunek brzegowy (2.7b) dla funkcji  $T$  jest nazywany *podstawowym warunkiem brzegowym*<sup>1</sup>, natomiast warunek brzegowy (2.7a) dla pochodnej funkcji  $T$  jest nazywany *naturalnym warunkiem brzegowym*. Podstawowe warunki brzegowe są tymi, które występują w wyspecyfikowaniu *przestrzeni funkcji*

<sup>1</sup>Podstawowe warunki brzegowe są też nazywane warunkami istotnymi.

*dopuszczalnych* dla danego równania różniczkowego. Naturalne warunki brzegowe omówimy dokładniej w p. 2.5. W ten sposób sformułowaliśmy *model matematyczny problemu przewodzenia ciepła w pręcie*, który napiszemy w pełnej postaci

$$\frac{d}{dx}\left(Sk\frac{dT}{dx}\right) + Q = 0 \quad 0 < x < L \quad (2.8a)$$

$$q(x=0) = -\left(k\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{x=0} = h \quad (2.8b)$$

$$T(x=L) = g \quad (2.8c)$$

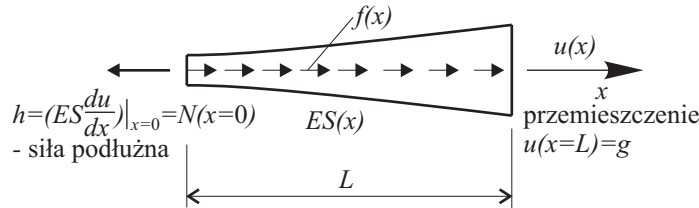
Równanie różniczkowe (2.5) możemy też napisać w tzw. *formie operatorowej*

$$Au = f \quad (2.9)$$

gdzie

$$A \equiv \frac{d}{dx}\left(Sk\frac{d}{dx}\right)$$

jest liniowym operatorem różniczkowym oraz  $u \equiv T$  i  $f = -Q$ . Taki ogólny zapis równania różniczkowego jest bardzo przydatny, ponieważ umożliwia formalne ujednoczenie równań różniczkowych będących modelami matematycznymi różnych problemów fizycznych. Na przykład, jeśli  $u(x)$  jest funkcją przemieszczenia osi pręta,  $k = E$  jest modułem Younga materiału sprężystego, a  $Q = f(x)$  jest funkcją intensywności obciążenia zewnętrznego, równoległego do osi pręta, to równanie (2.9) jest modelem matematycznym problemu pręta rozciąganego, rys. 2.2. Naturalny warunek brzegowy typu (2.8b) jest wówczas tzw. *statycznym warunkiem brzegowym*, a podstawowy warunek brzegowy (2.8c) jest *kinematycznym warunkiem brzegowym*. Można podać również i inne



Rys.2.2. Pręt rozciągany

problemy fizyczne, dla których modelem matematycznym jest równanie różniczkowe typu (2.5). Wymienimy jeszcze na przykład problem dyfuzji, gdzie

analizowany jest ruch jonów spowodowany różnicą ich koncentracji lub problem przepływu prądu elektrycznego. Odpowiednikiem prawa Fouriera (2.4) jest w pierwszym przypadku *prawo Ficka*, a w drugim przypadku jest to pewien ekwiwalent *prawa Ohma*. Studenci będą mogli się z tym bliżej zapoznać w takich przedmiotach, jak mechanika gruntów czy elektrotechnika.

### 2.3. Problemy opisywane za pomocą równań różniczkowych cząstkowych

Obecnie rozszerzymy rozważania problemu przepływu ciepła z p. 2.2 na przypadki przepływów w obszarach dwuwymiarowych i trójwymiarowych. W takich zadaniach w miejsce przepływu  $q$  musimy zdefiniować *wektor strumienia przepływu ciepła*  $\mathbf{q}$ . Wektor  $\mathbf{q}$  ma zwrot kierunku przepływu ciepła, i ilość ciepła przepływającą przez jednostkę powierzchni brzegu wyznacza składowa normalna  $q_n$ , nazywana również przepływem, rys. 2.3, obliczana ze wzoru

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} \quad (2.10)$$

gdzie  $T$  jest oznaczeniem transpozycji oraz

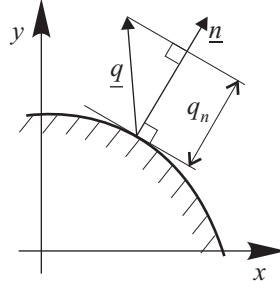
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{n}\| = 1 \quad (2.12)$$

odpowiednio dla dwóch i trzech wymiarów, a  $\|\bullet\|$  jest oznaczeniem normy Euklidesa. Składowe wektora  $\mathbf{q}$  mają wymiar  $[\text{J}/\text{m}^2\text{s}]$ . Przepływ  $q_n$  jest dodatni, jeśli w rozważanym punkcie ciepło opuszcza brzeg.

Uogólnione prawo Fouriera ma postać

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \cdot \nabla T \quad (2.13)$$

Rys.2.3. Przepływ  $q_n$  na brzegu

gdzie występuje wektor gradientu temperatury  $\nabla T$

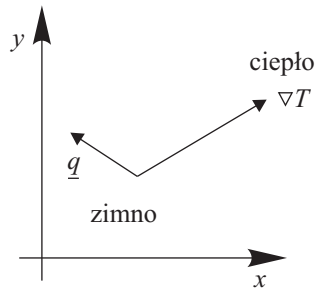
$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

odpowiednio dla dwóch i trzech wymiarów. Macierz  $\mathbf{D}$  w (2.13) jest *macierzą konstytutywną* i zawiera współczynniki przewodnictwa cieplnego

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

dla dwóch i trzech wymiarów. Jeśli  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y, z)$ , to materiał, przez który przepływa ciepło, nazywamy *niehomogeniczny* (niejednorodny), w przeciwnym przypadku materiał jest *homogeniczny* (jednorodny). W ogólnym przypadku, jeśli w macierzy  $\mathbf{D}$  występują składowe niezerowe poza przekątną główną, to może ona być wykorzystana do opisu przepływu ciepła w *materiałach anizotropowych*. W najprostszym przypadku natomiast macierz  $\mathbf{D}$  może mieć postać diagonalną, z niezerowymi składowymi tylko na przekątnej głównej, i wówczas opisuje ona *materiał ortotropowy*. I w końcu, jeśli dodatkowo  $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k$ , to materiał jest *materiałem izotropowym*. Wektor gradientu temperatury  $\nabla T$  jest skierowany w kierunku obszaru o wyższej temperaturze (obszaru cieplejszego), natomiast ciepło przepływa z obszaru



Rys.2.4. Wektor  $\mathbf{q}$  i gradient temperatury  $\nabla T$ 

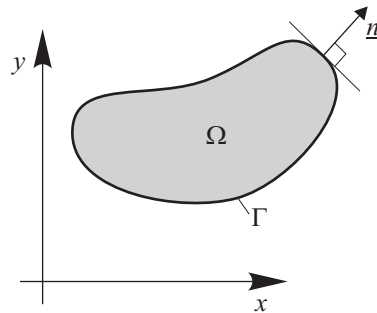
cieplejszego do obszaru zimniejszego, rys. 2.4. W rezultacie, iloczyn skalarny wektorów  $\nabla T$  i  $\mathbf{q}$  jest ujemny

$$(\nabla T)^T \mathbf{q} < 0 \quad (2.16)$$

Wykorzystując teraz wzór (2.13) otrzymamy

$$(\nabla T)^T \mathbf{D} \nabla T > 0 \quad (2.17)$$

dla wszystkich  $\nabla T \neq \mathbf{0}$ . Wyrażenie po lewej stronie (2.17) nazywamy *formą kwadratową* i jej dodatniość oznacza, że macierz  $\mathbf{D}$  jest *dodatnio określona*, czyli że wyznacznik tej macierzy  $\det \mathbf{D} > 0$ . W dalszym ciągu przyjmujemy częsty przypadek, że macierz  $\mathbf{D}$  jest symetryczna, spełnia więc warunek  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ .

Rys.2.5. Obszar  $\Omega$  z brzegiem  $\Gamma$ 

Obecnie sformułujemy równanie różniczkowe rządzące przepływem ciepła w obszarze wielowymiarowym. W tym celu można postąpić w sposób analogiczny do tego, który zastosowaliśmy w p. 2.2 do wyprowadzenia równania

przepływu ciepła dla pręta, tzn. rozważyć nieskończenie mały element nagrzewanego ciała. Postąpimy jednak inaczej, w sposób bardziej matematycznie precyzyjny, a mianowicie skorzystamy z twierdzenia Gaussa o dywergencji. Na rys. 2.5 pokazano obszar dwuwymiarowy o powierzchni  $\Omega$  i brzegu  $\Gamma$  z normalną zewnętrzną do brzegu  $\mathbf{n}$ .

### Twierdzenie 1 (Gaussa o dywergencji)

*Twierdzenie Gaussa o dywergencji wyrażają równania:*

- Dla problemów dwuwymiarowych:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (2.18)$$

gdzie  $\operatorname{div} \mathbf{q}$  jest oznaczeniem dywergencji wektora  $\mathbf{q}$ , zdefiniowanej wzorem

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (2.19)$$

- Dla problemów trójwymiarowych:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV = \int_S \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, dS \quad (2.20)$$

gdzie

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (2.21)$$

i całkowanie  $\operatorname{div} \mathbf{q}$  jest po objętości  $V$ , a całkowanie  $\mathbf{q}^T \mathbf{n}$  jest po powierzchni  $S$ , będącej brzegiem obszaru  $V$ .

Jeśli zamiast  $\mathbf{q}$  rozważymy wektor  $\phi \mathbf{q}$ , gdzie  $\phi$  jest funkcją skalarną, otrzymamy ważne twierdzenie Greena-Gaussa, które jest uogólnieniem twierdzenia o całkowaniu przez części dla całek pojedynczych. Dlatego, od razu, również i to twierdzenie sformułujemy.

### Twierdzenie 2 (Greena-Gaussa)

- Dla problemów dwuwymiarowych:

$$\int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \mathbf{q} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} \, d\Omega \quad (2.22)$$

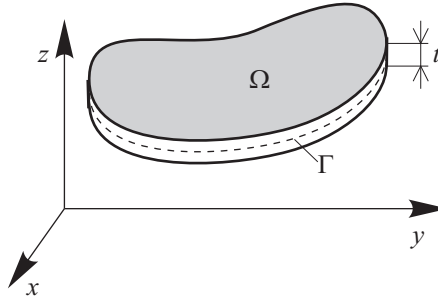
- Dla problemów trójwymiarowych:

$$\int_V \phi \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV = \int_S \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} \, dS - \int_V (\nabla \phi)^T \mathbf{q} \, dV \quad (2.23)$$

Wracając do podstawowego problemu tego punktu, napiszemy równanie bilansu cieplnego dla zadania dwuwymiarowego w formie

$$\int_{\Omega} Qt \, d\Omega = \oint_{\Gamma} q_n t \, d\Gamma \quad (2.24)$$

gdzie  $t = t(x, y)$  jest grubością, rys. 2.6. Zastosowanie twierdzenia Gaussa



Rys.2.6. Obszar dwuwymiarowy o grubości  $t$

o dywergencji (2.18) do prawej strony równania (2.24), z podstawieniem, że  $q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n}$ , daje wynik

$$\oint_{\Gamma} tq_n \, d\Gamma = \oint_{\Gamma} t\mathbf{q}^T \mathbf{n} \, d\Gamma = \oint_{\Gamma} (t\mathbf{q})^T \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(t\mathbf{q}) \, d\Omega \quad (2.25)$$

Wykorzystując powyższy rezultat w (2.24) otrzymamy

$$\int_{\Omega} [tQ - \operatorname{div}(t\mathbf{q})] \, d\Omega = 0$$

co, przy uwzględnieniu, że obszar  $\Omega$  jest dowolny, prowadzi do równania różniczkowego bilansu cieplnego

$$\operatorname{div}(t\mathbf{q}) = tQ \quad (2.26)$$

Wykorzystując w (2.26) równanie konstytutywne (2.13) otrzymamy

$$\operatorname{div}(t\mathbf{D}\nabla T) + tQ = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega \quad (2.27)$$

Jeśli macierz  $\mathbf{D}$  ma postać diagonalną i materiał jest izotropowy ( $k = k_{xx} = k_{yy}$ ), to równanie (2.27) jest tzw. *równaniem quasi-harmonicznym* i ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( tk \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( tk \frac{\partial T}{\partial y} \right) + tQ = 0 \quad (2.28)$$

W końcu, jeśli  $tk = \text{const}$ , to (2.28) redukuje się do *równania Poissona*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k} \quad (2.29)$$

Jeśli nie ma wewnętrznego źródła ciepła, to  $Q = 0$  i (2.29) jest *równaniem Laplace'a*

$$\nabla^2 T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.30)$$

gdzie  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  jest operatorem różniczkowym rzędu drugiego.

Rozwiązaniem tego równania są tzw. *funkcje harmoniczne*, co uzasadnia nazwę równania quasi-harmonicznego dla (2.28).

Wyprowadzone równania również można napisać w formie operatorowej  $Au = f$ , gdzie na przykład dla równania (2.28) mamy

$$A \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( tk \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( tk \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad f = -tQ, \quad u \equiv T$$

a dla równania Poissona (2.29) jest

$$A \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f = -\frac{Q}{k}, \quad u \equiv T$$

Rozwiązanie równania (2.27) wymaga oczywiście przyjęcia odpowiednich warunków brzegowych. Przyjmując, że są to mieszane warunki brzegowe, zawierające warunki naturalne i podstawowe, *model matematyczny problemu przepływu ciepła w obszarze dwuwymiarowym* ma formę

$$\operatorname{div}(t\mathbf{D}\nabla T) + tQ = 0 \quad \text{w } \Omega \quad (2.31a)$$

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h \quad \text{na brzegu } \Gamma_h \quad (2.31b)$$

$$T = g \quad \text{na brzegu } \Gamma_g \quad (2.31c)$$

z warunkami  $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_g$  i  $\Gamma_h \cap \Gamma_g = \emptyset$ , (co oznacza, że suma brzegów  $\Gamma_h$  i  $\Gamma_g$  jest równa  $\Gamma$ , a ich część wspólna jest równa zero).

Podobnie możemy napisać równania dla problemu trójwymiarowego

$$\operatorname{div}(\mathbf{D} \nabla T) + Q = 0 \quad \text{w } V \quad (2.32a)$$

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h \quad \text{na powierzchni } S_h \quad (2.32b)$$

$$T = g \quad \text{na powierzchni } S_g \quad (2.32c)$$

z warunkami  $S = S_h \cup S_g$  i  $S_h \cap S_g = \emptyset$ .

Tak jak to miało miejsce dla przypadku jednowymiarowego, równania typu (2.31) i (2.32) są również modelami matematycznymi dla problemów dyfuzji i przepływu prądu elektrycznego. Innym przykładem problemu fizycznego opisywanego równaniem (2.31) jest zagadnienie skręcania przekroju niekołowego. Z uwag podanych w tym punkcie oraz w p. 2.2 wynika ważny wniosek, że dla zachowania pewnej ogólności rozważań możemy formułować przybliżone metody rozwiązywania typowych równań różniczkowych (zwykłych lub cząstkowych), które następnie mogą być wykorzystane jako modele matematyczne dla konkretnie określonych problemów fizycznych. Problem przepływu ciepła może w tej sytuacji być uznany za „problem wzorcowy” problemu fizycznego.

## 2.4. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych

Równanie różniczkowe cząstkowe nazwiemy *quasi-liniowym*, jeśli jest liniowe względem swojej najwyższej pochodnej. Stąd-quasi liniowe równanie rzędu drugiego dla funkcji  $u$  dwóch zmiennych niezależnych –  $x$  i  $y$ , możemy napisać w formie

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.33)$$

Równanie to nazwiemy:

$$\begin{aligned} &\text{równaniem eliptycznym,} && \text{jeśli } ac - b^2 > 0 \\ &\text{równaniem parabolicznym,} && \text{jeśli } ac - b^2 = 0 \\ &\text{równaniem hiperbolicznym,} && \text{jeśli } ac - b^2 < 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Współczynniki  $a, b, c$  mogą być funkcjami  $x$  i  $y$ , co oznacza, że typ równania (2.33) może być różny w różnych podobszarach płaszczyzny  $(x, y)$ . Podana

klasyfikacja ma nie tylko znaczenie formalne, lecz ma też duże znaczenie praktyczne ponieważ rozwiązanie dla każdego typu równania jest różne, zależne od przyjętych warunków brzegowych i warunków początkowych.

Przykładami poszczególnych typów równań różniczkowych cząstkowych są:

- *Równanie eliptyczne:*

równania stacjonarnego przepływu ciepła:

równanie Poissona (2.29)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k}$$

równanie Laplace'a (2.30)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- *Równanie paraboliczne:*

równanie niestacjonarnego przepływu ciepła w pręcie, opisujące propagację temperatury w czasie (na przykład równanie (6.163a) dla  $k = 1$ )

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

gdzie funkcja temperatury  $T = T(x, t)$  i  $t$  jest czasem.

- *Równanie hiperboliczne:*

równanie falowe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

gdzie  $\alpha$  jest pewnym parametrem.

Równanie to również opisuje propagację w czasie, lecz w porównaniu z równaniem parabolicznym występuje tutaj druga pochodna po czasie, co powoduje, że rozwiązanie ma charakter oscylujący (jak to ma na przykład miejsce dla drgającego pręta, por. równanie (6.164a)).

## 2.5. Naturalne i podstawowe warunki brzegowe

W p. 2.2 wprowadziliśmy pojęcia podstawowych i naturalnych warunków brzegowych, stwierdzając tylko, że podstawowymi warunkami brzegowymi są te warunki, które występują w określeniu przestrzeni funkcji dopuszczalnych. Obecnie, zgodnie z poczynioną tam zapowiedzią, zdefiniujemy bliżej naturalne warunki brzegowe. Musimy jednakże w tym celu odwołać się do rachunku wariacyjnego.

Rozważmy problem minimalizacji funkcjonału

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx, \quad u' \equiv \frac{du}{dx} \quad (2.35)$$

w liniowej przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}$  funkcji ciągłych wraz z drugimi pochodnymi w przedziale  $[a, b]$  i spełniających jednorodnie warunki brzegowe  $u(a) = u(b) = 0$

$$\mathcal{D} = \{u(x) : u(x) \in C^2(a, b), a < x < b, u(a) = 0, u(b) = 0\}$$

Z rachunku wariacyjnego wiadomo, że funkcja  $u_0 \in \mathcal{D}$ , która minimalizuje funkcjonał (2.35), jest rozwiązaniem równania Eulera

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_0} \right) = 0 \quad (2.36)$$

Przyjmijmy teraz alternatywny warunek brzegowy tylko w postaci  $u(a) = 0$ . W tym przypadku przestrzeń funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}$  jest

$$\mathcal{D} = \{u(x) \in C^2(a, b), a < x < b, u(a) = 0\}$$

Załóżmy, że  $I(u)$  przyjmuje swoje minimum dla  $u_0 \in \mathcal{D}$ . Wówczas dla dowolnego  $u \in \mathcal{D}$  mamy

$$I(u) \geq I(u_0) \quad (2.37)$$

W szczególności nierówność (2.37) jest słuszna dla  $u = u_0 + \alpha v, v \in \mathcal{S}$  przestrzeni dopuszczalnych wariacji

$$\mathcal{S} = \{v(x) \in C^2(a, b), v(a) = 0\} = \mathcal{D}$$

Warunkiem koniecznym minimum funkcjonału  $I(u)$  dla  $u_0 \in \mathcal{D}$  jest zerowanie się pierwszej wariacji  $I$  dla  $u = u_0$

$$\delta I(u_0; v) \equiv \left[ \frac{d}{d\alpha} I(u_0 + \alpha v) \right]_{\alpha=0} = 0$$

Powyższy warunek dla rozważanego problemu prowadzi do równania

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int_a^b \delta F dx = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u_0} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_0'} \delta u' \right) dx = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) \right] \delta u dx + \left[ \delta u \frac{\partial F}{\partial u_0'} \right]_a^b = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) \right] \delta u dx + \delta u(b) \frac{\partial F}{\partial u_0'}(b) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ponieważ wariacja  $\delta u$  jest dowolna zarówno w  $(a, b)$ , jak i dla  $x = b$  i  $\delta u$  w  $(a, b)$  jest niezależna od  $\delta u(b)$  (można powiedzieć, że  $\delta u$  spełnia różne warunki wewnątrz obszaru i na brzegu), to z (2.38) wynika, że współczynniki przy  $\delta u$  w  $(a, b)$  i dla  $x = b$  powinny być oddzielnie równe zero

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) = 0 \quad \text{dla } a < x < b \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_0'}(b) = 0 \quad (2.39b)$$

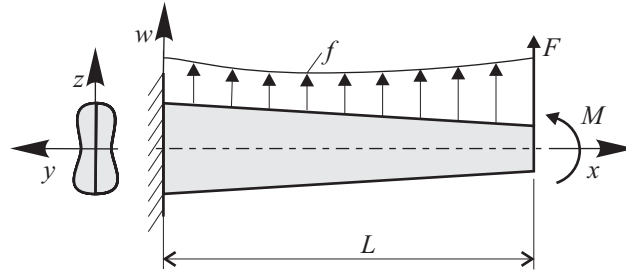
Warunek brzegowy (2.39b) jest drugim równaniem Eulera otrzymanym z warunku minimalizacji funkcjonału i jest *naturalnym warunkiem brzegowym*. Warunek brzegowy  $u(a) = 0$ , który jest włączony do wyspecyfikowania przestrzeni  $\mathcal{D}$ , jest natomiast *podstawowym warunkiem brzegowym*.

Podstawowe warunki brzegowe są też nazywane warunkami brzegowymi Dirichleta (w mechanice: *kinematycznymi warunkami brzegowymi*), a naturalne warunki brzegowe – warunkami brzegowymi Neumanna (w mechanice:



*statycznymi warunkami brzegowymi*). Podkreślmy, że spełnienie równań Eulera (2.39) jest warunkiem koniecznym, by funkcjonal  $I(u)$  osiągnął ekstremum. Rozważenie warunku wystarczającego wymagałoby wprowadzenia drugiej wariacji i zbadania, czy jest ona dodatnio czy ujemnie określona.

**Przykład 2.1.** Rozważmy problem minimalizacji całkowitej energii potencjalnej belki wspornikowej (rys.2.7).



Rys.2.7. Belka wspornikowa z obciążeniem  $f$ ,  $F$  i  $M$

Funkcjonał energii ma postać

$$\Pi(w) = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - \left( \int_0^L f w dx + w(L)F + \frac{dw}{dx}(L)M \right) \quad (2.40)$$

Zgodnie z *zasadą minimum całkowitej energii potencjalnej* spośród wszystkich dopuszczalnych stanów przemieszczeń belki w stanie równowagi trwałej mają miejsce tylko te przemieszczenia, dla których całkowita energia potencjalna belki osiąga minimum. Przestrzeń funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$  jest w tym przypadku zdefiniowana jako<sup>2</sup>

$$\mathcal{D}_A = \left\{ w : w, \frac{dw}{dx} \text{ i } \frac{d^2w}{dx^2} \text{ są ciągłe w } [0, L] \text{ i należą do } L_2(0, L) \right. \\ \left. \text{ oraz } w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0 \right\} \quad (2.41)$$

<sup>2</sup> $L_2(0, L)$  jest przestrzenią wektorową wszystkich funkcji  $v \in L_2(0, L)$  całkowalnych z kwadratem w obszarze  $(0, L) : \int_0^L |v(x)|^2 dx < \infty$ .

Warunek zerowania się pierwszej wariacji  $\delta\Pi = 0$  daje równanie

$$0 = \int_0^L \left[ EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} - \delta w f \right] dx - \delta w(L) F - \delta \left( \frac{dw}{dx}(L) \right) M$$

Równanie powyższe przecałkujemy dwukrotnie przez części

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^L \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] \delta w dx + \left[ EI \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left( \frac{dw}{dx} \right) \right. \\ & \left. - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta w \right]_0^L - \delta w(L) F - \delta \left( \frac{dw}{dx}(L) \right) M \end{aligned} \quad (2.42)$$

Równanie Eulera otrzymamy przyrównując do zera wyrażenie przy  $\delta w$  pod całką

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (2.43)$$

które jest równaniem różniczkowym dla belki zginanej. Operator  $A$  ma postać

$$A \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \right)$$

i jest on dodatni w  $\mathcal{D}_A$  (dla  $EI > 0$ ). Iloczyn skalarny dla tego problemu jest zdefiniowany wzorem

$$(w, v)_A \equiv (Aw, v) = \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (2.44)$$

Rozpiszemy i uporządkujemy teraz wyrażenia brzegowe w (2.42), otrzymując równanie

$$\begin{aligned} 0 = & \delta w(0) \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=0} + \delta w(L) \left[ -F - \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} + \\ & + \delta \left( \frac{dw}{dx}(0) \right) \left[ -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=0} + \delta \left( \frac{dw}{dx}(L) \right) \left[ -M + EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=L} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\delta w(0) = \delta \left( \frac{dw}{dx}(0) \right) = 0$ , to przyrównując oddzielnie do zera wyrażenia przy  $\delta w(L)$  i  $\delta \left( \frac{dw}{dx}(L) \right)$  otrzymamy dodatkowe równania Eulera:

$$\delta w(L): -F - \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0 \quad (2.45a)$$

$$\delta \left( \frac{dw}{dx}(L) \right): -M + \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.45b)$$

W rozważanym problemie podstawowe warunki brzegowe (wynikające z więzów geometrycznych) są następujące:

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0$$

natomiast naturalne warunki brzegowe (wynikające z działania uogólnionych sił  $F$  i  $M$ , przyłożonych w  $x = L$ ) są dane równaniami (2.45).

Reasumując, w analizie dowolnych problemów możliwe są następujące trzy kombinacje warunków brzegowych:

- (a) wszystkie są typu podstawowego (*problemy Dirichleta* lub *warunki brzegowe pierwszego rodzaju*),
- (b) wszystkie są typu naturalnego (*problemy Neumanna* lub *warunki brzegowe drugiego rodzaju*),
- (c) część warunków jest podstawowych, a część naturalnych (*problemy mieszane* lub *warunki brzegowe trzeciego rodzaju*).

## 2.6. Niejednorodne warunki brzegowe

W podręczniku ograniczymy się do rozwiązywania na ogół liniowych równań operatorowych, zawsze jednak z *jednorodnymi warunkami brzegowymi*. Wynika to z wymagań jednoznaczności rozwiązania, których tutaj nie będziemy omawiali, odsyłając zainteresowanych do literatury, w tym przypadku dotyczącej analizy funkcjonalnej [10]. Stwierdzimy tylko, że ta jednoznaczność jest zapewniona, jeśli przestrzeń rozwiązania jest *przestrzenią liniową*.

Konsekwencje analizy problemu z niejednorodnymi warunkami brzegowymi prześledzimy na prostym przykładzie.

**Przykład 2.2.** Rozważmy równanie różniczkowe Poissona

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \quad \text{w } \Omega \quad (2.46a)$$

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (2.46b)$$

gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  jest płaszczyzną, a  $\Gamma$  brzegiem obszaru  $\Omega$ . Warunek brzegowy jest typu podstawowego, dlatego mówimy, że (2.46) jest tzw. problemem Dirichleta dla równania Poissona.

Założymy, że  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ . Rozwiązaniem problemu (2.46) jest funkcja, która jest ciągła w obszarze domkniętym  $\overline{\Omega}$ , spełnia równanie (2.46a) i jest równa zero na brzegu  $\Gamma$ . Przez założenie, że  $f \in C(\overline{\Omega})$ , rozwiązanie  $u(x, y)$  należy do  $C^2(\overline{\Omega})$  przestrzeni funkcji ciągłych, wraz z pochodnymi aż do rzędu drugiego, oraz równych zero na brzegu  $\Gamma$ . Zbiór tych funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{D} = \{u(\mathbf{x}) \in C^2(\overline{\Omega}), \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ na } \Gamma\} \quad (2.47)$$

tworzy przestrzeń liniową, ponieważ spełnia tzw. aksjomaty dodatniości i mnożenia przez skalar. Jeśli bowiem  $u_1$  i  $u_2$  są dowolnymi funkcjami z  $\mathcal{D}$ , to wówczas ich kombinacja liniowa  $\alpha u_1 + \beta u_2$ , dla dowolnych skalarów  $\alpha$  i  $\beta$ , również należy do  $\mathcal{D}$ . Natomiast jeśli warunki brzegowe są niejednorodne, np.  $u = g$  na brzegu  $\Gamma$ , to przestrzeń  $\mathcal{D}$  nie jest liniowa, ponieważ dla  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$  mamy  $u_1 + u_2 = 2g$  na brzegu, tak że warunek  $u_1 + u_2 = g$  na brzegu  $\Gamma$  nie jest spełniony.

Najbardziej oczywistym sposobem postępowania w przypadku rozwiązywania problemów z niejednorodnymi warunkami brzegowymi jest po prostu przetransformowanie takiego problemu do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Procedura postępowania jest następująca.

Rozważmy liniowe równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (2.48a)$$

z liniowymi, niejednorodnymi warunkami brzegowymi

$$Bu = g \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (2.48b)$$

gdzie  $f \in L_2(\Omega)$  i  $g \in L_2(\Gamma)$ .

Założmy, że znana jest funkcja  $w$ , która spełnia warunek brzegowy  $Bw = g$  na brzegu  $\Gamma$  i jest wystarczająco gładka tak, że  $Aw \in L_2(\Omega)$ . Funkcja  $z = u - w$  spełnia równanie

$$Az = f - Aw \quad \text{w } \Omega \quad (2.49a)$$

$$Bz = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (2.49b)$$

Rozwiązanie równania (2.49) daje rozwiązanie problemu wyjściowego (2.48) w postaci  $u = z + w$ .

**Przykład 2.3.** Rozważmy problem Dirichleta dla równania Laplace'a, zdefiniowanego na prostokącie  $\Omega = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$

$$-\nabla^2 u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

z warunkami brzegowymi

$$u = b \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{dla } y = b \text{ i } 0 < x < a$$

$$u = 0 \quad \text{na pozostałych krawędziach prostokąta}$$

W tym przypadku funkcja  $w$  jest dana wzorem

$$w = y \sin \frac{\pi x}{a}$$

i jest ona różniczkowalna ze względu na  $x$  i  $y$  oraz spełnia warunki brzegowe. Problem wyjściowy po transformacji ma postać

$$-\nabla^2 z = \nabla^2 w = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{w } \Omega$$

$$z = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma$$

## 2.7. Sformułowania lokalne i globalne

Modele matematyczne przedstawione w tym rozdziale sformułowaliśmy analizując stany równowagi w punkcie materialnym ciała. Efektem tych rozważań były równania różniczkowe. Taki sposób budowania modeli matematycznych uzasadnia nazwę *sformułowanie lokalne problemu*.

Innym sposobem jest *sformułowanie globalne*, w którym rozwiązanie otrzymujemy w wyniku minimalizacji pewnego funkcjonału. Na przykład, w analizie zagadnień mechaniki ciała sprężystego takim funkcjonałem jest całkowita energia potencjalna. Problem, którego rozwiązanie można otrzymać rozwiązując równanie różniczkowe lub minimalizując odpowiedni funkcjonał, nazywa się *problemem samosprężonym*. Taką równoważność rozwiązania można już było zauważyć w p. 2.4, gdzie stwierdziliśmy, że funkcja, która minimalizuje funkcjonał (2.35) jest rozwiązaniem równania Eulera (2.36). Do problemu tego wrócimy jeszcze w rozdziale piątym, gdzie podamy warunki równoważności rozwiązania przybliżonego różnymi metodami wariacyjnymi.

## 2.8. Rozwiązanie przybliżone

W podręczniku zajmować się będziemy *metodami przybliżonymi* rozwiązywania problemów opisywanych przez swoje modele matematyczne. Przyjmijmy, dla skupienia uwagi, że dany jest problem, dla którego model matematyczny ma postać równania operatorowego określonego w obszarze  $\Omega$  z warunkami brzegowymi danymi na brzegu  $\Gamma$

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (2.50a)$$

$$Bu = g \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (2.50b)$$

gdzie  $A$  i  $B$  są operatorami różniczkowymi, a  $f$  i  $g$  są znanymi funkcjami odpowiedniej klasy ciągłości.

Podstawiając rozwiązanie przybliżone  $u_N$  do (2.50a), oczywiście równanie to nie zostanie spełnione i błąd, albo *residuum*, jest

$$R_1 = Au_N - f \quad (2.51)$$

Dodatkowo, prawdopodobnie nie zostaną również spełnione warunki brzegowe (2.50b), i błąd dla nich będzie wynosił

$$R_2 = Bu_N - g \quad (2.52)$$

Celem obliczeń przybliżonych będzie otrzymanie rozwiązania, które minimalizuje błędy  $R_1$  i  $R_2$ . Dokonuje się to przez zredukowanie błędów do zera w pewnych punktach, lub podobzszarach obszaru  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , albo minimalizując odpowiednio zdefiniowany błąd średni.

W ogólności mamy do wyboru trzy metody postępowania.

1. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego, które tożsamościowo spełnia wszystkie warunki brzegowe i minimalizuje błąd  $R_1$ , nie spełniając równań modelu matematycznego (ang. *domain methods*).  
Przykładami takich metod jest omawiana w rozdziale trzecim *metoda różnic skończonych* lub *metody wariacyjne Ritza i residuów ważonych*, w tym *metoda elementów skończonych*, omawiana w rozdziale szóstym, i metoda bezelementowa Galerkina, omawiana w rozdziale siódmym.
2. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego, które tożsamościowo spełnia równania modelu matematycznego i minimalizuje błąd  $R_2$ , nie spełniając warunków brzegowych (ang. *boundary methods*).  
Przykładem takiej metody jest nie omawiana w podręczniku metoda wariacyjna Trefftza i bazująca na niej *metoda elementów brzegowych*.
3. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego z warunków minimalizacji błędów  $R_1$  i  $R_2$ , spowodowanych niespełnieniem ani równań modelu matematycznego, ani warunków brzegowych (ang. *mixed methods*). Są to metody wykorzystujące, na przykład, metody z punktów 1 i 2. Nie są one również opisywane w podręczniku.

## Rozdział 3

# Klasyczna metoda różnic skończonych (MRS)

### 3.1. Uwagi wstępne

Klasyczna metoda różnic skończonych (MRS) jest przybliżoną metodą dyskretnego rozwiązywania problemów brzegowych, opisywanych zwyczajnymi lub cząstkowymi równaniami różniczkowymi [7]. Idea metody polega na zamianie operatorów różniczkowych na odpowiednie *operatory różnicowe*, określone na dyskretnym i regularnym zbiorze punktów; zbiór ten nazywamy *siatką*, a jego elementy *węzłami*. W rezultacie wyjściowe zagadnienie brzegowe zostaje sprowadzone do układu równań algebraicznych, w których niewiadomymi są wartości funkcji i w pewnych przypadkach ich pochodnych.

Uogólnieniem klasycznej metody różnic skończonych jest metoda z dowolnie nieregularną siatką węzłów, wykorzystywana również do rozwiązywania problemów sformułowanych w postaci wariacyjnej. W tym rozdziale ograniczymy się tylko do zastosowania klasycznej metody różnic skończonych do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych; rozwiązywanie tą metodą równań różniczkowych zwyczajnych jest elementarne i przykłady zastosowań można znaleźć w podręcznikach o metodach numerycznych. Uogólniona metoda różnic skończonych jest natomiast złożoną metodą wariacyjną i szerokie jej omówienie znajduje się w podręczniku [5].



## 3.2. Równania różniczkowe cząstkowe eliptyczne

### 3.2.1. Brzegi regularne

Metodę różnic skończonych zastosujemy do rozwiązania równania Laplace'a

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

i równania Poissona

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.2)$$

W pierwszym kroku rozwiązania zamienimy operatory różniczkowe na odpowiednie operatory różnicowe. Wykorzystamy w tym celu szereg Taylora dla funkcji  $u$  w otoczeniu  $(x \pm h, y)$ , pisząc

$$\begin{aligned} u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} h^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} h^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} u(x-h, y) = u(x, y) - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} h^2 + \\ - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} h^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3b)$$

Odejmując stronami (3.3b) od (3.3a) i pomijając wyrazy z  $h^3, h^4, \dots$ , otrzymamy

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \approx \frac{1}{2h} [u(x+h, y) - u(x-h, y)] \quad (3.4a)$$

Postępując podobnie dostaniemy

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \approx \frac{1}{2k} [u(x, y+k) - u(x, y-k)] \quad (3.4b)$$

Wzory (3.4) nazywają się *wzorami różnicowymi centralnymi pierwszego rzędu*. Dodając teraz stronami (3.3a) do (3.3b) i pomijając wyrazy z  $h^4, h^5, \dots$ , otrzymamy

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) \approx 2u(x, y) + h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$$

skąd mamy

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)] \quad (3.5a)$$

i podobnie

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} [u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)] \quad (3.5b)$$

Wzory (3.5) nazywają się *wzorami różnicowymi drugiego rzędu*. Drugą pochodną mieszaną obliczymy korzystając ze wzorów

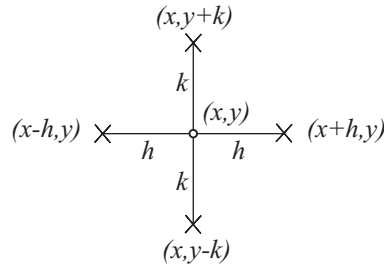
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &\approx \frac{1}{2k} \left[ \frac{\partial u(x, y+k)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y-k)}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial u(x, y \pm k)}{\partial x} &\approx \frac{1}{2h} [u(x+h, y \pm k) - u(x-h, y \pm k)] \end{aligned}$$

Końcowa postać wzoru różnicowego jest

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4hk} [u(x+h, y+k) - u(x-h, y+k) - u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)] \quad (3.6)$$

Postępując podobnie możemy napisać wzory różnicowe odpowiadające wyższemu pochodnym cząstkowym funkcji  $u(x, y)$ .

Na rys. 3.1 pokazano punkty  $(x+h, y)$ ,  $(x-h, y)$  ... występujące we wzorach (3.4) - (3.5), tworzące tzw. *gwiazdę różnicową*.



Rys.3.1. Gwiazda różnicowa dla węzła  $(x, y)$

Podstawiając (3.5a) i (3.5b) do równania Poissona (3.2) otrzymamy dla  $h = k$  *równanie różnicowe*

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = h^2 f(x, y) \quad (3.7)$$

Przyjęcie  $f(x, y) = 0$  prowadzi do równania różnicowego dla równania Laplace'a

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0 \quad (3.8)$$

Wzory różnicowe i równania różnicowe przedstawia się również w formie graficznej jako tzw. *schematy różnicowe*, na przykład w postaci

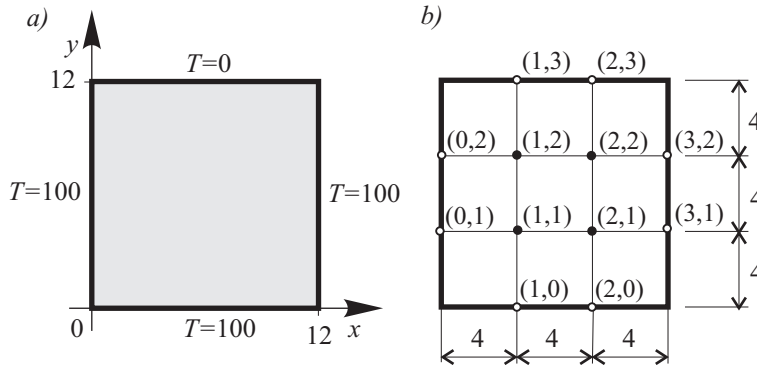
$$h^2 \nabla^2 = \begin{Bmatrix} & & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ & & 1 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

lub dla równania (3.7)

$$\begin{Bmatrix} & & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ & & 1 \end{Bmatrix} u = h^2 f(x, y) \quad (3.10)$$

**Przykład 3.1.** Rozwiązać problem Dirichleta stacjonarnego przepływu ciepła w tarczy kwadratowej.

Analizowana tarcza pokazana jest na rys. 3.2a. Tarcza wykonana jest z materiału jednorodnego i ogrzana na brzegach do temperatury  $0^\circ\text{C}$  i  $100^\circ\text{C}$ . Przyjąć siatkę z węzłami co  $h = k = 4$  cm, rys.3.2b.



Rys.3.2. a) tarcza kwadratowa, b) siatka MRS

Modelem matematycznym dla tego problemu jest równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

z podstawowymi warunkami brzegowymi pokazanymi na rys. 3.2a. Układ równań różnicowych dla węzłów (1, 1), (2, 1), (1, 2) i (2, 2) ma postać

$$\begin{aligned} -4T_{11} + T_{21} + T_{12} &= -200 \\ T_{11} - 4T_{21} + T_{22} &= -200 \\ T_{11} - 4T_{12} + T_{22} &= -100 \\ T_{21} + T_{12} - 4T_{22} &= -100 \end{aligned}$$

którego rozwiązanie wynosi

$$T_{11} = T_{21} = 87,5^\circ\text{C} \quad T_{12} = T_{22} = 62,5^\circ\text{C}$$

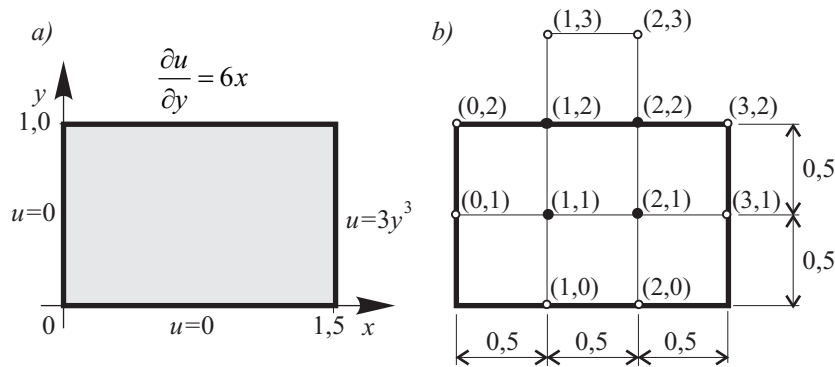
Dokładny wynik jest odpowiednio  $88,1^\circ\text{C}$  i  $61,9^\circ\text{C}$ , co oznacza, że otrzymane rozwiązanie jest zaskakująco dobre, pomimo rzadkiej siatki węzłów.

**Przykład 3.2.** Rozwiązać mieszany problem brzegowy dla tarczy prostokątnej opisany równaniem Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12xy$$

Tarcza wraz z podstawowymi i naturalnymi warunkami brzegowymi pokazana jest na rys. 3.3a. Na 3.3b pokazano przyjętą siatkę węzłów dla  $h = k = 0,5$ .

Wykorzystując wzory  $u = 3y^3$  i  $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x$  obliczymy dla węzłów brzegowych



Rys.3.3. a) tarcza prostokątna, b) siatka MRS

$$u_{31} = 0,375 \quad u_{32} = 3 \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 3 \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6$$

Układ równań różnicowych dla węzłów wewnętrznych (1, 1) i (2, 1) oraz węzłów brzegowych (1, 2) i (2, 2) ma postać

$$\begin{array}{rcccccc}
 -4u_{11} & + u_{21} & + u_{12} & & & = 0,75 \\
 u_{11} & - 4u_{21} & & + u_{22} & & = 1,5 - 0,375 = 1,125 \\
 u_{11} & & - 4u_{12} & + u_{22} & + u_{13} & = 1,5 \\
 & u_{21} & + u_{12} & - 4u_{22} & + u_{23} & = 3 - 3 = 0
 \end{array} \tag{3.11}$$

Nieznane wielkości  $u_{13}$  i  $u_{23}$  poza obszarem tarczy zwiążemy z  $u_{11}$  i  $u_{21}$  korzystając z wzorów różnicowych centralnych, napisanych dla węzłów (1, 2) i (2, 2)

$$3 = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \approx \frac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11} \quad \text{skąd } u_{13} = u_{11} + 3$$

$$6 = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} \approx \frac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21} \quad \text{skąd } u_{23} = u_{21} + 6$$

Podstawiając powyższe wzory do układu równań (3.11) otrzymamy końcową postać układu równań różnicowych, który w formie macierzowej jest następujący

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,750 \\ 1,125 \\ -1,500 \\ -6,000 \end{bmatrix}$$

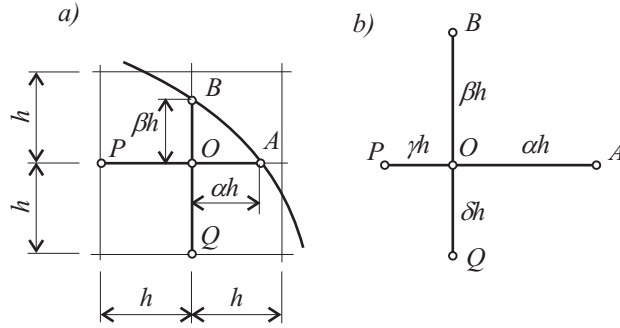
Rozwiązanie tego układu równań wynosi (w nawiasach podano rozwiązania dokładne)

$$\begin{array}{ll}
 u_{12} = 0,866 \quad (1) & u_{22} = 1,812 \quad (2) \\
 u_{11} = 0,077 \quad (0,125) & u_{21} = 0,191 \quad (0,25)
 \end{array}$$

Wynik można poprawić, zagęszczając siatkę węzłów.

### 3.2.2. Brzegi nieregularne

W przypadku brzegów nieregularnych węzły siatki nie są zlokalizowane na brzegach obszaru rozwiązania. Przypadek ten jest zilustrowany na rys. 3.4a i wymaga on specjalnego potraktowania.



Rys.3.4. a) brzeg nieregularny B-A-C, b) gwiazda różnicowa dla przypadku ogólnego

Wykorzystując szereg Taylora dla punktu  $O$  z sąsiadami  $A$  i  $P$ , otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} u_A &= u_O + \alpha h \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} (\alpha h)^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \\ u_P &= u_O - h \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

na podstawie których możemy napisać

$$u_A + \alpha u_P \approx (1 + \alpha) u_O + \frac{1}{2} \alpha (\alpha + 1) h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$$

Z równania tego obliczymy pochodną, otrzymując

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} u_A + \frac{1}{1 + \alpha} u_P - \frac{1}{\alpha} u_O \right]$$

Podobnie, rozważając punkty  $O$ ,  $B$  i  $Q$ , dostaniemy

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{\beta(1 + \beta)} u_B + \frac{1}{1 + \beta} u_Q - \frac{1}{\beta} u_O \right]$$

Dodając do siebie dwa ostatnie wzory mamy wynik końcowy

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2} \left[ \frac{u_A}{\alpha(1 + \alpha)} + \frac{u_B}{\beta(1 + \beta)} + \frac{u_P}{1 + \alpha} + \frac{u_Q}{1 + \beta} - \frac{(\alpha + \beta) u_O}{\alpha\beta} \right] \quad (3.13)$$

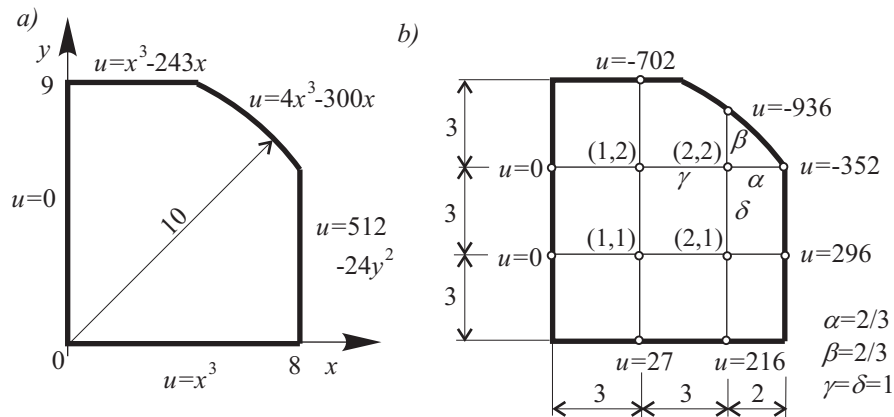
Na przykład, jeśli  $\alpha = \frac{1}{2}$  i  $\beta = \frac{1}{2}$  zamiast schematu różnicowego

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\} \text{ mamy teraz } \left\{ \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3} & \\ \frac{2}{5} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{array} \right\}$$

W ogólniejszym przypadku, pokazanym na rys. 3.4b, mamy

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2} \left[ \frac{u_A}{\alpha(\alpha + \gamma)} + \frac{u_B}{\beta(\beta + \delta)} + \frac{u_P}{\gamma(\gamma + \alpha)} + \frac{u_Q}{\delta(\delta + \beta)} - \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) u_O}{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \quad (3.14)$$

**Przykład 3.3.** Obliczyć  $u(x, y)$  w obszarze pokazanym na rys. 3.5a. Część brzegu jest okręgiem o promieniu 10 i początku w punkcie  $(0, 0)$ . W obszarze tym zdefiniowane jest równanie Laplace'a z podstawowymi warunkami brzegowymi podanymi na rys. 3.5a. Przyjąć siatkę węzłów z rys. 3.5b ( $h = 3$ ).



Rys.3.5. a) tarcza z brzegiem nieregularnym, b) siatka MRS

Dla punktów  $(1, 1)$  i  $(1, 2)$  gwiazda różnicowa jest regularna, natomiast dla punktów  $(2, 1)$  i  $(2, 2)$  należy skorzystać z wzoru (3.14), otrzymując schematy różnicowe w formie

$$(1, 1), (1, 2) : \left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\}; (2, 1) : \left\{ \begin{array}{ccc} & 0,5 & \\ 0,6 & -2,5 & 0,9 \\ & 0,5 & \end{array} \right\}; (2, 2) : \left\{ \begin{array}{ccc} & 0,9 & \\ 0,6 & -3 & 0,9 \\ & 0,6 & \end{array} \right\}$$

Uwzględniając warunki brzegowe podane na rys. 3.5b, otrzymamy układ równań różnicowych w formie

$$\begin{array}{rccccccc}
 -4u_{11} & + u_{21} & + u_{12} & & = 0 - 27 & = -27 \\
 0,6u_{11} & - 2,5u_{21} & & + 0,5u_{22} & = -0,9 \cdot 296 - 0,5 \cdot 216 & = -374,4 \\
 u_{11} & & - 4u_{12} & + u_{22} & = 702 + 0 & = 702 \\
 & 0,6u_{21} & + 0,6u_{12} & - 3u_{22} & = 0,9 \cdot 352 + 0,9 \cdot 936 & = 1159,2
 \end{array}$$

Równanie macierzowe jest

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0,6 & -2,5 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0,6 & 0,6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374,4 \\ 702 \\ 1159,2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań wynosi

$$u_{11} = -55,6 \quad u_{21} = 49,2 \quad u_{12} = -298,5 \quad u_{22} = -436,3$$

Przyjęta siatka węzłów jest bardzo rzadka, dlatego wyniki obliczeń odbiegają od rozwiązania dokładnego

$$u_{11} = -54 \quad u_{21} = 54 \quad u_{12} = -297 \quad u_{22} = -432$$

### 3.3. Równania różniczkowe cząstkowe paraboliczne

Rozwiązywanie równań parabolicznych i hiperbolicznych jest znacznie bardziej złożonym zadaniem niż rozwiązywanie równań eliptycznych. Rozwiązując równanie eliptyczne metodą różnic skończonych, rozwiązanie przybliżone jest zbieżne do rozwiązania dokładnego, jeśli  $h \rightarrow 0$ . W przypadku równań parabolicznych i hiperbolicznych takiej automatycznej gwarancji nie ma, w szczególności proces obliczeń może być w ogóle niezbieżny. Aby zapewnić *zbieżność* i *stabilność* rozwiązania (to ostatnie oznacza, że małe zakłócenia w warunkach brzegowych powodują małe zmiany w rozwiązaniu) muszą być ustalone dodatkowe warunki na procedurę rozwiązania.

Wykorzystanie metody różnic skończonych do przybliżonego rozwiązywania równania parabolicznego objaśnimy na przykładzie problemu nieustalonego przepływu ciepła w obszarze jednowymiarowym, rządzonego przez równanie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad (3.15)$$



gdzie  $t \geq 0$  jest czasem, a parametr  $c = const$  (dalej przyjmiemy  $c = 1$ ). Do równania muszą być dołączone warunki brzegowe oraz *warunek początkowy*, które przyjmiemy w formie

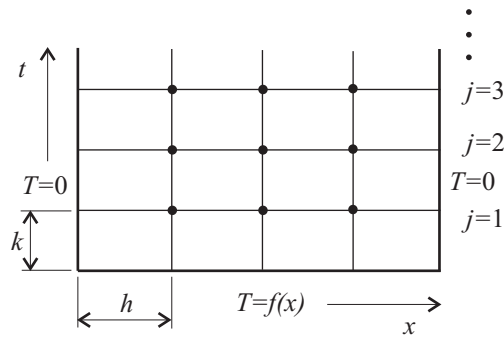
$$T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \text{jednorodne podstawowe warunki brzegowe} \quad (3.16a)$$

$$T(x, 0) = f(x) \quad \text{warunek początkowy} \quad (3.16b)$$

Równanie różnicowe dla równania (3.15) jest

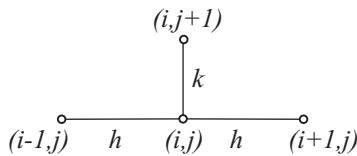
$$\frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{ij}) = \frac{1}{h^2} (T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}) \quad (3.17)$$

Na rys. 3.6 pokazano przyjętą siatkę węzłów w kierunkach zmiennej przestrzennej  $x$  i zmiennej czasowej  $t$ .



Rys.3.6. Siatka węzłów na płaszczyźnie  $(x, t)$

Zauważmy, że równanie (3.17) wiąże ze sobą cztery węzły pokazane na rys. 3.7.



Rys.3.7. Węzły w równaniu różnicowym (3.17)

W równaniu różnicowym (3.17) do aproksymacji pochodnej  $\frac{\partial T}{\partial t}$  wykorzystano tzw. *różnicę skończoną wprzód* pierwszego rzędu, ponieważ nie mamy na

początku informacji dla ujemnego  $t$ . Ze wzoru (3.17) obliczymy  $T_{i,j+1}$ , co odpowiada temperaturze dla czasu na poziomie  $j + 1$ , w funkcji trzech wartości  $T$  z poziomu czasowego  $j$

$$T_{i,j+1} = (1 - 2r) T_{ij} + r(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (3.18)$$

gdzie  $r = k/h^2$ .

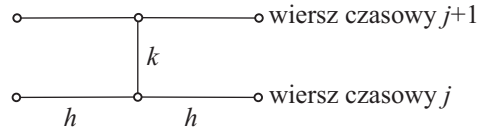
Taki sposób obliczeń jest bardzo prosty, jednakże można wykazać, że aby metoda była zbieżna musi być spełniony warunek

$$r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

co oznacza, że współczynnik przy  $T_{ij}$  w (3.18) jest dodatni lub (dla  $r = \frac{1}{2}$ )  $(1 - 2r) T_{ij} = 0$ . Intuicyjnie, warunek (3.19) oznacza, że przyjęty krok czasowy  $k$  nie może być za duży (nie można się poruszać za szybko w kierunku  $t$ ).

Warunek (3.19) jest dużym ograniczeniem w obliczeniach praktycznych, wybór małego  $h$  oznacza, że  $k$  musi być bardzo małe. Na przykład, dla  $h = 0,1$  mamy  $k \leq 0,005$ , a zmiana  $h$  o połowę powoduje czterokrotne zwiększenie liczby kroków czasowych.

Znacznie lepszą metodą, która nie ma ograniczenia dla  $r = k/h^2$ , jest metoda Cranka-Nicolsona. Idea tej metody polega na zastąpieniu prawej strony równania różnicowego (3.17) przez  $\frac{1}{2}$  sumy dwóch wzorów różnicowych napisanych dla dwóch sąsiednich wierszy czasowych, rys. 3.8.



Rys.3.8. Sześć węzłów w formule Cranka-Nicolsona

W ten sposób zamiast (3.17) możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{ij}) &= \frac{1}{2h^2} (T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} (T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Przenosząc wyrazy z poziomu  $(j + 1)$  na stronę lewą i wyrazy z poziomu  $(j)$  na stronę prawą otrzymamy

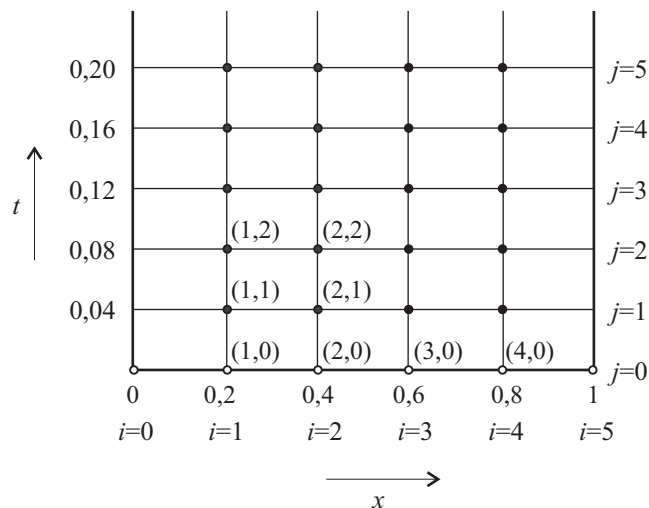
$$(2 + 2r) T_{i,j+1} - r (T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1}) = (2 - 2r) T_{ij} + r (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (3.21)$$

Wykorzystanie w obliczeniach równania (3.21) przebiega w następujący sposób. Jeśli podzielimy odcinek  $0 \leq x \leq 1$  na  $n$  przedziałów, to mamy  $n - 1$  wewnętrznych punktów węzłowych na każdym poziomie czasowym. Stąd, dla  $j = 0$  i  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , otrzymamy z (3.21) układ  $n - 1$  równań liniowych z niewiadomymi  $T_{11}, T_{21}, \dots, T_{n-1,1}$  (dla  $j = 1$ ) w funkcji warunków początkowych (3.16b)  $T_{00}, T_{10}, \dots, T_{n,0}$  i podstawowych warunków brzegowych (3.16a)  $T_{01} = T_{n,1} = 0$ . Podobnie postępujemy dla  $j = 1, 2, \dots$  co oznacza, że dla każdego poziomu czasowego rozwiązujemy  $n - 1$  liniowych równań algebraicznych.

Chociaż ograniczenie na  $r = k/h^2$  już nie obowiązuje, to jednakże mniejsze  $r$  ciągle będzie dawało lepsze wyniki. Dobrym wyborem jest przyjęcie  $r = 1$ , co sprowadza równanie (3.21) do prostej postaci

$$4T_{i,j+1} - T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} \quad (3.22)$$

**Przykład 3.4.** Rozważmy problem nieustannego przepływu ciepła w pręcie. Pręt metalowy o długości 1 i  $c^2 = 1$  jest izolowany na swojej pobocznicy, natomiast na końcach pręta temperatura wynosi  $0^\circ\text{C}$ ,  $T(0, t) = T(1, t) = 0$ .



Rys.3.9. Siatka węzłów dla przykładu 3.4

Warunek początkowy dla  $t = 0$  jest  $T(x, 0) = \sin \pi x$ . Należy obliczyć rozkład temperatury w pręcie  $T(x, t)$  dla  $0 \leq t \leq 0,2$  wykorzystując metodę Cranka-

Nicolsona, przyjmując  $h = 0,2$  i  $r = 1$ . Porównać wyniki z rozwiązaniem dokładnym oraz z rozwiązaniami otrzymanymi ze wzoru (3.18) przy przyjęciu  $r = 0,25$  (warunek (3.19) jest spełniony) i  $r = 1$  i  $r = 2,5$  (warunek (3.19) nie jest spełniony). Na rys. 3.9 pokazano przyjętą siatkę węzłów.

Warunki początkowe wynoszą

$$\begin{aligned} T_{10} &= \sin 0,2\pi = 0,588 & T_{20} &= \sin 0,4\pi = 0,951 \\ T_{30} &= T_{20} & T_{40} &= T_{10} \end{aligned}$$

Z przyjętej siatki węzłów wynika, że dla każdego poziomu czasowego należy rozwiązać 4 równania z 4 niewiadomymi. Wykorzystując jednakże fakt, że rozkład temperatury jest symetryczny względem  $x = 0,5$  i  $u = 0$  na obu końcach, dla każdego  $t$  otrzymujemy  $T_{31} = T_{21}$  oraz  $T_{41} = T_{11}$ , co redukuje układ równań do dwóch z dwoma niewiadomymi. Równania (3.22) dla  $j = 0$ , po wykorzystaniu warunku  $T_{31} = T_{21}$  są w postaci

$$\begin{aligned} 4T_{11} - T_{21} &= T_{00} + T_{20} = 0,951 \\ -T_{11} + 4T_{21} - T_{21} &= T_{10} + T_{20} = 1,539 \end{aligned}$$

a ich rozwiązaniem jest  $T_{11} = 0,271$  i  $T_{21} = 0,646$ . Podobnie dla  $j = 1$  otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 4T_{12} - T_{22} &= T_{01} + T_{21} = 0,646 \\ -T_{12} + 3T_{22} &= T_{11} + T_{21} = 1,045 \end{aligned}$$

z rozwiązaniem  $T_{12} = 0,271$  i  $T_{22} = 0,439$ . W tab. 3.1 zestawiono wyniki obliczeń, przedstawiające rozkład temperatury w pręcie, a na rys. 3.10 pokazano ich ilustrację graficzną.

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$T(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

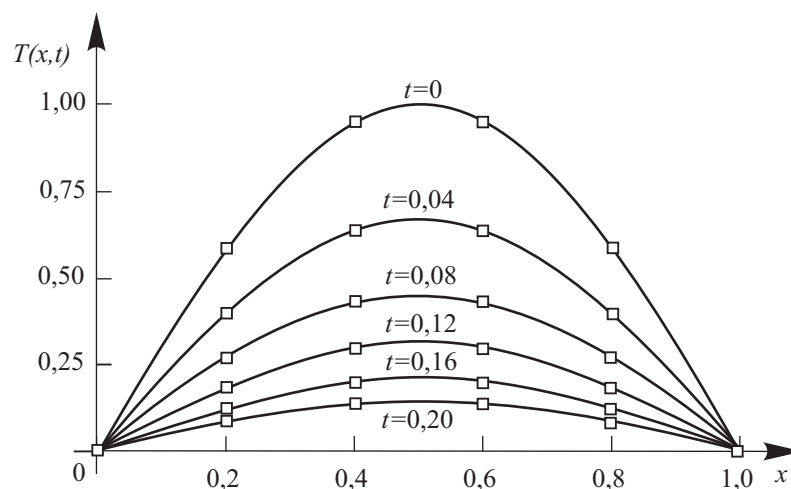
Rozwiązanie bezpośrednio z wykorzystaniem wzoru (3.18) i  $r = 0,25$  oznacza, że  $k = rh^2 = 0,25 \cdot 0,04 = 0,01$  czyli mamy 4 razy więcej kroków obliczeń niż w metodzie Cranka-Nicolsona!

Wzór (3.18) przyjmuje formę

$$T_{i,j+1} = 0,25(T_{i-1,j} + 2T_{ij} + T_{i+1,j}) \quad (3.23)$$

$t$	$x = 0$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,6$	$x = 0,8$	$x = 1$
0,00	0	0,588	0,951	0,951	0,588	0
0,04	0	0,399	0,646	0,646	0,399	0
0,08	0	0,271	0,439	0,439	0,271	0
0,12	0	0,184	0,298	0,298	0,184	0
0,16	0	0,125	0,202	0,202	0,125	0
0,20	0	0,085	0,138	0,138	0,085	0

Tabela 3.1. Wyniki obliczeń rozkładu temperatury w przykładzie 3.4



Rys.3.10. Rozkład temperatury w przecie z przykładu 3.4

Wykorzystując warunki symetrii zadania, mamy dla  $j = 0$ :  $T_{00} = 0$ ,  $T_{10} = 0,588$ ,  $T_{20} = T_{30} = 0,951$  oraz

$$T_{11} = 0,25(T_{00} + 2T_{10} + T_{20}) = 0,532$$

$$T_{21} = 0,25(T_{10} + 2T_{20} + T_{30}) = 0,25(T_{10} + 3T_{20}) = 0,860$$

Dla  $j = 1$  obliczymy

$$T_{12} = 0,25(2T_{11} + T_{21}) = 0,481$$

$$T_{22} = 0,25(T_{11} + 3T_{21}) = 0,778$$

W tab. 3.2 porównano wyniki obliczeń metodą bezpośrednią  $r = 0,25$ , wzór (3.23), z metodą Cranka-Nicolsona (CN) i z rozwiązaniem dokładnym. Jak widać obliczenia metodą bezpośrednią można uznać za akceptowalne.

$t$	$x = 0,2$			$x = 0,4$		
	CN	(3.23)	Dokładnie	CN	(3.23)	Dokładnie
0,04	0,399	0,393	0,396	0,646	0,637	0,641
0,03	0,271	0,263	0,267	0,439	0,426	0,432
0,12	0,181	0,176	0,180	0,298	0,285	0,291
0,16	0,125	0,118	0,121	0,202	0,191	0,196
0,20	0,085	0,079	0,082	0,138	0,128	0,132

Tabela 3.2. Porównanie wyników obliczeń różnymi metodami w przykładzie 3.4

Teraz jeszcze raz wykonamy obliczenia metodą bezpośrednią (3.18) naruszając jednakże warunek (3.19) tzn. przyjmując  $r = 1$  i  $r = 2,5$ .

Dla  $r = 1$  wzór (3.18) jest ( $h = 0,2$ )

$$T_{i,j+1} = T_{i-1,j} - T_{ij} + T_{i+1,j}$$

który prowadzi do wyników zestawionych w tab. 3.3.

$t$	$x = 0,2$	Dokładnie	$x = 0,4$	Dokładnie
0,4	0,363	0,396	0,588	0,641
0,12	0,139	0,180	0,225	0,291
0,20	0,053	0,082	0,086	0,132

Tabela 3.3. Obliczenia w przykładzie 3.4 metodą bezpośrednią dla  $r = 1$

Całkowicie błędne wyniki otrzymamy stosując wzór (3.18) i  $r = 2,5$  ( $h = 0,2$ ), tab. 3.4.

$t$	$x = 0, 2$	Dokładnie	$x = 0, 4$	Dokładnie
0,1	0,0265	0,2191	0,0429	0,3545
0,3	0,0001	0,0304	0,0001	0,0492
0,5	0,0018	0,0042	-0,0011	0,0068

Tabela 3.4. Obliczenia w przykładzie 3.4 metodą bezpośrednią dla  $r = 2, 5$ 

### 3.4. Równania różniczkowe cząstkowe hiperboliczne

Zastosowanie metody różnic skończonych do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych hiperbolicznych omówimy na przykładzie prostego równania falowego, które jest modelem matematycznym problemu drgań sprężystej struny z utwierdzonymi brzegami.

Rozważany problem początkowo-brzegowy ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \quad (3.24)$$

z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{dane początkowe przemieszczenie}) \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (\text{dana początkowa prędkość}) \quad (3.25b)$$

i podstawowymi warunkami brzegowymi

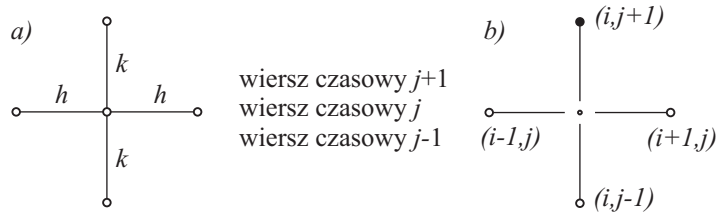
$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (3.25c)$$

Dokładne rozwiązanie jest znane pod nazwą *rozwiązania d'Alamberta* i można je znaleźć w podręcznikach z matematyki. Nas interesować będzie rozwiązanie przybliżone, które może być następnie wykorzystane do rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań hiperbolicznych.

Równanie różnicowe dla równania (3.24) ma formę

$$\frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \quad (3.26)$$

gdzie  $h$  jest wymiarem siatki dla zmiennej przestrzennej  $x$ , a  $k$  jest wymiarem siatki dla zmiennej czasowej  $t$ . Powyższe równanie wiąże ze sobą 5 węzłów siatki, jak to pokazano na rys. 3.11a.



Rys.3.11. a) siatka węzłów dla równania (3.26), b) siatka węzłów dla równania (3.27)

Przyjmując, że  $r^* = k^2/h^2 = 1$  z równania (3.26) otrzymamy wzór

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (3.27)$$

Można wykazać, że dla  $0 < r^* \leq 1$  prezentowana metoda jest stabilna tak, że z (3.27) możemy otrzymać akceptowalne wyniki dla danych początkowych, które nie mają nieciągłości.

Wzór (3.27) mimo swojej prostoty ciągle wiąże ze sobą 3 wiersze czasowe  $j-1, j, j+1$ . Pytaniem więc jest, jak należy wystartować z obliczeniami i jak mogą być wykorzystane warunki początkowe (3.25b). Metoda postępowania jest następująca.

Z warunku  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$  wyprowadzimy wzór różnicowy

$$\frac{1}{2k} (u_{i1} - u_{i,-1}) = g_i \quad \text{skąd mamy } u_{i,-1} = u_{i1} - 2k g_i \quad (3.28)$$

gdzie  $g_i = g(i h)$ . Przyjmując  $j = 0$  (tzn.  $t = 0$ ), wzór (3.27) jest

$$u_{i1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0} - u_{i,-1}$$

a po wykorzystaniu (3.28) otrzymamy

$$u_{i1} = \frac{1}{2} (u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + k g_i \quad (3.29)$$

który to wzór wyraża  $u_{i1}$  w funkcji warunków początkowych.

**Przykład 3.5.** Zastosować omówioną metodę do rozwiązania problemu (3.24), (3.25), przyjmując  $h = k = 0,2$  oraz  $f(x) = \sin \pi x$  i  $g(x) = 0$ .



Do rozwiązania przyjmijmy siatkę węzłów pokazaną na rys. 3.9, ze zmienioną skalą dla  $t$  równą  $0, 2, 0, 4, \dots$  (zamiast  $0, 04, 0, 08, \dots$ ). Warunki początkowe  $u_{00}, u_{10}, \dots$  są takie same jak w przykładzie 3.4, a mianowicie

$$\begin{aligned} u_{00} &= 0 & u_{10} &= 0,587 & u_{20} &= 0,951 \\ u_{30} &= u_{20} & u_{40} &= u_{10} \end{aligned}$$

Wzór (3.29) jest

$$u_{i1} = \frac{1}{2} (u_{i-1,0} + u_{i+1,0})$$

co pozwala obliczyć

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{2} (u_{00} + u_{20}) = \frac{1}{2} \cdot 0,951 = 0,476 \\ u_{21} &= \frac{1}{2} (u_{10} + u_{30}) = \frac{1}{2} \cdot 1,538 = 0,769 \end{aligned}$$

oraz wykorzystując symetrię mamy  $u_{31} = u_{21}$ ,  $u_{41} = u_{11}$ . Następnie, z (3.27), obliczymy

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{01} + u_{21} - u_{10} = 0,769 - 0,587 = 0,182 \\ u_{22} &= u_{11} + u_{31} - u_{20} = 0,476 + 0,769 - 0,951 = 0,294 \end{aligned}$$

i z warunku symetrii  $u_{32} = u_{22}$ ,  $u_{42} = u_{12}$ . Końcowy wynik obliczeń zesta-

$t$	$x = 0$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,6$	$x = 0,8$	$x = 1$
0,0	0	0,587	0,951	0,951	0,587	0
0,2	0	0,476	0,769	0,769	0,476	0
0,4	0	0,182	0,294	0,294	0,182	0
0,6	0	-0,182	-0,294	-0,294	-0,182	0
0,8	0	-0,476	-0,769	-0,769	-0,476	0
1,0	0	-0,587	-0,951	-0,951	-0,587	0

Tabela 3.5. Wyniki obliczeń w przykładzie 3.5

wiono w tab. 3.5. Dokładne rozwiązanie d'Alamberta wynosi

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$$

## Rozdział 4

# Elementy aproksymacji i interpolacji funkcji

### 4.1. Uwagi wstępne

W tym rozdziale przedstawimy w sposób zwięzły podstawowe pojęcia i metody *teorii aproksymacji* i jej szczególnego przypadku, *aproksymacji interpolacyjnej*, którą będziemy krótko nazywać *interpolacją* [4]. Aproksymację, jak wiemy, wykorzystujemy kiedy dana funkcja ma złożoną postać lub dana jest w postaci dyskretnej, lub gdy w ogóle jest nieznana, jak to ma miejsce przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. W każdym z tych przypadków poszukujemy innej, na ogół prostej funkcji, która dobrze przybliży funkcję pierwotną. W zasadzie ograniczymy się tylko do aproksymacji wielomianowej i to w takim zakresie, który będzie nam potrzebny w następnych rozdziałach podręcznika. Wzory i równania wyprowadzimy w zapisie wskaźnikowym oraz w zapisie macierzowym, wykorzystując operacje rachunku macierzowego, zestawione w dodatku D.

### 4.2. Aproksymacja optymalna

*Zadanie aproksymacji optymalnej* w bazie jednomianów polega na dobraniu wielomianu aproksymacyjnego

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^m a_k x^k = \mathbf{p}(x) \mathbf{a} \quad (4.1)$$

gdzie:

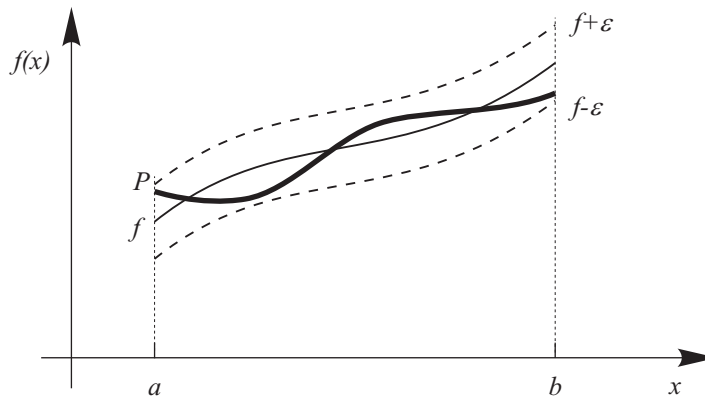
$\mathbf{p} = [1 \ x \dots x^m]$  – macierz jednowierszowa jednomianów,

$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \dots a_m]^T$  – wektor nieznanych parametrów aproksymacji,

w taki sposób, aby przybliżał on daną funkcję  $f(x)$  w pewnym sensie najlepiej. Tak sformułowane zadanie może być rozwiązane, jeśli ustalimy stopień wielomianu  $m$  oraz przyjmiemy kryterium, według którego będziemy oceniać jakość aproksymacji.

Przyjęcie określonego stopnia  $m$  wielomianu aproksymacyjnego jest trudne, zależne od wielu czynników, i może decydować o jakości aproksymacji. Kryteriów oceny aproksymacji jest wiele, w podręczniku ograniczymy się do *metody najmniejszych kwadratów*, formułującej kryterium najczęściej wykorzystywane.

W dalszym ciągu przedstawimy metodę najmniejszych kwadratów dla tzw. aproksymacji ciągłej i aproksymacji punktowej. *Aproksymacją ciągłą* nazwiemy aproksymację funkcji  $f(x)$  określonej w pewnym przedziale, natomiast w *aproksymacji punktowej* będziemy aproksymować dyskretny zbiór wartości funkcji  $f(x)$ , danych w tzw. węzłach aproksymacji  $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ .



Rys.4.1. Interpretacja graficzna twierdzenia Weierstrassa

W podręczniku najczęściej będziemy wykorzystywali funkcje aproksymacyjne w postaci wielomianów algebraicznych (4.1). Skuteczność takiej aproksymacji ciągłej wynika z twierdzenia Weierstrassa.

**Twierdzenie 1 (Weierstrassa).**

Jeśli  $f(x)$  jest funkcją określoną i ciągłą w przedziale  $[a, b]$  i dane jest  $\varepsilon > 0$ , to wówczas istnieje wielomian  $P(x)$ , określony w  $[a, b]$ , taki że

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } x \in [a, b]$$

Z twierdzenia tego wynika ważny wniosek, że zawsze możemy wyznaczyć taki wielomian  $P(x)$ , który będzie wystarczająco bliski danej funkcji, rys. 4.1.

**4.3. Aproksymacja ciągła**

Funkcję  $f(x) \in C[a, b]$  aproksymujemy w metodzie najmniejszych kwadratów wielomianem  $P_m$ , stopnia najwyżej  $m$ , wykorzystując warunek minimalizacji błędów  $\varepsilon$  w sensie normy  $L_2$  (patrz dodatek A)

$$\varepsilon = \|f(x) - P_m(x)\|_0 = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx \quad (4.2)$$

Podstawiając (4.1) do (4.2) otrzymamy funkcję

$$\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^m a_k x^k \right)^2 dx \quad (4.3a)$$

która po wprowadzeniu zapisu macierzowego ma postać

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \int_a^b (f(x) - \mathbf{p}(x)\mathbf{a})^2 dx \quad (4.3b)$$

Nieznane parametry aproksymacji  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , obliczymy z warunku koniecznego minimum  $\varepsilon$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = 0 \quad \text{dla każdego } i = 0, 1, \dots, m \quad (4.4)$$

Ponieważ

$$\varepsilon = \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^m a_k x^k \right)^2 dx$$

to otrzymujemy

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = -2 \int_a^b x^i f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^{i+k} dx \quad (4.5)$$

Wykorzystując (4.5) w (4.4), otrzymujemy tak zwany *układ  $m + 1$  równań normalnych*

$$\sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^{i+k} dx = \int_a^b x^i f(x) dx \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.6a)$$

dla obliczenia niewiadomych  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Są to równania liniowe, które zawsze mają rozwiązanie jednoznaczne pod warunkiem, że  $f \in C[a, b]$  i  $a \neq b$ . Odpowiednikiem równań (4.6a) w zapisie macierzowym jest równanie

$$\left[ \int_a^b \mathbf{p}^T(x) \mathbf{p}(x) dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \mathbf{p}^T(x) f(x) dx \quad (4.6b)$$

**Przykład 4.1.** Obliczymy metodą najmniejszych kwadratów aproksymację funkcji  $f(x) = \sin \pi x$  w przedziale  $[0, 1]$ .

Wielomian aproksymacyjny przyjmiemy w formie

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Wykorzystując (4.6a) dostaniemy układ równań

$$\begin{aligned} a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx &= \int_0^1 x \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx &= \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx \end{aligned} \quad (4.7a)$$

lub stosując zapis macierzowy (4.6b)

$$\left[ \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \sin \pi x dx \quad (4.7b)$$

Wykonując nakazane całkowania otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0,050465 \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4,12251$$

Wielomian aproksymacyjny ma postać

$$P_2(x) = -4,12251x^2 + 4,12251x - 0,050465$$

Błąd aproksymacji (4.3) wynosi

$$\varepsilon = \int_0^1 (\sin \pi x + 4,12251x^2 - 4,12251x + 0,050465)^2 dx = 0,01$$

Zauważmy, że elementy macierzy układu równań (4.7) obliczyć można z ogólnego wzoru

$$\int_a^b x^{i+k} dx = \frac{b^{i+k+1} - a^{i+k+1}}{i+k+1}$$

Tak obliczone elementy tworzą tzw. *macierz Hilberta*, która jest źle uwarunkowana i przy jej obliczaniu występuje duży błąd obcięcia, co ma znaczenie przy rozwiązywaniu dużego układu równań.

W dalszym ciągu uogólnimy wyprowadzone równania na przypadek aproksymacji w innej przestrzeni funkcji bazowych niż przestrzeń jednomianów. Wy maga to jednakże podania dwóch definicji i jednego twierdzenia.

**Definicja 1.** Zbiór funkcji  $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$  nazwiemy *liniowo niezależnym* w przedziale  $[a, b]$ , gdzie  $b > a$ , jeśli warunek

$$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_m u_m(x) = 0 \quad \text{dla każdego } x \in [a, b]$$

ma miejsce tylko dla  $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$ . W przeciwnym przypadku zbiór funkcji jest *liniowo zależny*.

**Definicja 2.** Funkcję wagową  $w$  w przedziale  $[a, b]$  nazwiemy dowolną nieujemną funkcję całkowalną w tym przedziale.

Funkcję wagową będziemy też nazywać *funkcją testową* i jej celem jest rozłożenie wagi (lub: ważności) aproksymacji w różnych miejscach przedziału  $[a, b]$ , co powinno poprawić jakość aproksymacji.

**Twierdzenie 2.**

Jeśli  $u_i$  jest wielomianem stopnia  $i$ , dla każdego  $i = 0, 1, \dots, m$ , to wówczas zbiór funkcji  $\{u_0, \dots, u_m\}$  jest liniowo niezależny w przedziale  $[a, b]$ , gdzie  $a < b$ .

Przyjmijmy teraz, że  $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$  jest zbiorem funkcji bazowych liniowo niezależnych w przedziale  $[a, b]$  i  $w$  jest funkcją wagową w  $[a, b]$  oraz  $f \in C[a, b]$ . Parametry  $a_i, i = 0, 1, \dots, m$ , funkcji aproksymacyjnej

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{a} \quad (4.8)$$

obliczymy minimalizując błąd z wagą  $w(x)$

$$\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) \right]^2 dx \quad (4.9a)$$

który w zapisie macierzowym ma formę

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \int_a^b w(x) \left[ (f(x) - \mathbf{p}(x)\mathbf{a}) \right]^2 dx \quad (4.9b)$$

gdzie:

$\mathbf{p}(x) = [u_0, u_1, \dots, u_m]$  – macierz jednowierszowa funkcji bazowych.

Układ równań normalnych, otrzymany z warunku koniecznego minimum  $\varepsilon$ , ma postać analogiczną do (4.6)

$$\int_a^b w(x) f(x) u_i(x) dx = \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b w(x) u_k(x) u_i(x) dx \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, m \quad (4.10a)$$

lub w postaci macierzowej

$$\left[ \int_a^b w(x) \mathbf{p}^T(x) \mathbf{p}(x) dx \right] \mathbf{a} = \int_a^b \mathbf{p}^T(x) w(x) f(x) dx \quad (4.10b)$$

Przykładami funkcji bazowych  $\mathbf{p}(x)$  są *wielomiany trygonometryczne*, *wielomiany Legendre'a* lub *wielomiany Czebyszewa*.

Czytelników zainteresowanych dalszymi studiami problematyki aproksymacji ciągłej odsyłamy do podręcznika z metod numerycznych [4, 6].

#### 4.4. Aproksymacja punktowa

W aproksymacji punktowej funkcja  $f(x)$  dana jest w formie dyskretnej w postaci zbioru wartości funkcji  $\mathbf{F} = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T$  (gdzie oznaczono  $f_i \equiv f(x_i)$ ) w węzłach aproksymacji  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ .

W ogólnym przypadku wielomian aproksymacyjny  $P_m(x)$  można wybrać w postaci *wielomianu uogólnionego*

$$\begin{aligned} P_m(x) &= a_m u_m(x) + a_{m-1} u_{m-1}(x) + \dots + a_0 u_0(x) = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k u_k(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie  $\mathbf{p}(x)$  jest macierzą jednowierszową funkcji bazowych  $u_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , znanych i liniowo niezależnych

$$\mathbf{p}(x) = [u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)]$$

Odpowiednikiem błędu  $\varepsilon$  (4.2) w metodzie najmniejszych kwadratów jest teraz błąd

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \mathbf{p}(x_i) \mathbf{a}]^2 \quad (4.12)$$



Warunek konieczny minimum funkcji  $\varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_m)$  napiszemy od razu w formie równania macierzowego

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} : \left[ \sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \right] \mathbf{a} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) f(x_i) \quad (4.13)$$

Jest to liniowy układ równań normalnych, który ma rozwiązanie jednoznaczne pod warunkiem, że  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Przyjmując oznaczenia macierzy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \quad \mathbf{B} = \left[ \mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \dots \mathbf{p}^T(x_n) \right] \quad (4.14)$$

równanie (4.13) możemy napisać w zwartej formie

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{F} \quad (4.15)$$

Podstawiając do (4.11) rozwiązanie  $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}$  otrzymamy wzór na wielomian uogólniony

$$P_m(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{N}(x) \mathbf{F} \quad (4.16)$$

gdzie zdefiniowano *macierz jednowierszową funkcji*

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.17)$$

We wzorze (4.16) współczynnikami kombinacji liniowej funkcji  $N_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  są obecnie znane wartości funkcji  $f(x_i)$ , zawarte w wektorze  $\mathbf{F}$ . Ponieważ zwykle funkcja  $f(x)$  ma jakiś sens fizyczny (na przykład jest to funkcja temperatury, przemieszczenia, naprężenia, ...) to elementy wektora  $\mathbf{F}$  nazywa się *fizycznymi stopniami swobody*. Elementy zawarte w wektorze  $\mathbf{a}$  będziemy natomiast nazywać *matematycznymi stopniami swobody*.

W przypadku, kiedy wielomian aproksymacyjny stopnia  $m < n$  ma postać

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (4.18)$$

tzn. funkcje bazowe są jednomianami, układ równań normalnych w formie



$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \mathbf{p}^T(x_2) \mathbf{p}^T(x_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 536 \end{bmatrix}$$

Równanie  $\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{F}$  jest w formie

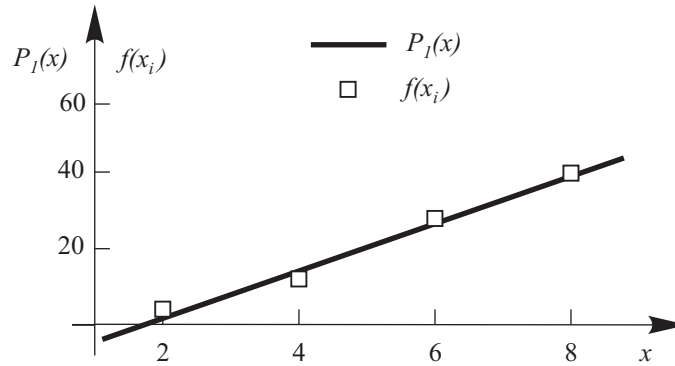
$$\begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 536 \end{bmatrix}$$

i ma rozwiązanie  $a_0 = -12,50$  i  $a_1 = 6,55$ .

Wielomian aproksymacyjny wynosi

$$P_1(x) = -12,50 + 6,55x$$

Wynik obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 4.2.



Rys.4.2. Wyniki obliczeń w przykładzie 4.2

**Przykład 4.3.** Zastosujemy aproksymację kwadratową  $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  do danych z tab. 4.2

Obecnie  $n = 4$  i  $m = 2$ . Podobnie jak w przykładzie 4.2 niewiadome parametry aproksymacji  $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$  obliczymy korzystając z równania macierzowego (4.15). Potrzebne do obliczeń wektory i macierze mają postać

$$\mathbf{p} = [1 \ x \ x^2]$$

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$f(x_i)$	1,0000	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

Tabela 4.2. Dane do przykładu 4.3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 1 & \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 & \sum_{i=0}^4 x_i^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 1,875 \\ 2,5 & 1,875 & 1,5625 \\ 1,875 & 1,5625 & 1,3828 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}^T(x_0) \dots \mathbf{p}^T(x_4)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0,50 & 0,75 & 1,00 \\ 0 & 0,0625 & 0,25 & 0,5625 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{F} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,2840 \\ 1,6487 \\ 2,1170 \\ 2,7183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,7680 \\ 5,4514 \\ 4,4015 \end{bmatrix}$$

Równanie  $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{F}$  ma postać

$$\begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 1,875 \\ 2,5 & 1,875 & 1,5625 \\ 1,875 & 1,5625 & 1,3828 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,7680 \\ 5,4514 \\ 4,4015 \end{bmatrix}$$

a jego rozwiązanie wynosi  $a_0 = 1,0052$ ,  $a_1 = 0,8641$ ,  $a_2 = 0,8437$ .

Wielomian aproksymacyjny jest

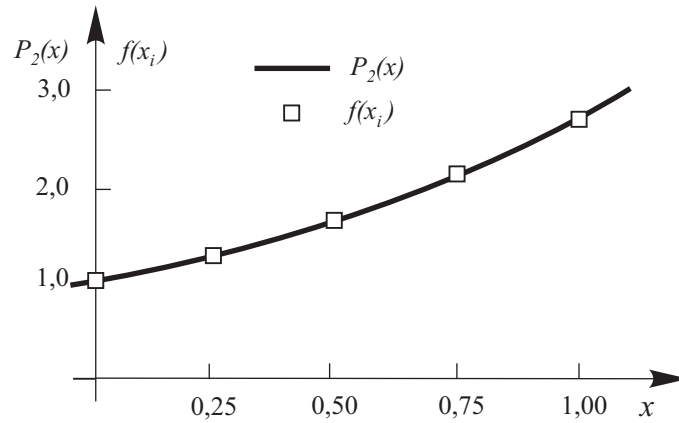
$$P_2(x) = 1,0052 + 0,8641x + 0,8437x^2$$

Na rys. 4.3 porównano wynik obliczeń z danymi z tab. 4.2.

Błąd

$$\sum_{i=0}^4 [f(x_i) - P_2(x_i)]^2 = 2,76 \cdot 10^{-4}$$

jest najmniejszym błędem, jaki można uzyskać dla kwadratowego wielomianu aproksymacyjnego.

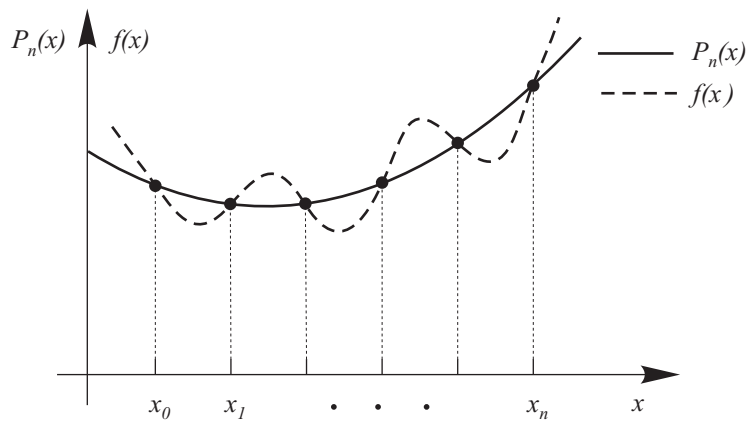


Rys.4.3. Wyniki obliczeń w przykładzie 4.3

## 4.5. Interpolacja

### 4.5.1. Interpolacja Lagrange'a funkcji jednej zmiennej

Interpolacja funkcji  $f(x)$  jest szczególnym przypadkiem aproksymacji, który ma miejsce dla  $m = n$ . Wówczas w węzłach interpolacji  $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n]$  wartość funkcji interpolacyjnej  $P(x)$  jest dokładnie równa funkcji interpolowanej  $f(x)$ , rys. 4.4

Rys.4.4. Interpolacja funkcji  $f(x)$

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.20)$$

Wzory i równania wprowadzone w punkcie 4.4 są oczywiście ważne również i dla interpolacji, po uwzględnieniu, że  $m = n$ . Prościej jednakże sposobem jest bezpośrednio wykorzystanie warunków (4.20).

Jeśli funkcję interpolacyjną wybierzemy w postaci wielomianu uogólnionego (4.11), to równania (4.20) przybierają postać

$$\mathbf{p}(x_i) \mathbf{a} = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.21a)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\mathbf{B}^T \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (4.21b)$$

gdzie wykorzystano definicję (4.14) macierzy  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}^T = [\mathbf{p}^T(x_0) \mathbf{p}^T(x_1) \dots \mathbf{p}^T(x_n)]^T = \begin{bmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \dots & u_n(x_n) \end{bmatrix}$$

oraz wektorów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T \quad \mathbf{F} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_n]^T$$

Podstawiając rozwiązanie równania (4.21b)  $\mathbf{a} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{F}$  do wielomianu interpolacyjnego (4.11) otrzymamy

$$P_n(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{a} = \mathbf{p}(x) (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{N}(x) \mathbf{F} \quad (4.22)$$

gdzie obecnie  $\mathbf{N}(x)$  zawiera funkcje liniowo niezależne i tworzy *nową bazę interpolacyjną*

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) (\mathbf{B}^T)^{-1} = [N_0(x) \ N_1(x) \ \dots \ N_n(x)] \quad (4.23)$$

z fizycznymi stopniami swobody zawartymi w wektorze  $\mathbf{F}$ .

Jeśli bazę  $\mathbf{p}(x)$  przyjmujemy w postaci jednomianowej

$$\mathbf{p}(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n]$$

to układ równań (4.21) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

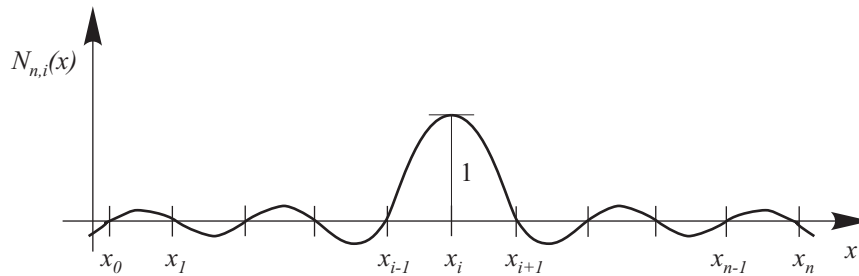
Ponadto baza  $\mathbf{N}(x)$  jest wówczas tzw. *bazą Lagrange'a*

$$\mathbf{N}(x) = [N_{n,0}(x) \ N_{n,1}(x) \ \dots \ N_{n,n}(x)]$$

utworzoną z wielomianów bazowych Lagrange'a stopnia  $n$  o postaci ogólnej

$$\begin{aligned} N_{n,i}(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Na rys. 4.5 pokazano wykres funkcji Lagrange'a  $N_{n,i}(x)$ .



Rys.4.5. Wykres funkcji Lagrange'a  $N_{n,i}(x)$

Z interpretacji wzoru (4.22) oraz własności interpolacji Lagrange'a ( $N_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}$ , gdzie  $\delta_{ki}$  jest deltą Kroneckera o własności  $\delta_{ki} = 1$  dla  $k = i$  oraz  $\delta_{ki} = 0$  dla  $k \neq i$ ) wynika ważna równość

$$\sum_{k=0}^n N_{n,k}(x) = 1 \quad (4.25a)$$

wyrażająca tzw. warunek kompletności rzędu zerowego dla funkcji bazowych. Ogólnie warunek kompletności rzędu  $p$  jest postaci

$$\sum_{k=0}^n N_{n,k}(x)x_k^p = x^p, \quad p = 0, 1, \dots, n \quad (4.25b)$$

Jeśli funkcje bazowe spełniają warunki kompletności do rzędu  $p$ , to oznacza to, że przez ich kombinację liniową można dokładnie przedstawić dowolny wielomian algebraiczny aż do stopnia  $p$  włącznie. W praktyce warunki kompletności (zwłaszcza najprostszy rzędu zerowego) wykorzystujemy do sprawdzenia poprawności wyników obliczeń funkcji bazowych Lagrange'a.

Błąd interpolacji Lagrange'a wyraża wzór

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (4.26)$$

gdzie  $f \in C^{n+1}[a, b]$  i  $\xi \in (a, b)$ .

**Przykład 4.4.** Wyprowadzić wzór na liniowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a  $P_1(x)$  ( $n = 1$ ).

Dane: węzły interpolacji  $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1)$ ,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:  $\mathbf{F} = [f_0 \ f_1]^T$ .

Wielomian interpolacyjny (4.22) ma postać

$$P_1(x) = N_0(x)f_0 + N_1(x)f_1 = \mathbf{N}(x)\mathbf{F}$$

Funkcje bazowe obliczymy najpierw z wzoru (4.23), gdzie

$$\mathbf{p}(x) = [1 \ x] \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{B}^T)^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{bmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymując

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x)(\mathbf{B}^T)^{-1} = [1 \ x] \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{bmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[ \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right]$$

Ten sam wynik oczywiście otrzymamy wykorzystując wprost wzór (4.24).

Przyjmując  $x_0 = 0$  oraz  $x_1 = L$  mamy

$$N_{1,0}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_{1,1}(x) = \frac{x}{L} \quad (4.27)$$



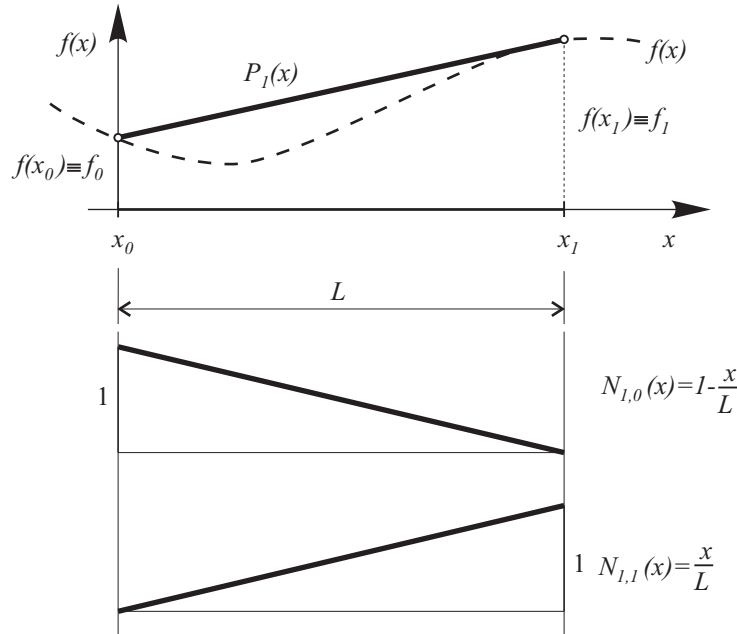
Powyzsze funkcje spełniają warunki kompletności rzędu zerowego i rzędu pierwszego, poniewaz

$$\sum_{k=0}^1 N_{1,k}(x) = 1 - \frac{x}{L} + \frac{x}{L} = 1$$

oraz

$$\sum_{k=0}^1 N_{1,k}(x)x_k = \left(1 - \frac{x}{L}\right)x_0 + \frac{x}{L}x_1 = 0 + x = x$$

Na rys. 4.6 pokazano wykresy liniowych funkcji bazowych Lagrange'a (4.27).



Rys.4.6. Liniowa interpolacja Lagrange'a

**Przykład 4.5.** Wyprowadzić wzór na kwadratowy wielomian interpolacyjny Lagrange'a  $P_2(x)$  ( $n = 2$ ).

Dane: węzły interpolacji  $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$ ,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:  $\mathbf{F} = [f_0 \ f_1 \ f_2]^T$ .

Wielomian interpolacyjny (4.22) jest w formie

$$P_2(x) = N_0(x)f_0 + N_1(x)f_1 + N_2(x)f_2 = \mathbf{N}(x)\mathbf{F} \quad (4.28)$$

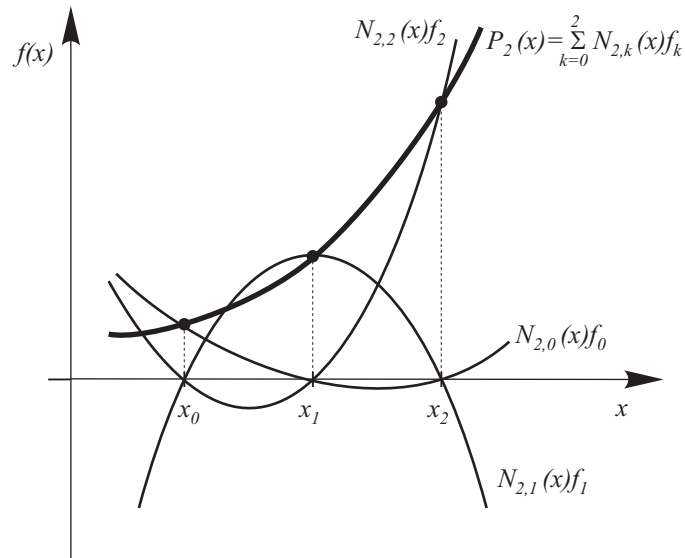
Funkcje bazowe  $N_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$  znowu można obliczyć z wzoru (4.23), co już jednak jest bardziej kłopotliwe (można potraktować to jako ćwiczenie), dlatego skorzystamy od razu z wzoru (4.24) otrzymując

$$N_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$N_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Na rys. 4.7 zilustrowano graficznie wzór (4.28).



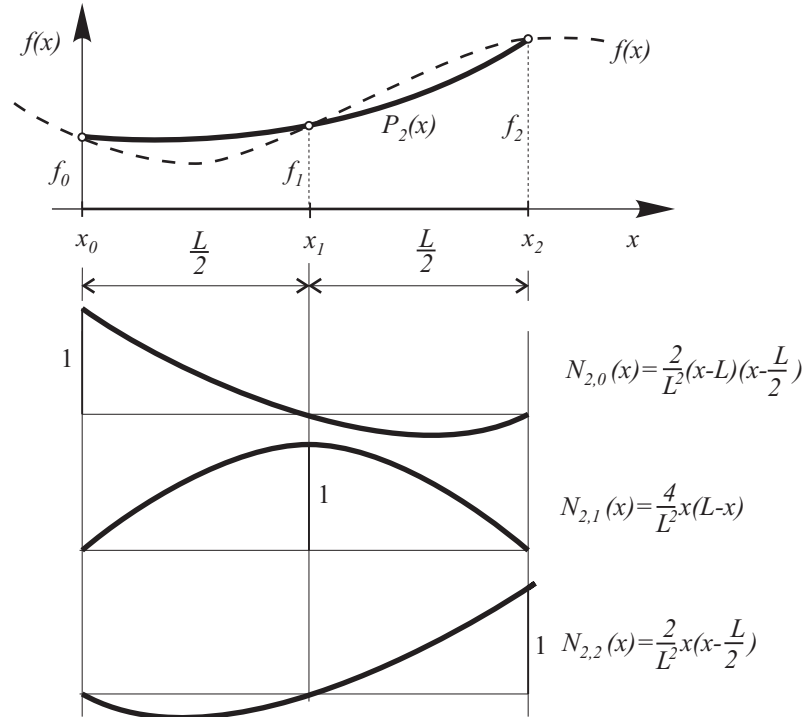
Rys.4.7. Interpretacja graficzna kwadratowego wielomianu interpolacyjnego  
Przyjmując  $x_0 = 0$  oraz  $x_1 = \frac{L}{2}$  i  $x_2 = L$ , dostaniemy

$$N_{2,0}(x) = \frac{2}{L^2} (x - L) \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$N_{2,1}(x) = \frac{4}{L^2} x (L - x)$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{2}{L^2} x \left(x - \frac{L}{2}\right)$$
(4.29)

Na rys. 4.8 narysowano kwadratowe funkcje bazowe Lagrange'a (4.29).



Rys.4.8. Kwadratowa interpolacja Lagrange'a

**Przykład 4.6.** Wyprowadzić wzór interpolacyjny Lagrange'a stopnia drugiego, przybliżający funkcję  $f(x) = \frac{1}{x}$ , przyjmując węzły interpolacji  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2,5$  i  $x_2 = 4$ .

Wykorzystując wzory z przykładu 4.5, obliczymy

$$N_{2,0}(x) = \frac{(x - 2,5)(x - 4)}{(2 - 2,5)(2 - 4)} = x^2 - 6,5x + 10$$

$$N_{2,1}(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2,5 - 2)(2,5 - 4)} = \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32)$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x - 2)(x - 2,5)}{(4 - 2)(4 - 2,5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4,5x + 5)$$

Wartości funkcji  $f(x)$  w węzłach interpolacji wynoszą

$$f_0 \equiv f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$f_1 \equiv f(x_1) = f(2,5) = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

$$f_2 \equiv f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} = 0,25$$

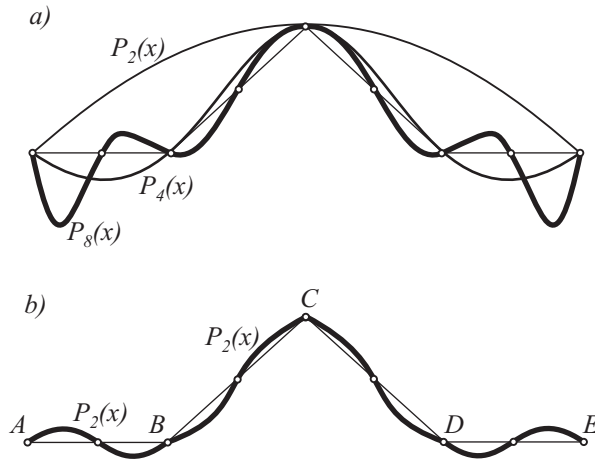
Wielomian interpolacyjny Lagrange'a stopnia drugiego ma postać

$$\begin{aligned} P_2(x) = \sum_{k=0}^2 N_{2,k}(x) f(x_k) &= (x^2 - 6,5x + 10) \cdot 0,5 + \frac{1}{3}(-4x^2 + 24x - 32) \cdot 0,4 + \\ &+ \frac{1}{3}(x^2 - 4,5x + 5) \cdot 0,25 = 0,05x^2 - 0,425x + 1,15 \end{aligned}$$

Dla przykładu,  $P_2(3) = 0,325$ , a  $f(3) = \frac{1}{3} \cong 0,333$ .

Z powyższego przykładu wynika, że obliczony wielomian interpolacyjny dobrze przybliża funkcję  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Nie zawsze jednak tak jest, co widzimy rozważając interpolację pokazaną na rys. 4.9a. Na rysunku tym funkcją interpolowaną jest prosta łamana A–B–C–D–E, a funkcjami interpolacyjnymi są wielomiany stopnia drugiego  $P_2(x)$ , czwartego  $P_4(x)$  i ósmego  $P_8(x)$ . Jak widać, w przypadku wielomianu interpolacyjnego  $P_8(x)$  jakość interpolacji w skrajnych przedziałach trudno uznać za zadowalającą: różnice pomiędzy  $f(x)$  i  $P_8(x)$  są duże. Ten efekt pogarszania się jakości interpolacji wielomianami wysokiego stopnia w skrajnych przedziałach znany jest jako tzw. *efekt Rungego*. Dlatego zazwyczaj interpolację funkcjami wielomianowymi ograniczamy do wielomianów niskiego stopnia. Pewnym wyjściem jest zastosowanie *interpolacji sklepanej*, która jest złożona przedziałami z wielomianów niskiego stopnia. Pokazano to na rys.4.9b, gdzie wielomian interpolacyjny jest złożony z czterech wielomianów stopnia drugiego. Taka idea interpolacji sklepanej jest wykorzystywana we współczesnych metodach komputerowych, na przykład w metodzie elementów skończonych, przedstawionej w rozdziale szóstym.

Innym problemem w stosowaniu interpolacji Lagrange'a jest to, że jest ona klasy  $C^0$ , przez co rozumiemy, że w węzłach interpolacji spełniony jest tylko warunek zgodności wartości funkcji interpolowanej z funkcją interpolującą, natomiast nie ma ciągłości w węzłach przynajmniej pierwszych pochodnych (punkty B, C i D na 4.9b). Ten warunek spełnia interpolacja Hermite'a, opisana w p. 4.6.



Rys.4.9. a) efekt Rungego, b) interpolacja sklejana

#### 4.5.2. Interpolacja Lagrange'a funkcji dwóch zmiennych

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji  $f(x, y)$  obliczać będziemy podobnie jak to miało miejsce przy interpolacji funkcji jednej zmiennej, pamiętając jednakże, że obecnie funkcje i macierze funkcyjne zależą od dwóch zmiennych  $(x, y)$ . Przepisując wzór (4.22) mamy

$$P_n(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{F} \quad (4.30)$$

gdzie macierz funkcji bazowych Lagrange'a wyrażona jest wzorem

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{p}(x, y) (\mathbf{B}^T)^{-1} \quad (4.31)$$

Zastosowanie powyższych wzorów zilustrujemy dwoma przykładami interpolacji funkcji nad obszarem trójkątnym i prostokątnym.

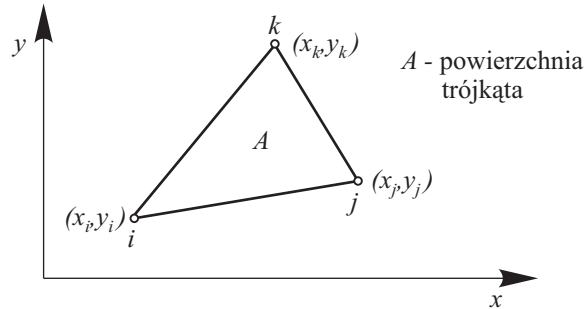
**Przykład 4.7.** Wyprowadzić wzór interpolacyjny Lagrange'a nad obszarem trójkątnym z trzema węzłami.

Dane: węzły interpolacji  $\mathbf{x} = ((x_i, y_i) (x_j, y_j) (x_k, y_k))$ ,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:

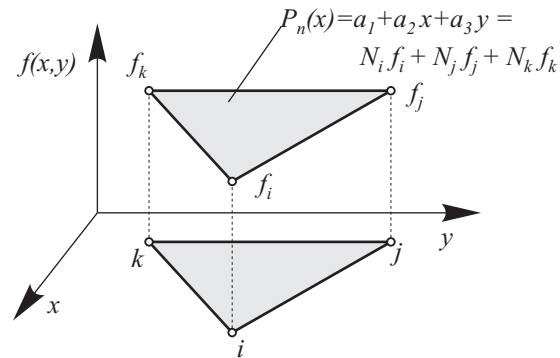
$$\mathbf{F} = [f(x_i, y_i) \equiv f_i \quad f(x_j, y_j) \equiv f_j \quad f(x_k, y_k) \equiv f_k]^T.$$

Na rys. 4.10 pokazano rozważany trójkąt z numeracją węzłów i współzrzednymi węzłów.



Rys.4.10. Obszar trójkątny z trzema węzłami

Interpolację funkcji możemy też wyrazić poprzez matematyczne stopnie swobody, wykorzystując wzór (4.11) (dla  $m = n$ ), co zostało pokazane na rys. 4.11. Należy zauważyć, że numeracja węzłów  $i, j, k$  jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara.



Rys.4.11. Interpolacja liniowa funkcji  $f(x, y)$  nad obszarem trójkątnym

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów (4.30) i (4.31), napiszemy potrzebne wektory i macierze.

Macierz jednowierszowa jednomianów

$$\mathbf{p}(x, y) = [1 \ x \ y]$$

Macierz  $B^T$  i jej odwrotność

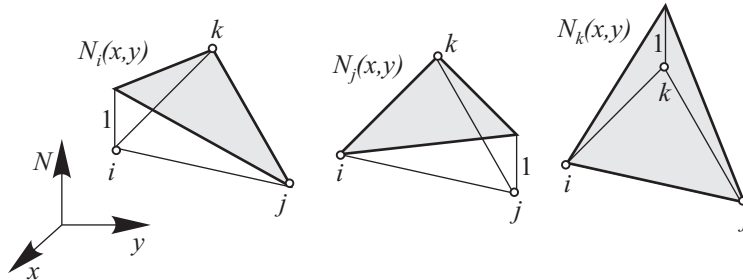
$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

$$(B^T)^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

gdzie  $A$  jest powierzchnią trójkąta lub  $2A$  jest wyznacznikiem macierzy  $B^T$ . Znak wyznacznika się zmieni, jeśli węzły zostaną ponumerowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Funkcje bazowe Lagrange'a otrzymamy ze wzoru (4.31) (pomijając w dalszym ciągu pierwszy dolny indeks)

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{aligned} \quad (4.32)$$



Rys.4.12. Liniowe funkcje bazowe Lagrange'a nad obszarem trójkątnym

Funkcje te możemy również zapisać w zwartej postaci

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \quad \beta_i = y_j - y_k \quad \gamma_i = x_k - x_j \quad i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (4.33)$$

ze zmianą indeksów wg permutacji podstawowej  $i \rightarrow j \rightarrow k$ . Funkcje bazowe (4.32) spełniają oczywiście warunek kompletności  $\sum_k^3 N_k(x, y) = 1$ . Na rys. 4.12 pokazano wykresy funkcji bazowych (4.32).

Wzór interpolacyjny Lagrange'a przyjmuje formę

$$P_2(x, y) = N_i(x, y) f_i + N_j(x, y) f_j + N_k(x, y) f_k$$

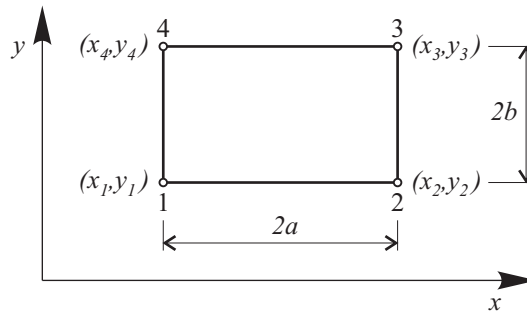
**Przykład 4.8.** Wyprowadzić funkcje bazowe Lagrange'a nad obszarem prostokątnym z czterema węzłami.

Dane: węzły interpolacji  $\mathbf{x} = ((x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) (x_4, y_4))$ ,

wartości funkcji interpolowanej w węzłach:

$$\mathbf{F} = [f(x_1, y_1) \equiv f_1 \quad f(x_2, y_2) \equiv f_2 \quad f(x_3, y_3) \equiv f_3 \quad f(x_4, y_4) \equiv f_4]^T.$$

Rozważany obszar prostokątny jest pokazany na rys. 4.13.



Rys.4.13. Obszar prostokątny z czterema węzłami

Macierz jednowierszową jednomianów przyjmiemy w postaci

$$\mathbf{p}(x, y) = [1 \ x \ y \ xy]$$

Można byłoby zamiast bazowego elementu kwadratowego  $xy$  wybrać  $x^2$  lub  $y^2$ . Wybór  $xy$  jest jednak preferowany, ponieważ implikuje to, że zależność funkcji interpolacyjnych od  $x$  i  $y$  jest podobna, tzn. że aproksymacja jest tego samego typu w tych kierunkach. Pomimo, że w macierzy  $\mathbf{p}(x, y)$  występuje element kwadratowy  $xy$ , to zmiana funkcji bazowych w kierunkach  $x$  i  $y$  (dla odpowiednio  $y = const.$  i  $x = const.$ ) jest liniowa. Z tego powodu taka interpolacja jest nazywana *interpolacją dwuliniową*.

Funkcje bazowe interpolacji można obliczyć w sposób analogiczny jak to miało miejsce w przykładzie 4.7. Łatwiej jednak jest skorzystać ze wzoru



(4.24). Rozważmy na przykład węzeł 1 na rys. 4.13. Funkcja bazowa Lagrange'a w kierunku  $x$  jest następująca

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

natomiast w kierunku  $y$  jest

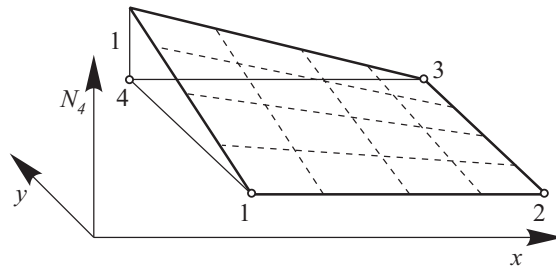
$$L_1(y) = \frac{y - y_4}{y_1 - y_4}$$

Funkcję bazową  $N_1(x, y)$  obliczymy ze wzoru

$$N_1(x, y) = L_1(x) L_2(y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_4}{y_1 - y_4} = \frac{1}{4ab} (x - x_2) (y - y_4)$$

gdzie  $2a = x_2 - x_1 = x_3 - x_4$  i  $2b = y_4 - y_1 = y_3 - y_2$ . Łatwo sprawdzić, że warunki interpolacji są spełnione:  $N_1(x_1, y_1) = 1$  i  $N_1(x_2, y_2) = N_1(x_3, y_3) = N_1(x_4, y_4) = 0$ . Wyprowadzając w ten sposób pozostałe funkcje bazowe otrzymamy cztery funkcje bazowe Lagrange'a

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_2) (y - y_4) \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_1) (y - y_3) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_4) (y - y_2) \\ N_4(x, y) &= \frac{1}{4ab} (x - x_3) (y - y_1) \end{aligned} \tag{4.34}$$



Rys.4.14. Dwuliniowa funkcja bazowa Lagrange'a  $N_4(x, y)$  nad obszarem prostokątnym

Na rys. 4.14 pokazano przykładowo wykres funkcji  $N_4(x, y)$ . Funkcja zmienia się liniowo dla linii równoległych do osi układu współrzędnych. Obecność członu  $xy$  w  $\mathbf{p}(x, y)$  oznacza, że w każdym innym kierunku zmiana funkcji jest już nieliniowa.

Budowa funkcji bazowych Lagrange'a w obszarze dwuwymiarowym jest zadaniem trudnym, wymagającym dużego doświadczenia. Pomijając fakt, że obszar, w którym dokonujemy interpolacji, może mieć złożoną geometrię, istotny jest wybór odpowiedniej macierzy  $\mathbf{p}(x, y)$ . Korzysta się w tym przypadku z *trójkąta Pascala*, w którym jednomiany są ułożone w sposób systematyczny, rys. 4.15. Dla interpolacji jednowymiarowej trójkąt Pascala degeneruje się

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & x & & y \\
 & & & & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & & & & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 & & & & & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Rys.4.15. Trójkąt Pascala

do 1,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3, \dots$ . Jeśli w macierzy  $\mathbf{p}(x, y)$  zawarte są wszystkie człony określonego rzędu (z jednej linii trójkąta Pascala), to otrzymujemy w efekcie *kompletny wielomian* interpolacji. Często, z przyczyn uzasadnionych, konstruuje się wielomiany niekompletne. Nie wchodząc w szczegóły powiemy tylko, że uzasadnioną przyczyną jest brak poprawy zbieżności interpolacji przy zwiększaniu stopnia wielomianu. Wówczas pomijamy te człony, które są tego przyczyną (tzw. człony pasożytnicze).

## 4.6. Interpolacja Hermite'a

W zastosowaniach praktycznych, w których operuje się zbiorami o dużej liczbie punktów węzłowych, interpolacja Lagrange'a z konieczności musi być stosowana w wersji sklejanej, bowiem, jak już o tym mówiliśmy, tylko w ten sposób można uniknąć stosowania wielomianów interpolacyjnych zbyt wysokiego stopnia. Tak sklejona interpolacja nie zawsze jednak może sprostać

wymaganiom zastosowań, głównie z powodu występowania nieciągłości funkcji interpolacyjnej  $P_n(x)$ , będących konsekwencją dokonanych „sklejeń”. Tymczasem wymagania dotyczące ciągłości nie tylko samej funkcji  $f(x)$ , lecz także jej pochodnych do danego rzędu  $m$  włącznie, pojawiają się bardzo często i bywają bardzo istotne. Powstaje więc uzasadniona potrzeba odpowiedniego uogólnienia koncepcji interpolacji Lagrange'a. Takie uogólnione wielomiany mają tę własność, że dla danych  $n + 1$  punktów węzłowych  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i nieujemnych liczb całkowitych  $m_0, m_1, \dots, m_n$ , wielomianem aproksymującym funkcję  $f(x) \in C^m[a, b]$ , gdzie  $m = \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$  i  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , jest wielomian stopnia co najwyżej

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + n$$

z własnością, że w każdym punkcie węzłowym  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , funkcja ta i jej wszystkie pochodne rzędu mniejszego lub równego  $m_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  są równe funkcji  $f(x)$  i jej odpowiednim pochodnym. Stopień  $M$  wielomianu wynika stąd, że liczba warunków, które muszą być spełnione wynosi  $\sum_{i=0}^n m_i + (n + 1)$  i właśnie wielomian stopnia  $M$  ma  $M + 1$  współczynników.

Powyższe stwierdzenia podsumujemy w definicji.

**Definicja 3.** Niech  $x_0, x_1, \dots, x_n$  jest zbiorem  $n + 1$  punktów węzłowych w przedziale  $[a, b]$  i  $m_i$  są nieujemnymi liczbami całkowitymi związanymi z punktami  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , oraz

$$m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i \quad \text{i} \quad f(x) \in C^m[a, b]$$

Wielomianem uogólnionym, aproksymującym funkcję  $f(x)$  jest wielomianem  $P(x)$  co najmniej takiego stopnia, że

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}$$

dla wszystkich  $i = 0, 1, \dots, n$  i  $k = 0, 1, \dots, m_i$ .

Zauważmy, że jeśli  $n = 0$ , to wielomian uogólniony jest wielomianem Taylora stopnia  $m_0$  dla  $f(x)$  w punkcie  $x_0$ . Jeśli  $m_i = 0$  dla  $i = 0, 1, \dots, n$ , to wielomian uogólniony jest wielomianem interpolacyjnym  $f(x)$  w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , tzn. jest wielomianem Lagrange'a.

Wielomian uogólniony nazywa się *wielomianem Hermite'a*, jeśli  $m_i = 1$  dla wszystkich  $i = 0, 1, \dots, n$ . Taki wielomian ma tę własność, że w punktach węzłowych  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wartości funkcji  $f(x)$  i  $P(x)$  i ich pierwszych pochodnych są sobie równe.

Postać wielomianu Hermite'a jest określona dokładniej przez poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3.**

Jeśli  $f \in C^1[a, b]$  i  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  są izolowanymi punktami węzłowymi, to wielomianem Hermite'a, co najmniej stopnia zapewniającego jego zgodność z funkcją  $f$  i jej pochodną  $f'$ , jest wielomian stopnia co najwyżej  $2n + 1$  określony wzorem

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x) \quad (4.35)$$

gdzie funkcje bazowe interpolacji są równe

$$\begin{aligned} H_{n,j}(x) &= [1 - 2(x - x_j) N'_{n,j}(x_j)] N_{n,j}^2(x) \\ \hat{H}_{n,j}(x) &= (x - x_j) N_{n,j}^2(x) \end{aligned}$$

W powyższym twierdzeniu  $N_{n,j}$  oznacza funkcję bazową Lagrange'a stopnia  $n$  dla punktu węzłowego  $x_j$  oraz  $(\bullet)' \equiv \frac{d}{dx}(\bullet)$ .

Dodatkowo, jeśli  $f \in C^{2n+2}[a, b]$ , to błąd interpolacji Hermite'a wynosi

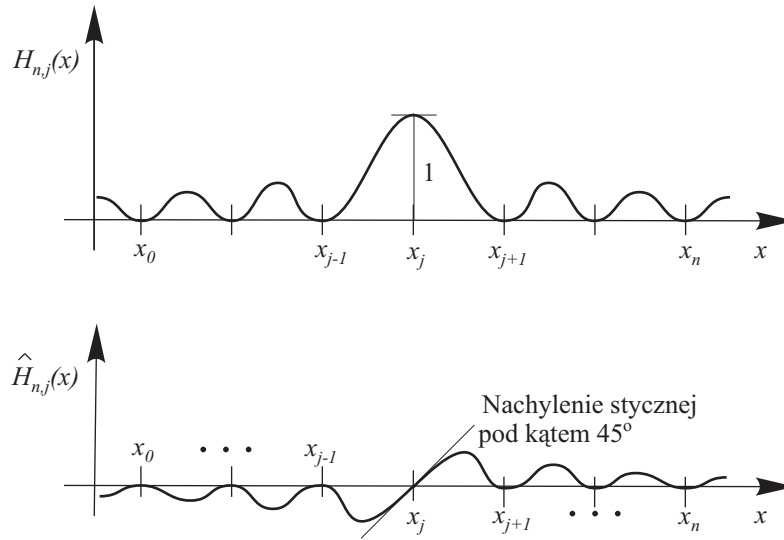
$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)) \quad (4.36)$$

gdzie  $\xi \in (a, b)$ .

W dowodzie twierdzenia, którego nie będziemy przytaczać, wykazuje się, że funkcje  $H_{n,j}$  i  $\hat{H}_{n,j}$  spełniają warunki

$$\begin{aligned} H_{n,j}(x_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} & \frac{d}{dx} H_{n,j}(x_k) &= 0 \quad \text{dla każdego } k \\ \hat{H}_{n,j}(x_k) &= 0 \quad \text{dla każdego } k & \frac{d}{dx} \hat{H}_{n,j}(x_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \end{aligned}$$

co jest zilustrowane na rys. 4.16.



Rys.4.16. Funkcje bazowe interpolacji Hermite'a

**Przykład 4.9.** Wyprowadzić wzór interpolacyjny Hermite'a dla dwóch punktów węzłowych.

Dane: węzły interpolacji  $(x_0, x_1)$

wartości funkcji  $f$  w węzłach:  $(f(x_0) \equiv f_0, f(x_1) \equiv f_1)$

wartości pochodnych funkcji  $f$  w węzłach:  $(f'(x_0) \equiv f'_0, f'(x_1) \equiv f'_1)$

Wielomian interpolacyjny jest stopnia  $2n + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$  i ma postać

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 H_{1,j}(x) f_j + \sum_{j=0}^1 \hat{H}_{1,j}(x) f'_j$$

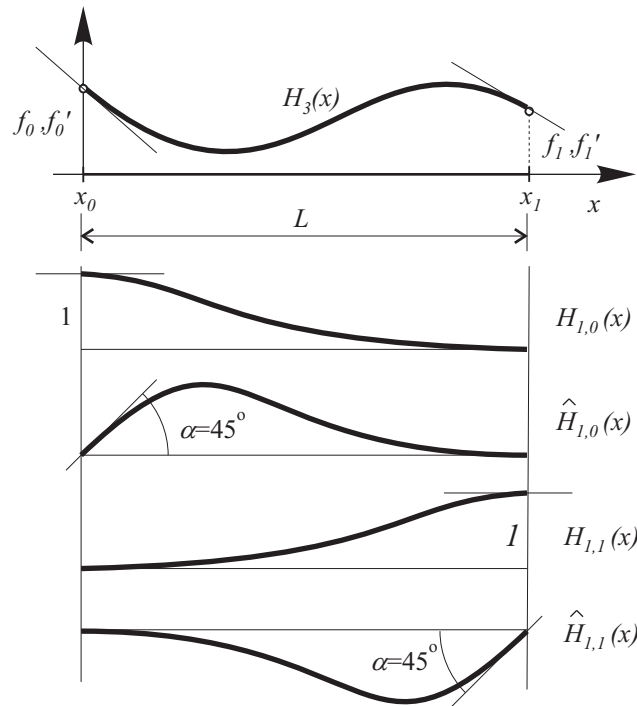
Funkcje bazowe wyznaczymy obliczając kolejno

$$N_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad N'_{1,0}(x) = \frac{1}{x_0 - x_1}$$

$$H_{1,0}(x) = \left[ 1 - 2(x - x_0) \frac{1}{x_0 - x_1} \right] \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 = (2\xi + 1)(\xi - 1)^2$$

gdzie oznaczono  $\xi = (x - x_0)/L$ ,  $L = x_1 - x_0$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{1,0}(x) &= (x - x_0) \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 = L \xi (\xi - 1)^2 \\ N_{1,1}(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad N'_{1,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \\ H_{1,1}(x) &= \left[ 1 - 2(x - x_1) \frac{1}{x_1 - x_0} \right] \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 = \xi^2 (3 - 2\xi) \\ \hat{H}_{1,1}(x) &= (x - x_1) \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 = L \xi^2 (\xi - 1)\end{aligned}$$



Rys.4.17. Funkcje bazowe interpolacji Hermite'a

Przyjmując  $x_0 = 0$ , mamy  $L = x_1$  i wzory na funkcje bazowe interpolacji Hermite'a są w postaci

$$\begin{aligned}
 H_{1,0}(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & \widehat{H}_{1,0}(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
 H_{1,1}(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & \widehat{H}_{1,1}(x) &= x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Na rys. 4.17 pokazano wykresy tych funkcji.

**Przykład 4.10.** Obliczyć wzorem interpolacyjnym Hermite'a  $f(1,5)$  dla danych z tabeli 4.3.

W tym przykładzie  $n = 2$  i wielomian interpolacyjny jest stopnia  $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$  wyrażony wzorem

$$H_5(x) = \sum_{j=0}^2 H_{2,j}(x) f_j + \sum_{j=0}^2 \widehat{H}_{2,j}(x) f'_j$$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,3	0,620	-0,522
1	1,6	0,455	-0,570
2	1,9	0,282	-0,581

Tabela 4.3. Dane do przykładu 4.10

Obliczamy kolejno

$$\begin{aligned}
 N_{2,0}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \\
 N'_{2,0}(x) &= \frac{100}{9}x - \frac{175}{9} \\
 N_{2,1}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \\
 N'_{2,1}(x) &= -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}
 \end{aligned}$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}$$

$$N'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

$$H_{2,0}(x) = \left[1 - 2(x-1,3) \cdot (-5)\right] \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2 = \\ (10x-12) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1 \cdot \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10 \cdot (2-x) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1,3) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1,6) \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1,9) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$H_5(x) = 0,620H_{2,0}(x) + 0,455H_{2,1}(x) + 0,282H_{2,2}(x) - 0,522\hat{H}_{2,0}(x) - \\ 0,570\hat{H}_{2,1}(x) - 0,581\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$H_5(1,5) = 0,620 \cdot \left(\frac{4}{27}\right) + 0,455 \cdot \left(\frac{64}{81}\right) + 0,282 \cdot \left(\frac{5}{81}\right) - 0,522 \cdot \left(\frac{4}{405}\right) - \\ 0,570 \cdot \left(-\frac{32}{405}\right) - 0,581 \cdot \left(-\frac{2}{405}\right) = 0,512$$

Interpolację Hermite'a można też stosować w wersji sklejanej. Funkcje interpolacyjne mogą być w ogólności sklejane z wielomianów różnych stopni w podprzedziałach na jakie podzielimy przedział  $[a, b]$  będący dziedziną funkcji  $f(x)$ . Szczegóły takiej interpolacji funkcjami sklejanymi (ang. *spline interpolation functions*) można znaleźć w podręcznikach z metod numerycznych.



## Rozdział 5

# Metody wariacyjne rozwiązań przybliżonych

### 5.1. Uwagi wstępne

W tym rozdziale omówimy kilka podstawowych metod wariacyjnych rozwiązań przybliżonych problemów brzegowych, opisywanych różnymi modelami matematycznymi [10]. Podstawowym modelem będzie sformułowanie lokalne w postaci równań różniczkowych, zwyczajnych lub cząstkowych. Jeśli rozważany problem jest problemem samosprzężonym, to wygodniej będzie skorzystać ze sformułowania równoważnego, jakim jest minimalizacja pewnego funkcjonału. Pomocne przy budowaniu takiego funkcjonału jest twierdzenie o minimum funkcjonału kwadratowego, które pozwala rozwiązać odwrotne zadanie rachunku wariacyjnego jakim jest wyznaczenie funkcjonału dla danego równania różniczkowego. W ogólnym przypadku, kiedy problem jest sformułowany lokalnie, rozwiązanie będziemy poszukiwać budując ważone równania całkowe. W każdym więc przypadku będziemy mieć do czynienia z formą całkową rozwiązania. Takie postępowanie jest właściwe metodom wariacyjnym rozwiązań przybliżonych. Mają one szereg zalet w porównaniu z bezpośrednim rozwiązywaniem równań różniczkowych problemu brzegowego. Metody wariacyjne umożliwiają ujęcie w jednym wyrażeniu wielu równań opisujących rozpatrywany problem. Ponadto, funkcjonal ma na ogół określony sens fizyczny i jego wartość jest niezależna od wybranego układu współrzędnych. I w końcu, co dla nas jest najważniejsze, metody wariacyjne tworzą w naturalny sposób bazę dla otrzymania rozwiązań przybliżonych.

Rozwiązanie przybliżone będzie rozwiązaniem aproksymacyjnym w formie kombinacji liniowej znanych a priori funkcji z odpowiedniej skończonej wymiarowej podprzestrzeni  $V_N$  przestrzeni rozwiązania  $V$ . Oznacza to, że niewiadomymi będą parametry tej kombinacji, które obliczać będziemy różnymi metodami wariacyjnymi.

Spośród wielu metod omówimy bliżej metodę Rayleigha-Ritza i metodę residuów ważonych, w różnych sformułowaniach. Będą to: metoda Petrowa-Galerkina, metoda Bubnowa-Galerkina oraz metoda najmniejszych kwadratów. Ta ostatnia metoda jest rozwinięciem metody poznanej w p. 4.4 na przypadek sformułowania wariacyjnego. Przedstawimy też jedną z całej grupy metod kollokacji, a mianowicie metodę kollokacji punktowej. Jak zobaczymy to dalej w rozdziale szóstym, te klasyczne już metody zostaną wykorzystane do sformułowania najpopularniejszej i najefektywniejszej obecnie metody jaką jest metoda elementów skończonych.

Ponieważ problem ciągły jest sformułowany w przestrzeni nieskończonej, to jego rozwiązanie nie może być przedstawione dokładnie przez skończony zbiór funkcji i otrzymany wynik będzie rozwiązaniem przybliżonym. Jeśli wymiar przestrzeni  $V_N$  będziemy powiększać (co oznacza zwiększenie liczby niezależnych parametrów w rozwiązaniu przybliżonym), to błąd aproksymacji powinien się zmniejszać i rozwiązanie przybliżone będzie zmierzać do rozwiązania dokładnego. Jeśli problem jest dobrze postawiony, to zapewniona będzie również jednoznaczność i istnienie rozwiązania przybliżonego. Dowodzenie tego jest już jednakże poza zakresem podręcznika.

W podręczniku analizowane są problemy opisywane przeważnie za pomocą liniowych równań różniczkowych. Wariacyjne rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych mogą być porównane z rozwiązaniami otrzymanymi klasycznymi metodami numerycznymi. W dodatkach B i C zestawiono potrzebne do tego wybrane metody i wzory. I tak, w dodatku B podano wzory *metody Rungego-Kutty IV rzędu* do numerycznego rozwiązania problemu początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu oraz wzory *Rungego-Kutty-Nyströma IV rzędu* dla równań różniczkowych zwyczajnych II rzędu. W dodatku C natomiast omówiono krótko liniową *metodę strzału* (ang. *linear shooting method*) numerycznego rozwiązywania problemu brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych II rzędu. Podano tam również komendy systemu MATHCAD do rozwiązywania wymienionych powyżej problemów brzegowych. Dodatki B i C powinny być pomocne Czytelnikom w ocenie jakości rozwiązań wariacyjnych własnych przykładów. Rozwiązania wariacyjne

równań różniczkowych cząstkowych mogą być oczywiście weryfikowane za pomocą poznanej już metody różnic skończonych.

## 5.2. Minimum funkcjonału kwadratowego

W rozdziale drugim stwierdziliśmy, że wiele rzeczywistych problemów może być opisywanych takim samym modelem matematycznym, który można zapisać w ogólnej postaci równania operatorowego typu

$$A u = f \quad \text{w } \Omega \quad (5.1a)$$

z jednorodnymi, podstawowymi warunkami brzegowymi

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (5.1b)$$

Konkretna postać operatora  $A$  i funkcji  $f$  oraz interpretacja nieznannej funkcji  $u$  zależą od rodzaju analizowanego problemu. Do dalszych rozważań potrzebujemy obecnie określić bliżej pewne cechy operatora  $A$ . Wykorzystując pojęcia i definicje podane w dodatku A, przyjmujemy, że operator  $A$  jest *liniowy* i *dodatni*. Przyjmujemy również, że funkcja  $f$  jest wymaganej klasy ciągłości. Zauważmy, że (5.1) może być też traktowane jako ogólny zapis układu równań różniczkowych z układem warunków brzegowych. Dla tak przyjętych założeń można wykazać, że funkcja  $u$ , która jest rozwiązaniem równania (5.1a) minimalizuje pewien *funkcjonał kwadratowy*  $Q(u)$ . Odwrotnie, jeśli potrafimy wyznaczyć funkcję  $u$ , która minimalizuje  $Q(u)$ , to funkcja ta jest rozwiązaniem równania (5.1a).

Poniższe twierdzenie ustala równoważność pomiędzy równaniem operatorowym (5.1a) i stowarzyszonym z nim funkcjonałem kwadratowym.

### Twierdzenie 4 (o minimum funkcjonału).

Niech operator  $A$  jest operatorem liniowym i dodatnim w liniowej przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}$  i niech  $f \in C$ . Wówczas funkcjonal kwadratowy

$$Q(u) = \int_{\Omega} u \left( \frac{1}{2} A u - f \right) d\Omega \equiv \frac{1}{2} (A u, u) - (f, u) \quad (5.2)$$

przyjmuje dla  $u_0 \in \mathcal{D}$  wartość minimalną wtedy i tylko wtedy, jeśli  $u_0$  jest także rozwiązaniem równania (5.1a).

Wzór (5.2) napisaliśmy na dwa sposoby. Pierwszy jest sposobem klasycznym,

natomiast w drugim – skorzystaliśmy z definicji *iloczynu skalarnego* operatora  $(Au, u)$  i *formy liniowej* funkcji  $(f, u)$ , określonych bliżej w dodatku A. Ten drugi sposób zapisu jest bardzo wygodny i będziemy z niego korzystali.

**Przykład 5.1.** Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\frac{d}{dx}\left(a \frac{du}{dx}\right) = f \quad 0 < x < L \quad (5.3a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (5.3b)$$

Operator różniczkowy  $A \equiv -\frac{d}{dx}\left(a \frac{d}{dx}\right)$ . Przyjmiemy, że  $a(x) \in C^1[0, L]$  i  $f \in C[0, L]$  oraz  $a(x) > 0$  dla  $0 \leq x \leq L$ . Założenia te są warunkami wystarczającymi dla istnienia jednoznacznego rozwiązania problemu brzegowego (5.3).

Przestrzeń funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}$  jest określona następująco

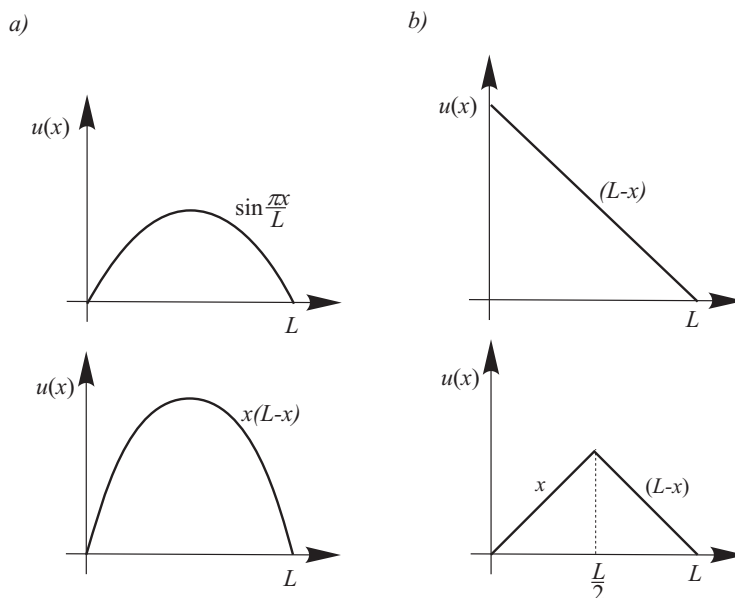
$$\mathcal{D}_A = \{u(x) \in C^2(0, L), 0 < x < L, u(0) = u(L) = 0\} \quad (5.4)$$

Na rysunku 5.1 pokazano dla przykładu funkcje dopuszczalne i niedopuszczalne. Funkcja  $u = L - x$ , mimo że należy do przestrzeni  $C^2(0, L)$ , nie jest dopuszczalna, ponieważ nie znika dla  $x = 0$ . Druga z funkcji (b) na rys. 5.1 spełnia warunki  $u(0) = u(L) = 0$ , ale nie należy do przestrzeni  $C^2(0, L)$  (nie należy nawet do  $C^1(0, L)$ , ponieważ  $\frac{du}{dx}$  jest nieciągła w punkcie  $x = L/2$ ). Jest więc również funkcją niedopuszczalną.

Operator  $A$  jest liniowy i można wykazać, że jest również dodatni, co oznacza, że wykorzystując (5.2) funkcjonal kwadratowy  $Q(u)$  można napisać w postaci

$$Q(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(-\frac{d}{dx}\right) \left(a \frac{du}{dx}\right) u \, dx - \int_0^L f u \, dx \quad (5.5)$$

Rozwiązaniem problemu (5.3) będzie funkcja  $u_0(x)$  z przestrzeni funkcji dopuszczalnych (5.4), która minimalizuje funkcjonal (5.5). Na ogół korzystamy z warunku koniecznego minimum zerowania się pierwszej wariacji funkcjonułu  $Q(u)$ . Podkreślmy jeszcze, że kandydatami do rozwiązania  $u_0$  są funkcje, które są klasy  $C^2$  i spełniają jednorodne, podstawowe warunki brzegowe.



Rys.5.1. a) funkcje dopuszczalne, b) funkcje niedopuszczalne dla problemu (5.3)

### 5.3. Przestrzeń energii

Twierdzenie 4 nie rozstrzyga, czy problem brzegowy (5.1) ma rozwiązanie lub czy  $Q(u)$  ma minimum w  $\mathcal{D}_A$ , podaje tylko relację pomiędzy równaniem operatorowym i stowarzyszonym z nim funkcjonałem kwadratowym. Innymi słowy, twierdzenie 4 jest ważne przy założeniach, że (5.1) ma rozwiązanie w  $\mathcal{D}_A$ , lub że funkcjonal kwadratowy (5.2) ma minimum w  $\mathcal{D}_A$ .

Założenia te nie zawsze są spełnione. Jeśli w przykładzie 5.1 funkcja  $f$  nie byłaby ciągła w  $(0, L)$ , powiedzmy równa pewnej stałej w  $(0, a)$  i równa zeru w  $(a, L)$ , to wówczas rozwiązanie równania (5.1a) nie byłoby należało do zdefiniowanej w tym przykładzie przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$ , ponieważ tam przyjęliśmy, że dla każdego  $u \in \mathcal{D}_A$   $Au$  jest funkcją ciągłą w całym przedziale  $(0, L)$ . Stąd, funkcjonal  $Q(u)$  nie przyjmie swojego minimum w  $\mathcal{D}_A$ . Opisaną trudność można pokonać osłabiając warunki konieczne do spełnienia przez rozwiązanie. W tym celu definiuje się nową, rozszerzoną przestrzeń funkcji dopuszczalnych, taką aby mogła ona objąć również funkcje nieciągłe, przy zachowaniu w tej przestrzeni warunku minimum  $Q(u)$ . Ta nowa przestrzeń nazywa się *przestrzenią energii* i oznaczymy ją przez  $H_A$ .

Nie wchodząc bliżej w podstawy teoretyczne budowania przestrzeni energii i oceny jednoznaczności rozwiązania w tej przestrzeni, w rozważanym przez nas problemie przestrzeni energii określimy dla funkcjonału otrzymanego w rezultacie wycałkowania przez części (5.5), co prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} Q(u) &= -\frac{1}{2} \left[ u \left( a \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{1}{2} \int_0^L a \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L f u dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L a \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L f u dx \equiv \frac{1}{2} B(u, u) - (f, u) \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdzie  $B(u, u)$  jest formą dwuliniową, zdefiniowaną dokładniej w dodatku A. Przestrzeń energii  $H_A$  funkcji dopuszczalnych dla minimalizacji funkcjonału (5.6) jest

$$H_A = \{u(x) \in C^1(0, L), 0 < x < L, u(0) = u(L) = 0\} \quad (5.7)$$

Końcowa postać wzoru na  $Q(u)$  uzasadnia nazwę przestrzeni energii dla funkcji dopuszczalnych minimalizujących ten funkcjonał. W mechanice jest to mianowicie energia potencjalna (suma energii sprężystej i pracy sił zewnętrznych ze znakiem minus) pręta sprężystego,  $a(x) = EA(x)$ , gdzie  $E$  jest modułem sprężystości Younga, a  $A(x)$  jest powierzchnią przekroju poprzecznego, obciążonego obciążeniem równoległym do osi pręta o intensywności  $f(x)$ .

Przestrzeń energii  $H_A$  jest znacznie „szersza” niż przestrzeń  $\mathcal{D}_A$ . Jeśli przez  $2m$  oznaczymy rząd operatora  $A$ , to wystarczy, aby elementy przestrzeni  $H_A$  były ciągle tylko do rzędu  $m$ , podczas gdy elementy przestrzeni  $\mathcal{D}_A$  muszą być ciągle aż do rzędu  $2m$ . Oznacza to, że operacje całkowania przez części należy wykonywać tyle razy aż otrzymamy zrównanie pochodnych funkcji  $u$  i scałkowanego operatora różniczkowego  $A$  (na przykład dla równania różniczkowego rzędu czwartego należy dwukrotnie całkować przez części) - otrzymany w ten sposób funkcjonał przyjmuje tzw. postać nieredukowalną.

Jeśli warunki brzegowe byłyby mieszane i niejednorodne, to najprostszym sposobem skorzystania ze wzoru (5.2) jest zamiana wyjściowego problemu na problem z obydwojma jednorodnymi warunkami brzegowymi. Istotne jest to, że wystarczy, aby funkcje dopuszczalne w przestrzeni energii  $H_A$  spełniały tylko jednorodne, podstawowe warunki brzegowe. Innym postępowaniem przy poszukiwaniu rozwiązania w  $H_A$  jest zamiana wyjściowego problemu na problem minimalizacji funkcjonału z włączonymi do niego warunkami brzegowy-

mi. Przykłady budowy takiego funkcjonału pokażemy w dalszej części tego rozdziału oraz w rozdziale szóstym.

## 5.4. Metoda Rayleigha-Ritza

Rozważmy znowu równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (5.8a)$$

z warunkiem brzegowym

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (5.8b)$$

gdzie  $A$  jest operatorem liniowym i dodatnim w przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$  i  $f$  jest funkcją ciągłą. Z p. 5.3 wiemy, że rozwiązaniem równania (5.8a) jest funkcja z przestrzeni energii  $H_A$ , która minimalizuje funkcjonał

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - (f, u) \quad (5.9)$$

gdzie  $B(u, u) = (Au, u)_H$ , co czytamy, że forma dwuliniowa jest równa iloczynowi skalarnemu w przestrzeni energii (patrz wzór (5.6)).

Przyjmijemy w przestrzeni energii  $H_A$  bazę funkcji

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N, \dots$$

gdzie  $N$  jest stałą dodatnią i poszukiwać będziemy rozwiązania aproksymacyjnego  $u_N$  w postaci

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j \quad (5.10)$$

gdzie  $c_j$  są nieznanymi parametrami, podlegającymi wyznaczeniu. Parametry te określone są przez warunek

$$J(u_N) \leq J(v_N) \quad (5.11)$$

dla wszystkich  $v_N$  o postaci  $v_N = \sum_{i=1}^N b_i \Phi_i$ , gdzie  $b_i$  są dowolnymi parametrami. Takie postępowanie jest równoważne poszukiwaniu  $u_N$  w  $N$ -wymiarowej podprzestrzeni  $S_N$ , generowanej przez skończony zbiór  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ . Ponieważ z założenia  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$  jest bazą w  $H_A$ , to rozwiązanie może być

aprosymowane z dowolną dokładnością przez *stosowną* kombinację liniową tych funkcji. Przy właściwych warunkach nałożonych na zbiór  $\{\Phi_i\}$  rozwiązanie aproksymacyjne  $u_N$  powinno być zbieżne do rozwiązania dokładnego dla  $N \rightarrow \infty$ . Jeśli zbiór  $\{\Phi_j\}$  został wybrany, to wyznaczenie parametrów  $c_j$  jest już proste. Mianowicie funkcjonal  $J(u_N)$ , po wykonaniu operacji iloczynu skalarnego (tzn. wycalkowaniu w obszarze), staje się zwykłą funkcją parametrów  $c_1, c_2, \dots, c_N$  i parametry te obliczymy z warunku koniecznego minimum funkcji

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}(c_1, c_2, \dots, c_N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

lub

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left[ \frac{1}{2} B \left( \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j, \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k \right) - \left( f, \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^N B(\Phi_i, \Phi_k) c_k + \sum_{j=1}^N B(\Phi_j, \Phi_i) c_j \right] - (f, \Phi_i) \end{aligned}$$

Wykorzystując symetrię operatora  $B$  możemy ze sobą połączyć pierwsze dwa składniki, otrzymując

$$0 = \sum_{j=1}^N B(\Phi_i, \Phi_j) c_j - (f, \Phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.12)$$

Jest to układ  $N$  liniowych równań algebraicznych z nieznanymi  $N$  współczynnikami  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Ponieważ  $B(\Phi_i, \Phi_j)$  i  $\Phi_i$  są liniowo niezależne, to macierz współczynników przy niewiadomych

$$b_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j)$$

jest nieosobliwa i równanie (5.12) ma rozwiązanie jednoznaczne. Równanie (5.12) w zapisie macierzowym ma formę

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (5.13)$$

gdzie macierz  $\mathbf{B}$  i wektor  $\mathbf{F}$  definiują wzory  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ,  $\mathbf{F} = [f_i]^T = [(f, \Phi_i)]^T$  oraz  $\mathbf{c} = [c_i]^T$ . Funkcje bazowe  $\Phi_i$  powinny spełniać następujące warunki:

1.  $\Phi_i \in H_A$ .
2. Dla dowolnego  $N$  powinny być liniowo niezależne.



3. Powinny być kompletne w przestrzeni  $H_A$  (aby każda funkcja w tej przestrzeni dała się w sposób jednoznaczny przedstawić jako kombinacja liniowa funkcji bazowych).

Wiemy już, że  $H_A$  zawiera elementy, których  $m$ -te pochodne są całkowalne z kwadratem, gdzie  $2m$  jest rzędem operatora różniczkowego  $A$ , i które spełniają jednorodne podstawowe warunki brzegowe. Jeśli podstawowe warunki brzegowe byłyby niejednorodne, to jak to już stwierdziliśmy, możemy przetransformować wyjściowy problem brzegowy do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi, lub też poszukiwać rozwiązania Rayleigha-Ritza w alternatywnej postaci

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j + \Phi_0 \quad (5.14)$$

gdzie  $\Phi_0$  jest funkcją, która spełnia niejednorodne podstawowe warunki brzegowe. W takim przypadku elementy wektora  $\mathbf{F}$  w równaniu (5.13) należy obliczać według wzoru

$$f_i = (f, \Phi_i) - B(\Phi_0, \Phi_i) \quad (5.15)$$

Dla przykładu rozważmy równanie  $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$  z warunkami brzegowymi  $u(0) = 0$  i  $u(1) = h$ . Problem ten może być zmieniony do postaci  $-\frac{d^2z}{dx^2} = f$  z warunkami  $z(0) = 0$  i  $z(1) = 0$ , gdzie  $u = z + hx$ . Rozwiązując problem oryginalny metodą Rayleigha-Ritza wykorzystamy (5.14), przyjmując  $\Phi_0 = hx$  i  $\Phi_j = x^j(1-x)$ .

Metoda Rayleigha-Ritza ma bardziej ogólne zastosowanie niż przedstawione w tym punkcie, i nie tylko ograniczone do przypadku problemów liniowych, dla których jest możliwe skonstruowanie funkcjonału typu (5.9). Jeśli problem jest nieliniowy, to układ równań metody Rayleigha-Ritza jest także nieliniowy; jeśli z kolei forma dwuliniowa  $B(v, u)$  jest niesymetryczna, to liniowe równania Rayleigha-Ritza są niesymetryczne.

**Przykład 5.2.** Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \cos \pi x \quad 0 < x < 1 \quad (5.16)$$

dla którego  $A \equiv -d^2/dx^2$ . Poszukiwać będziemy rozwiązania tego równania metodą Rayleigha-Ritza dla trzech typów warunków brzegowych.

## 1. Warunki brzegowe Dirichleta

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (5.17)$$

W tym przypadku dziedzina  $\mathcal{D}_A$  dla operatora  $A$  zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne w przedziale  $(0, 1)$ , które spełniają warunki brzegowe (5.17). Operator  $A$  jest symetryczny i dodatni w  $\mathcal{D}_A$ . Można wykazać, że problem brzegowy (5.16), (5.17) ma rozwiązanie jednoznaczne. Dokładne rozwiązanie ma postać

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2}(\cos \pi x + 2x - 1) \quad (5.18)$$

Funkcjonał dla rozważanego problemu ma formę

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ -\frac{d^2u}{dx^2} u - 2u \cos \pi x \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - 2u \cos \pi x \right] dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

dla wszystkich  $u \in \mathcal{D}_A$ . Przestrzenią energii jest  $H_A = \{u \in C^1(0, 1), u(0) = u(1) = 0\}$ .

Przyjmujemy bazę  $\{\Phi_i\} = \{\sin i\pi x\}$  dla  $N$ -parametrowej aproksymacji Rayleigha-Ritza

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \sin j\pi x \quad (5.20)$$

Zbiór  $\{\Phi_i\} = \{\sin i\pi x\}$  tworzy podprzestrzeń  $S_N$  w przestrzeni energii,  $S_N \subset H_A$ .

Podstawiając (5.20) do (5.19), a następnie przyrównując do zera pierwszą pochodną funkcji  $J(c_1, c_2, \dots, c_N)$ , otrzymamy równanie (5.12) w formie

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} c_j - f_i = 0$$

gdzie

$$b_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j) = \int_0^1 (i\pi) \cos i\pi x \cdot (j\pi) \cos j\pi x \, dx = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \frac{(i\pi)^2}{2} & j = i \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f_i &= (\Phi_i, \cos \pi x)_0 = \\
&= \int_0^1 \cos \pi x \sin i\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\sin \pi(i+1)x + \sin \pi(i-1)x] dx = \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^{i+1} - 1}{\pi(i+1)} + \frac{(-1)^{i-1} - 1}{\pi(i-1)} \right] = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{dla } i \text{ nieparzystych} \\ \frac{2i}{\pi(i^2 - 1)} & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases}
\end{aligned}$$

Macierz  $\mathbf{B}$  jest macierzą diagonalną i rozwiązanie równania  $\mathbf{Bc}=\mathbf{F}$  daje wynik

$$c_i = \frac{4}{\pi^3} \frac{1}{i(i^2 - 1)} \quad i = 2, 4, 6, \dots$$

Rozwiązanie Rayleigha-Ritza ma postać

$$\begin{aligned}
u_N(x) &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{i=2}^N \frac{\sin i\pi x}{(i^2 - 1)i} \quad (\text{dla } i \text{ parzystych}) \\
&= \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)j}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

## 2. Mieszane warunki brzegowe

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \tag{5.22}$$

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi x - 1) \tag{5.23}$$

Zbiór  $\mathcal{D}_A$  dla symetrycznego i dodatniego operatora  $A$  zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne, które spełniają warunki brzegowe (5.22). Przestrzenią energii jest  $H_A = \{u \in C^1(0, 1), u(0) = 0\}$ . Funkcjonał dla problemu brzegowego ma postać (5.19).

Dla rozwiązania przybliżonego Rayleigha-Ritza przyjmujemy bazę, która spełnia tylko podstawowy warunek brzegowy  $u(0) = 0$ . Tym razem nie możemy przyjąć bazy  $\{\sin i\pi x\}$ , ponieważ nie jest ona kompletna – nie może bowiem generować w przestrzeni  $H_A$  funkcji, które są niezerowe

dla  $x = 1$ . Dla takiej bazy rozwiązanie byłoby powtórzeniem obliczeń z punktu 1 i nie jest ono zbieżne do rozwiązania dokładnego (5.23). Nie można, na przykład, przyjąć  $\Phi_0 = 1$ , bo funkcja ta nie spełnia warunku  $\Phi_0(0) = 0$ . Bazą kompletną jest natomiast baza z dodaną funkcją  $\Phi_0 = x : \{x, \sin i\pi x\}$ .

Wykorzystując obliczenia  $b_{ij}$  i  $f_i$  z punktu 1, obliczymy tylko  $b_{ij}$  dla  $i = 0, j = 0, 1, 2, \dots, N$  i  $f_0$

$$b_{0j} = B(\Phi_0, \Phi_j) = \int_0^1 \Phi_j' dx = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } j \neq 0 \\ 1 & \text{jeśli } j = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$f_0 = (\Phi_0, f) = \int_0^1 x \cos \pi x dx = -\frac{2}{\pi^2}$$

Rozwiązanie Rayleigha-Ritza problemu brzegowego (5.16) i (5.22) ma postać

$$u_N(x) = -\frac{2x}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)j} \quad (5.25)$$

i jest zbieżne do rozwiązania dokładnego.

### 3. Warunki brzegowe Neumanna

$$u'(0) = u'(1) = 0 \quad (5.26)$$

Zbiór  $\mathcal{D}_A$  zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne, które spełniają warunki brzegowe (5.26). Operator  $A$  nie jest dodatni w  $\mathcal{D}_A$ . Rozwiązanie, chociaż istnieje, nie jest jednakże jednoznaczne, ponieważ, jeśli  $u(x)$  jest rozwiązaniem problemu (5.16), (5.26), to również rozwiązaniem jest  $v(x) = u(x) + c$ , gdzie  $c$  – dowolna stała. Dla znalezienia rozwiązania jednoznacznego nałożymy dodatkowy warunek

$$\int_0^1 u(x) dx = 0 \quad (5.27)$$

Rozwiązaniem problemu (5.16), (5.26) z warunkiem (5.27) jest funkcja

$$u_0(x) = \frac{\cos \pi x}{\pi^2}$$

Chcąc wykorzystać metodę Rayleigha-Ritza do otrzymania rozwiązania przybliżonego musimy wybrać inną bazę niż bazy użyte w punktach 1 i 2 – żadna nie jest bowiem kompletna dla tego zadania. Do zbioru  $\{\sin i\pi x\}$  musimy dodać funkcję, która nie znika dla  $x = 0$  i  $x = 1$  i jednocześnie spełniony jest warunek  $u_N(0) \neq u_N(1)$ . Wybieramy funkcję  $u_0 = x - c$ , gdzie stała  $c \neq 1$ . W podobny sposób jak to było w przypadku (5.24) obliczamy  $b_{0j}$  i  $f_0$ . Końcowe rozwiązanie ma postać

$$u_N(x) = -\frac{2}{\pi^2}(x - c) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)} \quad (5.28)$$

Stałą  $c$  obliczymy z warunku (5.27) otrzymując  $c = \frac{1}{2}$ .

**Przykład 5.3.** Rozważmy problem brzegowy

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (5.29a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = 0 \quad u'(1) = 1 \quad (5.29b)$$

W tym problemie operator  $A \equiv -\frac{d^2}{dx^2} - 1$  i przestrzeń funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$  jest

$$\mathcal{D}_A = \{u(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, u(0) = 0, u'(1) = 1\}$$

Wyjściowy problem zamienimy na problem z jednorodnymi warunkami brzegowymi podstawiając

$$u(x) = y(x) + u_0(x) \quad (5.30)$$

gdzie przyjmując  $u_0(x) = a + bx$ , łatwo obliczymy, że  $u_0(x) = x$ .

Nowy problem brzegowy ma postać

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - y - x + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (5.31a)$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 0 \quad (5.31b)$$

Dla tego problemu przestrzeń funkcji dopuszczalnych jest

$$\mathcal{D}_A = \{y(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, y(0) = 0, y'(1) = 0\}$$

Funkcjonał kwadratowy (5.2) przyjmie formę

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 y \left( -\frac{d^2y}{dx^2} - y \right) dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx$$

lub po wycalkowaniu przez części

$$\begin{aligned} J(y) &= -\frac{1}{2} y \frac{dy}{dx} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 \right] dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx \end{aligned} \quad (5.32)$$

Przestrzenią energii jest

$$H_A = \{y(x) \in C^1(0, 1), 0 < x < 1, y(0) = 0\} \quad (5.33)$$

Dla trójparametrowego rozwiązania funkcjami bazowymi  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  mogą być funkcje

$$\Phi_1 = x \quad \Phi_2 = x^2 \quad \Phi_3 = x^3$$

Poszukiwane rozwiązanie ma formę

$$y_3(x) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i c_i = \mathbf{\Phi} \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^T \quad (5.34)$$

gdzie oznaczono

$\mathbf{\Phi} = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3]$  – macierz jednowierszowa funkcji bazowych

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$  – wektor nieznanymi parametrów

Podstawiając (5.34) do (5.32), i stosując konsekwentnie zapis macierzowy, otrzymamy

$$\begin{aligned} J(\mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left[ \int_0^1 \left( \left( \frac{d\mathbf{\Phi}}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{\Phi}}{dx} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \right) dx \right] \mathbf{c} + \\ &+ \mathbf{c}^T \int_0^1 \mathbf{\Phi}^T (x^2 - x) dx = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.35)$$

gdzie oznaczono macierz  $\mathbf{B}$  i wektor  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left( \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} - \Phi^T \Phi \right) dx \quad (5.36a)$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \Phi^T (x^2 - x) dx \quad (5.36b)$$

Parametry  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , obliczymy z warunku koniecznego minimum funkcji (5.35), co prowadzi do równania macierzowego w formie

$$\mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (5.37)$$

Obliczając  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{F}$  według wzorów (5.36) otrzymamy

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} [1 \ 2x \ 3x^2] - \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} [x \ x^2 \ x^3] \right) dx = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} (x^2 - x) dx = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania (5.37) daje wynik:

$$c_1 = 0,279, \quad c_2 = -0,106, \quad c_3 = -0,0290$$

Końcowe rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza ma postać

$$u_3(x) = 1,279x - 0,106x^2 - 0,0290x^3$$

Wyjściowy problem brzegowy (5.29) można też rozwiązać metodą Rayleigha-Ritza budując dla niego funkcjonal rozszerzony, który ma formę

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 \right] dx + \int_0^1 ux^2 dx - u'(1)u(1) \quad (5.38)$$

Zgodnie z tym, co wcześniej stwierdziliśmy, w funkcjonale tym pojawił się składnik wynikający z niejednorodnego, naturalnego warunku brzegowego

$u'(1) = 1$ , który jednak dla czytelności zapisu nie został wprowadzony explicit.

Rozwiązanie poszukiwać będziemy w przestrzeni energii  $H_A$

$$H_A = \{u(x) \in C^1(0, 1), 0 < x < 1, u(0) = 0\}$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci (5.34) odpowiednikiem funkcji (5.35) jest

$$J(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F} - \mathbf{c}^T \Phi^T(1) u'(1) \quad (5.39)$$

gdzie obecnie

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \Phi^T x^2 dx = - \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} x^2 dx = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Warunek konieczny minimum funkcji  $J(\mathbf{c})$  (5.39) prowadzi do równania macierzowego

$$\mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{F} + \Phi^T(1) u'(1) = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie wykorzystano warunek brzegowy  $u'(1) = 1$ .

Rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza wynosi

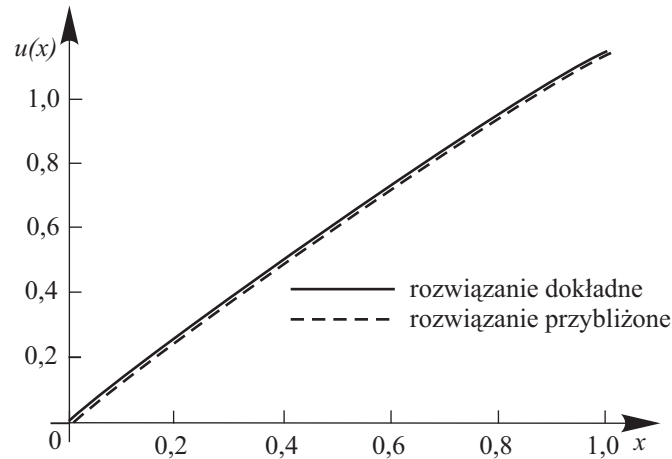
$$u_3(x) = 1,283x - 0,1142x^2 - 0,02462x^3$$

Obydwa rozwiązania są podobne z dokładnością obliczeń numerycznych. Można je porównać z rozwiązaniem dokładnym równym

$$u_0(x) = 2(\cos x + \operatorname{tg} 1 \sin x - 1) - \frac{\sin x}{\cos 1} + x^2$$

co doprowadza do wniosku, że rozwiązanie przybliżone dobrze aproksymuje rozwiązanie dokładne, rys. 5.2.





Rys.5.2. Porównanie wyników obliczeń w przykładzie 5.3

Na zakończenie tego przykładu można jeszcze spróbować odpowiedzieć na pytanie, jak konstruować funkcjonal rozszerzony. Jest to trudny problem wymagający zarówno dodatkowej wiedzy, jak i doświadczenia. W naszym przypadku jednakże łatwo jest uzasadnić postać funkcjonału rozszerzonego, jeśli tylko odniesiemy się do interpretacji fizycznej problemu brzegowego (5.29). Przyjmując na przykład, że opisuje on znowu pewien problem rozciągania pręta, to funkcjonal rozszerzony jest sumą energii potencjalnej pręta i pracy siły podłużnej na końcu pręta  $x = 1$ , reprezentowanej przez pochodną  $\frac{du}{dx}$ , na przemieszczeniu  $u(1) = 1$ .

## 5.5. Metoda residuów ważonych

Metoda Rayleigha-Ritza ma ograniczone zastosowanie do rozwiązywania problemów brzegowych. Nie wszystkie bowiem równania różniczkowe są samo-sprężone, co oznacza niemożność zbudowania dla nich odpowiedniego funkcjonału. Prostym przykładem równania różniczkowego, które nie jest samo-sprężone jest równanie, w którym występuje nieparzysta pochodna. Metoda residuów ważonych, którą obecnie sformułujemy, jest wolna od takiego ograniczenia.

Napiszmy powtórnie problem brzegowy w formie (5.8)

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (5.41a)$$

z warunkiem brzegowym

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (5.41b)$$

gdzie  $A$  nie musi być operatorem dodatnim ani w ogóle liniowym. Przyjmijmy zbiór funkcji bazowych  $\{\Psi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , należących do przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$ . Jeśli  $u \in \mathcal{D}_A$  jest taką funkcją, że iloczyn skalarny

$$(Au - f, \Psi_k) = 0 \quad \text{dla każdego } k = 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

to wówczas oznacza to, że  $Au - f = 0$  w  $\mathcal{D}_A$ , czyli  $u$  jest rozwiązaniem problemu (5.41). Innymi słowy, znalezienie rozwiązania (5.41) jest równoważne poszukiwaniu rozwiązania równania wariacyjnego (5.42). Ta równoważność tworzy bazę dla formułowania różnych wariantów metody residuów ważonych.

W metodzie tej dla aproksymacji  $u$  wybieramy dowolną, ograniczoną bazę  $\{\Phi_i\}$  z  $\mathcal{D}_A$  z warunkiem, że *residuum*  $R_N$

$$R_N \equiv Au_N - f \quad (5.43)$$

jest ortogonalne do podprzestrzeni utworzonej z funkcji bazowych  $\{\Psi_k\}$

$$(Au_N - f, \Psi_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.44)$$

co wystarcza, aby przy dostatecznie dużym  $N$  błąd  $R_N$  w sensie normy  $L_2$  był dowolnie mały. Metoda residuów ważonych, wyrażona przez równanie (5.44), znana jest pod różnymi nazwami, zależnie od wyboru bazy  $\{\Psi_k\}$ . Ogólny przypadek  $\Psi_k \neq \Phi_k$  nazywany jest *metodą Petrowa-Galerkina*. Rozwiązania przybliżonego  $u_N$  równania (5.41a) poszukujemy w postaci analogicznej do (5.10)

$$u_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i c_i = \mathbf{\Phi} \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^T \quad (5.45)$$

gdzie  $c_i$  są stałymi podlegającymi wyznaczeniu oraz wykorzystano zapis macierzowy, wprowadzony w przykładzie 5.3.

Jeśli operator  $A$  jest liniowy, to wówczas podstawiając (5.45) do (5.44) obliczymy  $c_i$  rozwiązując układ liniowych równań algebraicznych

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Psi_k) c_i = (f, \Psi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.46a)$$

Takie samo równanie, lecz w zapisie macierzowym, otrzymamy, jeśli przyjmiemy funkcję wagową

$$w_N = \sum_{k=1}^N \Psi_k d_k = \Psi \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \Psi^T \quad (5.47)$$

gdzie:

$\Psi = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_N]$  – macierz wierszowa funkcji bazowych  $\Psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$   
 $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N]^T$  – wektor dowolnych stałych  $d_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$

Podstawiając (5.45) i (5.47) do równania (5.44) (wyrażającego teraz ortogonalność do funkcji wagowej) oraz wykorzystując warunek  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  dla rozwiązania niezerowego, otrzymamy odpowiednik układu równań (5.46a) w postaci równania macierzowego

$$(\Psi^T, A\Phi) \mathbf{c} = (\Psi^T, f) \quad (5.46b)$$

### 5.5.1. Metoda Bubnowa-Galerkina

W metodzie tej przyjmiemy, że  $\Psi_k = \Phi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , co prowadzi do warunku ortogonalności w formie

$$(Au_N - f, \Phi_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.48)$$

Jeśli  $A$  jest operatorem liniowym, to wówczas niewiadome  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  wyznaczymy rozwiązując liniowy układ równań algebraicznych

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.49a)$$

który w postaci macierzowej można zapisać jako

$$(\Phi^T, A\Phi) \mathbf{c} = (\Phi^T, f) \quad (5.49b)$$

Jeśli operator  $A$  jest operatorem dodatnim, to iloczyn skalarny  $(A\Phi_i, \Phi_k)$  można wyrazić poprzez formę dwuliniową  $B(\Phi_i, \Phi_k)$  i wówczas równanie (5.49a) ma formę

$$\sum_{i=1}^N B(\Phi_i, \Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{m-n} (h_j, B_j \Phi_k) \quad (5.50)$$

gdzie po prawej stronie pojawił się składnik wynikający z możliwości wystąpienia niejednorodnych naturalnych warunków brzegowych, w ogólnym przypadku problemu brzegowego z mieszanymi warunkami brzegowymi. W powyższym równaniu  $B_j$  jest operatorem brzegowym, związanym z podstawowym warunkiem brzegowym,  $h_j$  jest skalarem wynikającym z występującego naturalnego warunku brzegowego,  $2m$  jest rzędem równania różniczkowego, a  $n$  jest liczbą wyspecyfikowanych podstawowych warunków brzegowych.

Sprowadzenie równania (5.49) do postaci (5.50), wyrażonej przez formę liniową  $B(\Phi_i, \Phi_k)$ , oznacza, że rozwiązanie może być poszukiwane w przestrzeni energii  $H_A$ , jak już to stwierdziliśmy, znacznie większej niż przestrzeni funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$  (powtórzmy: wystarczy, że funkcje bazowe z tej przestrzeni są różniczkowalne do rzędu  $m$  dla operatora różniczkowego  $A$  rzędu  $2m$  i spełniają tylko jednorodne podstawowe warunki brzegowe). Jeśli wszystkie zadane warunki brzegowe są jednorodne, to ostatni składnik w równaniu (5.50) znika. Przyjmując dodatkowe oznaczenie  $B(\Phi_i, \Phi_k) = (T\Phi_i, T\Phi_k)$ , gdzie  $T$  jest operatorem różniczkowym rzędu  $m$ , układ równań (5.50) przyjmie postać

$$\sum_{i=1}^N (T\Phi_i, T\Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.51a)$$

lub w zapisie macierzowym

$$((T\Phi)^T, T\Phi) \mathbf{c} = (\Phi^T, f) \quad (5.51b)$$

Z postaci tego równania wynika, że macierz układu równań  $\mathbf{B} = ((T\Phi)^T, T\Phi)$  jest symetryczna oraz że równanie ma już postać dalej nieredukowalną. Dla tego metodę Bubnowa-Galerkina, wyrażoną przez równanie (5.51), będziemy nazywali *słabym sformulowaniem wariacyjnym Bubnowa-Galerkina*. W takim razie metodę Bubnowa-Galerkina, wyrażoną przez równanie (5.49), możemy nazwać *silnym sformulowaniem wariacyjnym Bubnowa-Galerkina*.

W końcu zauważmy, że równania (5.51) i (5.12) są identyczne, co w tym przypadku oznacza równoważność metody Rayleigha-Ritza ze słabym sformulowaniem Bubnowa-Galerkina.

**Przykład 5.4.** Rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x &= 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dokładne wynosi  $u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$ .

a) Problem z jednym stopniem swobody,  $N = 1$

Przyjmijemy  $\Phi_1 = \sin \pi x$ ,  $\Phi_1(0) = 0$ ,  $\Phi_1(1) = 0$  tak, że rozwiązanie przybliżone ma postać

$$u_1 = c_1 \sin \pi x$$

Skorzystamy z równania (5.49) i obliczymy

$$\begin{aligned} A\Phi_1 &= \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \Phi_1 = (-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x) \\ (A\Phi_1, \Phi_1) &= \int_0^1 A(u_1)\Phi_1 dx = \frac{1}{2}(1 - \pi^2) \\ (f, \Phi_1) &= \int_0^1 (-x) \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie

$$(A\Phi_1, \Phi_1)c_1 = (f, \Phi_1)$$

czyli

$$\frac{1}{2}(1 - \pi^2)c_1 = -\frac{1}{\pi}$$

mamy

$$c_1 = \frac{2}{\pi(\pi^2 - 1)} \cong 0.0718$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_1 = 0,0718 \sin \pi x$$

Porównanie wyników obliczeń jest zestawione na rys. 5.5.

b) Problem z dwoma stopniami swobody,  $N = 2$

Funkcje bazowe przyjmiemy w postaci wielomianów

$$\Phi_1(x) = x(1-x) \quad \Phi_2(x) = x^2(1-x) \quad \Phi_i(0) = 0 \quad \Phi_i(1) = 0 \quad i = 1, 2$$

Rozwiązanie przybliżone ma formę

$$u_2 = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x) = \Phi \mathbf{c}$$

gdzie zdefiniowane są macierze

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1 \quad \Phi_2] && \text{– macierz jednowierszowa funkcji bazowych,} \\ \mathbf{c} &= [c_1 \quad c_2]^T && \text{– wektor kolumnowy niewiadomych parametrów.} \end{aligned}$$

Skorzystamy z równania (5.49), obliczając

$$\begin{aligned} A\Phi &= \left( \frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) [\Phi_1 \quad \Phi_2] = [-2 + x - x^2 \quad 2 - 6x + x^2 - x^3] \\ f\Phi^T &= \begin{bmatrix} -x^2(1-x) \\ -x^3(1-x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i następnie macierz współczynników przy niewiadomych

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\Phi^T, A\Phi) = \int_0^1 \Phi^T A\Phi dx = \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} x(1-x) \\ x^2(1-x) \end{bmatrix} [-2 + x - x^2 \quad 2 - 6x + x^2 - x^3] dx = \begin{bmatrix} 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 13/105 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz wektor prawej strony

$$\mathbf{F} = (f, \Phi^T) = \int_0^1 \begin{bmatrix} -x^2(1-x) \\ -x^3(1-x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań  $\mathbf{Bc} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{bmatrix}$$

daje wynik  $c_1 = \frac{71}{369} \cong 0,1924$  i  $c_2 = \frac{7}{41} \cong 0,1707$ . Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_2(x) = x(1-x)(0,1924 + 0,1707x)$$

Przyjmując  $x = \frac{1}{2}$ , otrzymamy  $u_1 = 0,0718$  i  $u_2 = 0,0694$ .

W tab. 5.1 porównano rozwiązanie  $u_2$  z rozwiązaniem dokładnym oraz obliczono residuum  $R_2$ .

$x$	Rozw. dokł.	Rozw. przybl. $u_2$	Residuum $R_2$
0,10	0,0186	0,0189	-0,0269
0,50	0,0697	0,0694	0,0139
0,90	0,0309	0,0311	-0,0342

Tabela 5.1. Porównanie liczbowe obliczeń w przykładzie 5.4

**Przykład 5.5.** Rozwiążemy problem brzegowy (5.29)

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (5.52a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = 0 \quad u'(1) = 1 \quad (5.52b)$$

Problem ten był rozwiązywany metodą Rayleigha-Ritza w przykładzie 5.3. Obecnie na tym przykładzie sprawdzimy równoważność metody Rayleigha-Ritza ze słabym sformułowaniem Bubnowa-Galerkina.

Warunek ortogonalności ma postać

$$\int_0^1 w \left( -\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 \right) dx = 0$$

a po zcałkowaniu przez części otrzymujemy

$$-w \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^1 wu dx + \int_0^1 wx^2 dx = 0$$

Wykorzystując warunek, że funkcja wagowa  $w$  spełnia jednorodny podstawowy warunek brzegowy  $w(0) = 0$ , mamy

$$\int_0^1 \left( \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wu \right) dx + \int_0^1 wx^2 dx - w(1)u'(1) = 0 \quad (5.53)$$

Równanie (5.53) jest słabym sformułowaniem wariacyjnym równania (5.52). Rozwiązanie poszukujemy w przestrzeni energii  $H_A$

$$H_A = \{u(x) \in C^1(0, 1) \mid 0 < x < 1, u(0) = 0\}$$

Podstawiając aproksymacje

$$u(x) = \Phi \mathbf{c} \quad w(x) = \Phi \mathbf{d}$$

do (5.53) otrzymamy po prostych przekształceniach równanie

$$\left[ \int_0^1 \left( \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} - \Phi^T \Phi \right) dx \right] \mathbf{c} + \int_0^1 \Phi^T x^2 dx - \Phi^T(1)u'(1) = \mathbf{0}$$

które jest identyczne z równaniem (5.40). Zauważmy, że zgodnie z oczekiwaniem naturalny warunek brzegowy został wprowadzony do sformułowania wariacyjnego jako efekt całkowania przez części.

**Przykład 5.6.** Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad 0 < x < 1 \quad (5.54a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(1) = q \quad -\frac{du}{dx}(0) = h \quad (5.54b)$$

Przestrzeń funkcji dopuszczalnych  $\mathcal{D}_A$  jest

$$\mathcal{D}_A = \{u(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, u(1) = q, -\frac{du}{dx}(0) = h\}$$



Zgodnie z metodą residuów ważonych napiszemy

$$\int_0^1 w \left( -\frac{d^2u}{dx^2} - f \right) dx = 0$$

a po wycalkowaniu przez części otrzymamy równanie słabego sformułowania wariacyjnego

$$-w \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^1 w f dx = 0 \quad (5.55)$$

Rozwiązanie  $u(x)$  będziemy poszukiwać w przestrzeni energii  $H_A$

$$H_A = \{u(x) \in C^1(0,1), 0 < x < 1, u(1) = 0\} \quad (5.56)$$

Funkcja testowa  $w(x)$  powinna być co najmniej jednokrotnie różniczkowalna i spełniać jednorodny podstawowy warunek brzegowy  $w(1) = 0$ . Uwzględniając ten warunek w (5.55) otrzymamy równanie

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \quad (5.57)$$

gdzie wykorzystano również naturalny warunek brzegowy. W tym prostym przykładzie łatwo wykazać równoważność rozwiązań (5.54) i (5.56).

a) Niech  $u$  jest rozwiązaniem (5.54). Wówczas  $u$  jest także rozwiązaniem (5.56). Ponieważ  $u$  jest rozwiązaniem (5.54), to możemy napisać

$$0 = - \int_0^1 w \left( \frac{d^2u}{dx^2} + f \right) dx \quad (5.58)$$

dla dowolnego  $w \in H_A$ . Całkując (5.58) przez części

$$0 = \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_0^1 w f dx - w \frac{du}{dx} \Big|_0^1$$

i wykorzystując warunki brzegowe  $-\frac{du}{dx}(0) = h$  i  $w(1) = 0$  otrzymamy

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \quad (5.59)$$

Ponieważ  $u$  jest rozwiązaniem (5.54), to spełnia warunek  $u(1) = q$  i stąd jest funkcją z przestrzeni  $\mathcal{D}_A$ . W końcu, ponieważ  $u$  także spełnia powyższe równanie dla wszystkich  $w \in H_A$ , to  $u$  spełnia warunki rozwiązania słabego.

b) Niech  $u$  będzie rozwiązaniem (5.56). Wówczas  $u$  będzie także rozwiązaniem (5.54).

Ponieważ  $u \in \mathcal{D}_A$  i  $u(1) = q$ , to mamy

$$\int_0^1 \frac{dw du}{dx dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h$$

dla wszystkich  $w \in H_A$ . Całkując przez części i wykorzystując, że  $w(1) = 0$ , otrzymamy

$$0 = \int_0^1 w \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + f \right) dx + w(0) \left[ \frac{du}{dx}(0) + h \right] \quad (5.60)$$

Z (5.60) wynika, że  $u$  jest rozwiązaniem (5.54), jeśli są spełnione równania Eulera (równanie różniczkowe problemu i naturalny warunek brzegowy)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + f &= 0 \\ \frac{du}{dx}(0) + h &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

**Przykład 5.7.** Rozwiążemy problem brzegowy (5.54), wykorzystując równanie słabego sformułowania wariacyjnego (5.56). Założymy, że poszukiwać będziemy rozwiązania odcinkowo-liniowego w podprzedziałach  $[0, \frac{1}{2}]$  i  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Przykład ten może być traktowany jako wprowadzenie do metody elementów skończonych, omówionej w rozdziale szóstym.

Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci (5.14)

$$u_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) c_i + \Phi_0(x)q \quad (5.62)$$

gdzie  $\Phi_0(x)q$  jest funkcją spełniającą niejednorodny podstawowy warunek brzegowy (5.54b).

Przyjmując  $N = 2$ , wybieramy funkcje  $\Phi_i, i = 0, 1, 2$ , w postaci kombinacji liniowych funkcji Lagrange'a

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

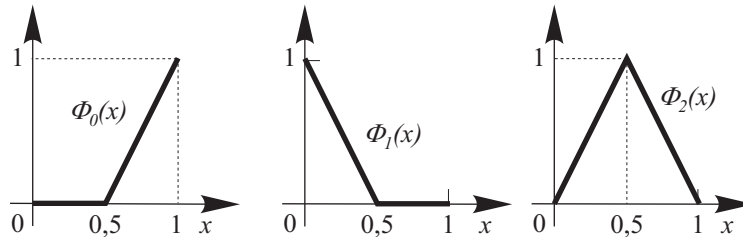
W ten sposób możemy napisać, że

$$u_2 = \Phi_1 c_1 + \Phi_2 c_2 + \Phi_0 q = \Phi \mathbf{c} + \Phi_0 q \quad (5.63a)$$

oraz

$$w_2 = \Phi_1 d_1 + \Phi_2 d_2 = \Phi \mathbf{d} \quad (5.63b)$$

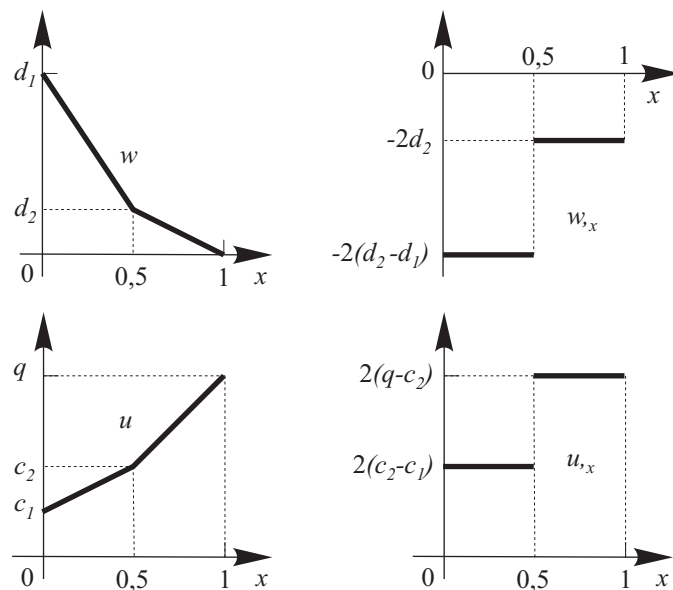
Przyjęcie takich odcinkowo-liniowych funkcji bazowych spełnia warunek ciągłości  $C^1$  w przedziałach  $(0, \frac{1}{2})$  i  $(\frac{1}{2}, 1)$  (powiemy, że w tych podprzedziałach funkcje bazowe są z przestrzeni energii  $H_A$ ). Jednakże dla  $x = \frac{1}{2}$  nie spełniony będzie warunek ciągłości pochodnej rozwiązania przybliżonego. Rys. 5.3 przedstawia wykresy funkcji bazowych, natomiast na rys. 5.4 pokazano wykresy funkcji  $u_2$  i  $w_2$  oraz ich pochodnych.



Rys.5.3. Funkcje bazowe w przykładzie 5.7

Podstawiając (5.63) do (5.56) mamy

$$\mathbf{d}^T \left\{ \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} dx \right] \mathbf{c} + \int_0^1 \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi_0}{dx} q dx - \int_0^1 \Phi^T f dx - \Phi^T(0) h \right\} = 0$$

Rys.5.4. Funkcje  $u_2$  i  $w_2$  oraz ich pochodne w przykładzie 5.7

co dla  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  prowadzi do równania macierzowego

$$\mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

gdzie zdefiniowano

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} dx$$

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \Phi^T f dx + \Phi^T(0) h - q \int_0^1 \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi_0}{dx} dx$$

Elementy  $b_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , macierzy  $\mathbf{B}$  obliczymy ze wzoru

$$b_{ij} = \int_0^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx = \int_0^{1/2} \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx + \int_{1/2}^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx$$

otrzymując

$$\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Z kolei elementy  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , wektora  $\mathbf{F}$  wyznaczmy ze wzoru

$$f_i = \int_0^1 \Phi_i f \, dx + \Phi_i(0) h - q \int_{1/2}^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_0}{dx} dx$$

co prowadzi do wyników

$$f_1 = \int_0^{1/2} (1 - 2x)f(x) \, dx + h$$

$$f_2 = 2 \int_0^{1/2} xf(x) \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1 - x)f(x) \, dx + 2q$$

Zauważmy, że brak ciągłości funkcji bazowych nie sprawił kłopotu w obliczeniach, ponieważ całkowanie zostało rozdzielone na dwa przedziały  $[0, \frac{1}{2}]$  i  $[\frac{1}{2}, 1]$ . W dalszym ciągu rozważymy 3 przypadki określenia funkcji  $f$ .

1.  $f = 0$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} h \\ 2q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + h \\ q + \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ma formę

$$u = (q + h)\Phi_1 + (q + \frac{h}{2})\Phi_2 + q\Phi_3 = q(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) + h(\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_2)$$

$$u = q + h(1 - x)$$

Otrzymane rozwiązanie jest liniowe i jest ono dokładne, co stanowi rezultat przyjęcia liniowych funkcji bazowych.

2.  $f(x) = f = \text{const}$

$$f_1 = \frac{f}{4} + h$$

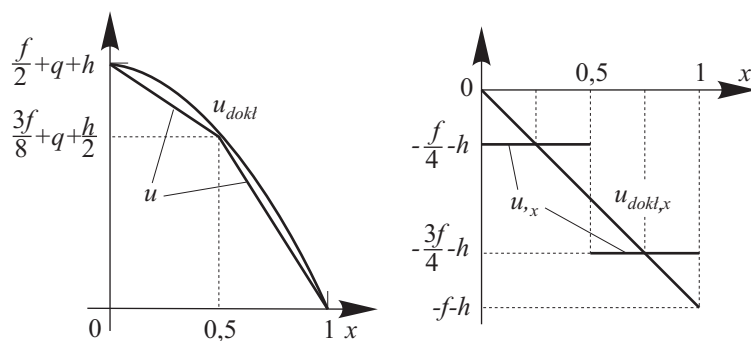
$$f_2 = \frac{f}{2} + 2q$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f}{4} + h \\ \frac{f}{2} + 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{2} + q + h \\ \frac{3f}{8} + q + \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

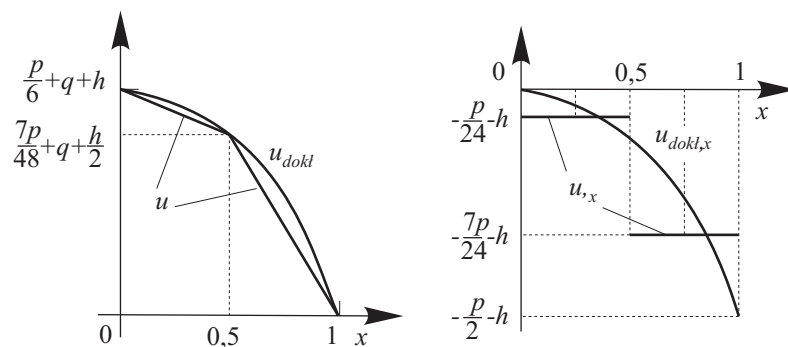
Rozwiązanie ma postać

$$u = q + h(1 - x) + \frac{f}{2}\Phi_1 + \frac{3f}{8}\Phi_2$$

Na rys. 5.5 porównano wynik dokładny z obliczeniami.



Rys.5.5. Porównanie rozwiązania dokładnego z rozwiązaniem wariacyjnym dla przypadku 2 w przykładzie 5.7



Rys.5.6. Porównanie rozwiązania dokładnego z rozwiązaniem wariacyjnym dla przypadku 3 w przykładzie 5.7

3.  $f(x) = px$ ,  $p = \text{const}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{p}{24} + h \\ \frac{p}{4} + 2q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{p}{6} + q + h \\ \frac{7p}{48} + q + \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Porównanie wyników obliczeń dokładnych i przybliżonych przedstawiono na rys. 5.6.

**Przykład 5.8.** Rozwiążemy proste zadanie z wytrzymałości materiałów obliczenia funkcji ugięcia belki wspornikowej, do której przyłożone jest obciążenie ciągle o intensywności  $f$  i obciążenie momentem skupionym  $M$  na końcu  $x = L$  wspornika (rys. 2.7).

Modelem matematycznym dla tego zadania jest problem brzegowy

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad EI > 0 \quad (5.64a)$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0 \quad \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = M \quad \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = F = 0 \quad (5.64b)$$

W tym przypadku mamy  $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \right)$ .

Wyjściowy problem (5.64) przetransformujemy do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi przez podstawienie

$$w(x) = u(x) + w_0 \quad (5.65)$$

Podstawiając (5.65) do (5.64a) otrzymamy

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = f \quad (5.66)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{f} = f - \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)$$

równanie (5.66) przyjmie postać

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \bar{f} \quad 0 < x < L \quad (5.67)$$

Funkcję  $w_0$  wyznaczmy z warunku spełnienia niejednorodnego warunku brzegowego w (5.64b), co daje wynik

$$w_0 = M \frac{x^2}{2EI} \quad (5.68)$$

Wykorzystując (5.68) otrzymamy warunki brzegowe dla równania (5.67) w formie

$$u(0) = \frac{du}{dx}(0) = EI \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = \left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.69)$$

Przyjęcie  $w_0$  w formie (5.68) daje wynik

$$\bar{f} = f - \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{M}{EI} \right) = f$$

W dalszym ciągu rozważać już będziemy problem brzegowy zdefiniowany równaniami (5.67) i (5.69). Przestrzeń energii  $H_A$  jest zdefiniowana w następujący sposób

$$H_A = \{u(x) \in H^2(0, L), u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0\}$$

Słabe sformułowanie wariacyjne wyraża równanie  $B(u, v) = l(v)$  dla  $v \in H_A$ , gdzie

$$B(u, v) = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx \quad l(v) = \int_0^L v f dx \quad (5.70)$$

W  $N$ -parametrowej aproksymacji funkcje bazowe  $\Phi_j \in H_A$  (tzn. spełniają jednorodne podstawowe warunki brzegowe  $\Phi_j(0) = \Phi_j'(0) = 0$ ). Przyjmujemy, że zbiór  $\{\Phi_j\} = \{x^{j+1}\}$  jest bazą w  $H_A$ . Rozwiązanie przybliżone otrzymamy przyjmując

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j \quad v_N = x^{i+1} \quad (5.71)$$



Podstawiając (5.71) do (5.70) otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} b_{ij} &= B(\Phi_i, \Phi_j) = \int_0^L EI(i+1)ix^{i-1}j(j+1)x^{j-1}dx = \\ &= \frac{EIij(i+1)(j+1)(L)^{i+j-1}}{(i+j-1)} \\ f_i &= l(\Phi_i) = \int_0^L x^{i+1}f dx = \frac{f(L)^{i+2}}{i+2} \end{aligned}$$

oraz oznaczamy  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  i  $\mathbf{F} = [f_i]^T$ .

Wykorzystując wzory (5.70), macierz  $\mathbf{B}$  i wektor  $\mathbf{F}$  mają postać

$$\mathbf{B} = \int_0^L \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)^T EI \frac{d^2\Phi}{dx^2} dx \quad \mathbf{F} = \int_0^L \Phi^T f dx \quad (5.72)$$

Przyjmując rozwiązanie dwuparametrowe  $w_2 = u_2 + w_0$  otrzymamy układ równań  $\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{F}$  w formie

$$\begin{aligned} 4Lc_1 + 6L^2c_2 &= \frac{fL^3}{3EI} \\ 6L^2c_1 + 12L^3c_2 &= \frac{fL^4}{4EI} \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest  $c_1 = \frac{5fL^2}{24EI}$ ,  $c_2 = -\frac{fL}{12EI}$ .

Rozwiązanie przybliżone wyjściowego problemu (5.64) ma postać

$$w_2 = \frac{12M + 5fL^2}{24EI}x^2 - \frac{fL}{12EI}x^3$$

Rozwiązanie dokładne otrzymalibyśmy, przyjmując  $N = 3$  ( $w(x)$  jest dokładnie funkcją czwartego stopnia).

Zadanie możemy rozwiązać również metodą Rayleigha-Ritza, przyjmując funkcjonal rozszerzony w formie

$$J(\Psi, w) = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - fw \right] dx + M\Psi(L) \quad (5.73a)$$

z równaniem więzów

$$G(\Psi, w) \equiv \Psi + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (5.73b)$$

gdzie  $\Psi$  oznacza funkcję kąta obrotu przekroju poprzecznego belki. Zauważmy, że podstawienie za  $\Psi$  (5.73b) do (5.73a) prowadzi do znanego funkcjonału całkowitej energii potencjalnej belki. Włączając równanie więzów do (5.73a) otrzymamy rozszerzony funkcjonał w formie

$$L(\Psi, w, \lambda) = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - fw \right] dx + \int_0^L \lambda \left( \Psi + \frac{dw}{dx} \right) dx + M\Psi(L) \quad (5.74)$$

gdzie mnożnik  $\lambda$ , nazywany mnożnikiem Lagrange'a, ma w tym przykładzie interpretację siły poprzecznej. Podstawowe warunki brzegowe są obecnie  $\Psi(0) = w(0) = 0$ .

Rozwiązanie otrzymamy przyrównując do zera pierwszą wariację  $\delta L = 0$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^L \left( EI \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\delta\Psi}{dx} + \lambda \delta\Psi \right) dx + M\delta\Psi(L) + \int_0^L \left( \lambda \frac{d\delta w}{dx} - f\delta w \right) dx + \\ & + \int_0^L \delta\lambda \left( \Psi + \frac{dw}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (5.75)$$

Przyjmując rozwiązanie jednoparametrowe, mamy dla każdego aproksymowanego pola

$$\Psi(x) = a_1 \Phi_1^1 \quad w(x) = b_1 \Phi_1^2 \quad \lambda(x) = c_1 \Phi_1^3$$

gdzie  $\Phi_1^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  są funkcjami aproksymacyjnymi. Zakładając następnie, że  $\Phi_1^1 = x$ ,  $\Phi_1^2 = x$  i  $\Phi_1^3 = 1$ , otrzymamy po podstawieniu do (5.75) trzy równania (dla niezależnych wariacji  $\delta a_1$ ,  $\delta b_1$  i  $\delta c_1$ )

$$EILa_1 + \frac{L^2}{2}c_1 = -ML \quad c_1 = \frac{fL}{2} \quad b_1 = \frac{4ML + fL^3}{8EI}$$

Rozwiązanie jednoparametrowe ma postać

$$\Psi(x) = -\left( \frac{4M + fL^2}{4EI} \right) x \quad w(x) = \frac{(4M + fL^2)L}{8EI} x \quad \lambda(x) = \frac{fL}{2}$$

podczas gdy rozwiązanie dokładne wynosi

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{-(2M + fL^2)x}{2EI} + \frac{fLx^2}{2EI} - \frac{fx^3}{6EI} \\ \lambda &= f(L - x) \\ w(x) &= \frac{(2M + fL^2)x^2}{4EI} - \frac{fLx^3}{6EI} + \frac{fx^4}{24EI}\end{aligned}$$

Na zakończenie tej dużej liczby przykładów rozwiążemy jeszcze metodą Bubnowa-Galerkina nieliniowy problem brzegowy.

**Przykład 5.9.** Rozważmy nieliniowe równanie różniczkowe

$$u \frac{d^2u}{dx^2} + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (5.76a)$$

$$u'(0) = 0 \quad u(1) = \sqrt{2} \quad (5.76b)$$

Obszarem definicji operatora nieliniowego  $\bar{A}u \equiv u \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right) + \left( \frac{du}{dx} \right)^2$  jest przestrzeń  $\bar{\mathcal{D}}_A$  funkcji dwukrotnie różniczkowalnych, które spełniają warunki brzegowe (5.76b). Przestrzeń ta jest nieliniowa, ponieważ warunki brzegowe są niejednorodne. Podstawiając  $u = v + \sqrt{2}$  przetransformujemy ten problem do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi, otrzymując

$$(v + \sqrt{2}) \frac{d^2v}{dx^2} + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (5.77a)$$

$$v'(0) = 0 \quad v(1) = 0 \quad (5.77b)$$

Teraz  $v$  należy do przestrzeni liniowej funkcji dwukrotnie różniczkowalnych i spełniających jednorodne warunki brzegowe. Przestrzeń energii  $H_A$  zawiera funkcje co najmniej klasy  $C^1$ , które znikają dla  $x = 1$ .

Problem (5.76) ma rozwiązanie w formie

$$u(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Zauważmy teraz, że równanie (5.77) może być przepisane w formie

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dx} \left[ (v + \sqrt{2}) \frac{dv}{dx} \right] &= -1 \\ v'(0) = 0 \quad v(1) &= 0\end{aligned}$$

Równanie (5.48) przyjmie teraz postać

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left[ (v_N + \sqrt{2}) \frac{dv_N}{dx} \right] + 1 \right\} \Phi_k dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.78)$$

dla każdego  $\Phi_k \in \mathcal{D}_A$ . Sformułowanie słabe otrzymamy całkując przez części składnik w nawiasie kwadratowym

$$\int_0^1 \left[ (v_N + \sqrt{2}) \frac{dv_N}{dx} \frac{d\Phi_k}{dx} + \Phi_k \right] dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.79)$$

dla każdego  $\Phi_k \in H_A$ . Wyrazy brzegowe wynikające z całkowania przez części zniknęły, ponieważ  $v'(0) = 0$  i  $\Phi_k(1) = 0$ .

Wykorzystanie (5.78) wymaga przyjęcia funkcji  $\Phi_i$  z przestrzeni  $\mathcal{D}_A$ . Przyjmujemy, że są nimi wielomiany

$$v_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \Phi_i = 1 - x^{i+1}$$

oraz że  $N = 1$ , co prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned} A(v_1) &= -\frac{d}{dx} \left[ (v_1 + \sqrt{2}) \frac{dv_1}{dx} \right] = -\frac{d}{dx} (c_1(1-x^2) + \sqrt{2})(-2c_1x) = \\ &= -[c_1(1-x^2) + \sqrt{2}](-2c_1) - (2xc_1)^2 = \sqrt{2}2c_1 + 2c_1^2 - 6x^2c_1^2 \\ (A(v_1), \Phi_1) &= \int_0^1 A(v_1)(1-x^2)dx = \frac{4}{3}\sqrt{2}c_1 + \frac{8}{15}c_1^2 \\ (f, \Phi_1) &= \int_0^1 (-1)(1-x^2)dx = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie kwadratowe

$$(A(v_1), \Phi_1) = (f, \Phi_1)$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \frac{-5\sqrt{2} + \sqrt{30}}{4} \cong -0,39846 \\ c_1^{(2)} &= \frac{-5\sqrt{2} - \sqrt{30}}{4} \cong -3,13707 \end{aligned}$$

Wyboru właściwego  $c_1$  dokonamy korzystając z kryterium minimum residuum. Wybieramy to  $c_1$ , dla którego mniejsza będzie norma  $L_2$  residuum  $R_1 = A(v_1) - f$ . Z obliczeń wynika, że tym  $c_1$  jest  $c_1^{(1)}$ . W efekcie jednoparametrowe rozwiązanie problemu (5.76) ma postać

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = 1,01575 + 0,39846x^2 \quad (5.80)$$

Rozwijając w szereg potęgowy rozwiązanie dokładne  $\sqrt{1+x^2}$  mamy

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + 0,5x^2 + \dots$$

co oznacza, że rozwiązanie przybliżone jest dość dobre.

Jeśli rozwiązywaliśmybyśmy równanie (5.76a) z niejednorodnymi warunkami brzegowymi, to należałoby przyjąć rozwiązanie przybliżone w formie

$$u_N = \Phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$$

gdzie funkcję  $\Phi_0$  należałoby tak dobrać, aby spełniała warunki brzegowe (5.76b). Przyjmując  $\Phi_0 = \sqrt{2}$ , tak że  $\Phi_0(1) = \sqrt{2}$  i  $\Phi_0'(0) = 0$  oraz  $N = 1$ , znowu otrzymamy rozwiązanie (5.80).

Teraz dla otrzymania rozwiązania skorzystamy z równania (5.79). Ponieważ  $\Phi_i \in H_A$ , to wybierzemy  $\Phi_i = 1 - x^i$ .

Przyjmujemy

$$v_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \Phi_i = 1 - x^i$$

Podstawiając ten wzór do (5.79) i wykonując nakazane całkowanie otrzymamy (dla  $N = 1$ )

$$\begin{aligned} c_1^2 + 2\sqrt{2}c_1 + 1 &= 0 \\ c_1^{(1)} &= 1 - \sqrt{2} \quad c_1^{(2)} = -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z kryterium minimum residuum w sensie normy  $L_2$  ustalimy, że właściwym rozwiązaniem jest  $c_1^{(1)}$ . Rozwiązanie ma postać

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = (1-x)(1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = (1-x) + \sqrt{2}x \quad (5.81)$$

Nie jest to rozwiązanie satysfakcjonujące (specjalnie dla większych wartości  $x$   $0 < x < 1$ ), ale można je znacznie poprawić przyjmując więcej parametrów  $c_i$

w aproksymacji. W takim jednakże przypadku otrzymamy nieliniowy układ równań algebraicznych, który wymaga rozwiązania metodami numerycznymi. Na zakończenie wspomnimy o *metodzie Petrowa-Galerkina*, w której funkcje wagowe  $\Psi_k$  w równaniu  $(A(v_N) - f, \Psi_k) = 0$  są różne od funkcji bazowych  $\Phi_k$ . Przyjmując

$$\Psi_1 = \cos \frac{\pi x}{2} \quad \text{mamy} \quad \Psi_1(1) = 0 \quad \text{i} \quad \Psi_1'(0) = 0$$

W tym przypadku, dla  $\Phi_1 = 1 - x^{i+1}$ , otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned} (A(v_1), \Psi_1) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 4\sqrt{2} c_1 + \left[ -8 + \frac{96}{\pi^2} \right] c_1^2 \right\} \\ (f, \Psi_1) &= -\frac{2}{\pi} \\ c_1^{(1,2)} &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 2[(96/\pi^2) - 8]}}{(96/\pi^2) - 8} \\ c_1^{(1)} &= -0,40317 \quad c_1^{(2)} = -2,87268 \end{aligned}$$

Z warunku minimum residuum wybieramy  $c_1^{(1)}$  tak, że rozwiązaniem jest funkcja

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = 1,01104 + 0,40317x^2$$

co jest trochę lepszym wynikiem niż rozwiązanie metodą Bubnowa-Galerkina.

### 5.5.2. Metoda najmniejszych kwadratów

Rozważmy równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w} \quad \Omega \quad (5.82)$$

gdzie  $A$  nie musi być operatorem symetrycznym.

W metodzie najmniejszych kwadratów rozwiązanie równania (5.82) jest konstruowane w formie funkcji  $u_N \in \mathcal{D}_A$

$$u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$$

która minimalizuje residuum

$$\|R_N\| = \|Au_N - f\| = \left\| \sum_{i=1}^N A(c_i \Phi_i) - f \right\|$$

Warunek powyższy prowadzi do układu równań z nieznanymi parametrami  $c_1, c_2, \dots, c_N$

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k} \|R_N\| = \frac{\partial}{\partial c_k} \sqrt{(R_N, R_N)} = \left( R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right) \frac{1}{\|R_N\|} \quad (5.83)$$

Ponieważ  $R_N \neq 0$ , to oznacza, że równanie (5.83) jest równoważne równaniu

$$\left( R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right) = 0 \quad (5.84)$$

W ten sposób stwierdzamy, że metoda najmniejszych kwadratów to taki wariant metody residuów ważonych, w którym funkcja wagowa ma postać

$$\Psi_k = \frac{\partial R_N}{\partial c_k}$$

Równanie (5.84) w rozwiniętej formie ma postać

$$\left( Au_N - f, \frac{\partial}{\partial c_k} (Au_N) \right) = 0 \quad (5.85)$$

Jeśli  $A$  jest operatorem liniowym, to prowadzi to do liniowego układu równań algebraicznych w formie

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, A\Phi_k) c_i = (f, A\Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.86a)$$

lub w postaci macierzowej

$$(A\Phi^T, A\Phi) \mathbf{c} = (A\Phi^T, f) \quad (5.86b)$$

Macierz współczynników przy niewiadomych  $B_{ij} = (A\Phi_i, A\Phi_j)$  jest symetryczna dla dowolnego operatora  $A$ . Jest ona nieosobliwa, jeśli zbiór  $\{A\Phi_i\}$  jest liniowo niezależny (czyli jeśli  $A$  jest liniowy i  $\{\Phi_i\}$  jest zbiorem funkcji liniowo niezależnych). Można udowodnić, że rozwiązanie przybliżone  $u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$  ze współczynnikami  $c_i$  obliczonymi z (5.86) jest zbieżne w przestrzeni energii  $H_A$ , związanej z dodatnio określonym operatorem  $A$ , do rozwiązania dokładnego  $u$  równania (5.83).

Zauważmy, że jeśli operator  $A$  i baza  $\{\Phi_i\}$  są takie, że  $A\Phi_k = \alpha_k\Phi_k$ ,  $\alpha_k$  – stała (bez sumowania), to równanie (5.86) sprowadza się do równania (5.49)

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

co oznacza, że w tym przypadku metoda Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu silnym i metoda najmniejszych kwadratów dają to samo rozwiązanie.

**Przykład 5.10.** Rozważmy ten sam problem brzegowy co w przykładzie 5.4, przyjmując  $N = 1$  i  $\Phi_1 = \sin \pi x$ .

Korzystając z równania (5.86), obliczymy

$$\begin{aligned} (A\Phi_1) &= -\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x \\ (A\Phi_1, A\Phi_1) &= \int_0^1 [A\Phi_1]^2 dx = \int_0^1 (-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x)^2 dx = \frac{1}{2}(1 - \pi^2)^2 \\ (f, A\Phi_1) &= \int_0^1 (-x)(-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x) dx = -\frac{1}{\pi}(1 - \pi^2) \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie

$$(A\Phi_1, A\Phi_1)c_1 = (f, A\Phi_1)$$

lub

$$\frac{1}{2}(1 - \pi^2)^2 c_1 = -\frac{1}{\pi}(1 - \pi^2)$$

mamy  $c_1 = \frac{2}{\pi(\pi^2-1)} \cong 0,0718$ . Wyniki otrzymane z metody Bubnowa-Galerkina i z metody najmniejszych kwadratów są takie same, ponieważ  $A\Phi_1 = \alpha_1\Phi_1 = (1 - \pi^2) \sin \pi x$ ,  $\alpha_1 = 1 - \pi^2$ .

**Przykład 5.11.** Rozwiążmy nieliniowe równanie różniczkowe (5.76), rozwiązywane w przykładzie 5.9 metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmijmy rozwiązanie przybliżone w formie

$$u_1(x) = \Phi_0 + c_1\Phi_1 = \sqrt{2}x^2 + c_1(1 - x^2) \quad (5.87)$$



gdzie  $\Phi_0(1) = \sqrt{2}$  i  $\Phi_0'(0) = 0$ , co oznacza, że  $\Phi_0(x)$  spełnia warunki brzegowe zadania. Funkcja  $\Phi_1$  spełnia jednorodne warunki brzegowe.

Powtarzając metodę rozwiązania z przykładu 5.9 otrzymamy równanie dla metody Bubnowa-Galerkina

$$4c_1^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 7 = 0$$

z rozwiązaniem  $c_1^{(1)} = 1,012575$  i  $c_1^{(2)} = -1,72289$ . Mniejsze residuum jest dla  $c_1^{(1)}$  i stąd rozwiązanie ma postać

$$u_1 = 1,01575 + 0,39846x^2$$

to znaczy jest takie samo jak (5.80).

Zastosowanie aproksymacji (5.87) do równania (5.85) daje wyniki

$$\begin{aligned} Au_1 &= (12 - 12\sqrt{2}c_1 + 6c_1^2)x^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 2c_1^2 \\ \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 &= 12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2} \\ \left( Au_1, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) &= \int_0^1 \{ [12(1 - \sqrt{2})c_1 + 6c_1^2]x^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 2c_1^2 \} \cdot \\ &\quad \cdot [12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2}] dx = \\ &= \frac{32}{5}c_1^3 - \frac{96}{5}\sqrt{2}c_1^2 + \frac{232}{5}c_1 - \frac{104}{5}\sqrt{2} \\ \left( f, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) &= \int_0^1 [12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2}] dx = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\left( Au_1, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) - \left( f, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) = 0$$

lub

$$c_1^3 - 3\sqrt{2}c_1^2 + \frac{232}{32}c_1 - \frac{47}{16}\sqrt{2} = 0$$

Z trzech pierwiastków tylko jeden jest rzeczywisty  $c_1^{(1)} = 1,0256$  i rozwiązanie metodą najmniejszych kwadratów ma postać

$$u_1 = 1,0256 + 0,3257x^2 \quad (5.88)$$

Zastosowanie metody Petrowa-Galerkina z  $\Psi_1 = \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{2}$  i tą samą aproksymacją (5.87) daje wynik

$$u_1 = 1,01104 + 0,40317x^2 \quad (5.89)$$

W tab. 5.2 porównano rozwiązania wariacyjne z rozwiązaniem dokładnym.

$x$	Rozw. dokł.	(5.81)	(5.80)	(5.88)	(5.89)
0,0	1,000	1,000	1,016	1,089	1,011
0,2	1,020	1,083	1,033	1,102	1,027
0,4	1,077	1,166	1,080	1,141	1,076
0,6	1,662	1,249	1,159	1,206	1,156
0,8	1,281	1,331	1,271	1,297	1,260
1,0	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414

Tabela 5.2. Porównanie liczbowe różnych rozwiązań problemu (5.76)

### 5.5.3. Metoda kollokacji punktowej

W metodzie kollokacji punktowej parametry  $c_j$  w aproksymacji  $u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j$  są wyznaczone z warunku zerowania się residuum w  $N$  wybranych punktach  $\mathbf{x}^k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) obszaru  $\Omega$

$$R_N(\mathbf{x}^k, c_j, \Phi_j, f) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.90)$$

Dla liniowego równania operatorowego  $Au = f$  otrzymamy równanie

$$\sum_{j=1}^N A(\Phi_j(\mathbf{x}^k))c_j - f(\mathbf{x}^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.91a)$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} A\Phi(\mathbf{x}^1) \\ A\Phi(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ A\Phi(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}^1) \\ f(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix} \quad (5.91b)$$

Równanie (5.91) może być zinterpretowane w formalizmie metody residuów ważonych w następujący sposób.

Niech  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$  oznacza funkcję Diraca o własności

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv f(\mathbf{x}^k)$$

to wówczas równanie (5.91) może być przedstawione w formie alternatywnej jako

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[ \int_{\Omega} A(\Phi_j(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) d\mathbf{x} \right] - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) d\mathbf{x} = 0 \quad (5.92)$$

Porównując równanie (5.92) z równaniem (5.46) staje się widoczne, że funkcja wagowa w tej metodzie jest dana wzorem

$$\Psi_k(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (5.93)$$

Właściwy wybór punktów kolokacji  $\mathbf{x}^k$  decyduje o dobrym uwarunkowaniu układu równań (5.91) i zbieżności rozwiązania aproksymacyjnego (na pewno powinny być równomiernie rozłożone w obszarze rozwiązania).

**Przykład 5.12.** Rozwiążemy ten sam problem brzegowy, który był już rozwiązywany w przykładach 5.4 i 5.10, przyjmując punkt kolokacji  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

Rozwiązując równanie (5.91) obliczamy kolejno

$$A(\Phi_1(x_1)) = -\pi^2 \sin \pi x_1 + \sin \pi x_1 = -\pi^2 + 1$$

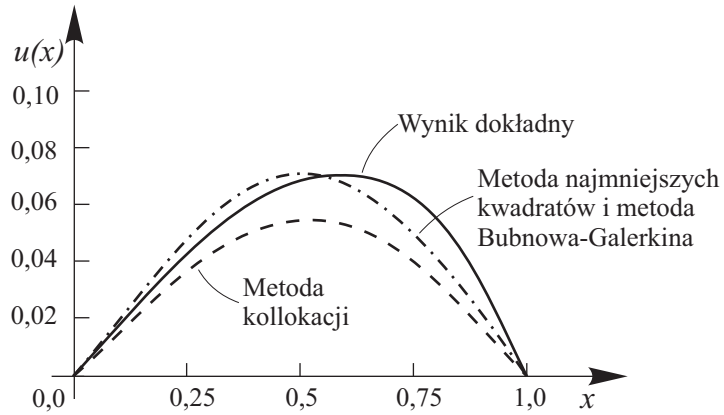
$$f(x_1) = -x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$A(\Phi_1(x_1))c_1 - f(x_1) = 0$$

lub

$$(-\pi^2 + 1)c_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2(\pi^2 - 1)} \cong 0,0564$$

Na rys. 5.7 przedstawiono graficznie wyniki obliczeń dokładnych oraz metodami: Bubnowa-Galerkina, najmniejszych kwadratów i kolokacji punktowej. Jak widać, w tym przykładzie metoda kolokacji punktowej jest najmniej dokładna.



Rys.5.7. Porównanie różnych metod residuów ważonych

**Przykład 5.13.** Rozważmy powtórnie problem brzegowy, który był rozwiązywany w przykładzie 5.4 metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmijmy dwa punkty kollokacji,  $N = 2$ ,  $x_1 = \frac{1}{4}$  i  $x_2 = \frac{1}{2}$ , oraz funkcje bazowe jak w punkcie b) przykładu 5.4

$$\Phi_1(x) = x(1-x) \quad \Phi_2(x) = x^2(1-x)$$

Rozwiązujemy układ równań (5.68) korzystając z zapisu macierzowego

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} A(\Phi_1(x_1)) & A(\Phi_2(x_1)) \\ A(\Phi_1(x_2)) & A(\Phi_2(x_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + x_1 - x_1^2 & 2 - 6x_1 + x_1^2 - x_1^3 \\ -2 + x_2 - x_2^2 & 2 - 6x_2 + x_2^2 - x_2^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{29}{16} & \frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie  $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 1$  oraz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań  $Bc = F$

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{7} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

jest w postaci

$$c_1 = \frac{6}{31} \cong 0,1935 \quad c_2 = \frac{40}{217} \cong 0,1843$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_2(x) = x(1-x)(0,1935 + 0,1843x)$$

W tab. 5.3 porównano rozwiązanie  $u_2$  z rozwiązaniem dokładnym oraz obliczono residuum  $R_2$ .

$x$	Rozw. dokł.	Rozw. przybl. $u_2$	Residuum $R_2$
0,10	0,0186	0,0191	-0,00995
0,50	0,0697	0,0714	0
0,90	0,0309	0,0324	-0,0815

Tabela 5.3. Porównanie wyników obliczeń w przykładzie 5.13

Porównując tablice 5.1 i 5.3 widzimy, że metoda Bubnowa-Galerkina jest znowu dokładniejsza (jednak obliczenia są bardziej pracochłonne, bo wymaga ona całkowania).

**Przykład 5.14.** Rozwiążmy belkę wolno podpartą z równomiernie rozłożonym obciążeniem  $f_0$ .

Problem jest opisany równaniem różniczkowym (5.64a) z warunkami brzegowymi

$$w(0) = w(L) = 0 \quad \frac{d^2w}{dx^2}(0) = \frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0 \quad (5.94)$$

Przyjmijmy dwuparametrową aproksymację

$$w_2 = c_1 \sin \frac{\pi x}{L} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (5.95)$$

z punktami kolokacji  $x_1 = \frac{L}{4}$  i  $x_2 = \frac{L}{2}$ .

Wykorzystanie wzoru (5.92) prowadzi do następującego układu równań macierzowych:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A(\Phi_1(x_1)) & A(\Phi_2(x_1)) \\ A(\Phi_1(x_2)) & A(\Phi_2(x_2)) \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{4} & \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{4} \\ \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{2} & \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}$$

gdzie  $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \right)$  oraz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań  $\mathbf{Bc} = \mathbf{F}$

$$EI \left[ c_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{4} + c_2 \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{4} \right] = f_0$$

$$EI \left[ c_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{2} \right] = f_0$$

ma postać

$$c_1 = \frac{(1 + \sqrt{2})f_0 L^4}{2EI\pi^4} \quad c_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)f_0 L^4}{162EI\pi^4}$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$w_2(x) = \frac{f_0 L^4}{162EI\pi^4} \left( 195,55 \sin \frac{\pi x}{L} + 0,414 \sin \frac{3\pi x}{L} \right)$$

Zauważmy, że jeśli przyjęlibyśmy punkty kolokacji  $x_1 = \frac{L}{3}$  i  $x_2 = \frac{2L}{3}$ , to nie moglibyśmy wyznaczyć  $c_2$ . Z uwagi na symetrię belki przyjęcie  $x_1 = \frac{L}{4}$  i  $x_2 = \frac{L}{2}$  jest wystarczające. Ugięcie maksymalne  $w_2\left(\frac{L}{2}\right) = 1,205 \frac{f_0 L^4}{EI\pi^4} = \frac{f_0 L^4}{80,87EI}$  jest różne o 5% od wartości dokładnej równej  $\frac{f_0 L^4}{76,8EI}$ .

## Rozdział 6

# Wprowadzenie do metody elementów skończonych MES

### 6.1. Uwagi wstępne – podstawowe etapy procedury (MES)

Klasyczne metody wariacyjne, przedstawione w rozdziale piątym, mogą być efektywnie wykorzystywane tylko do rozwiązywania problemów z małą liczbą stopni swobody [10]. Spowodowane jest to przede wszystkim trudnościami w doborze funkcji aproksymacyjnych. Jeśli nawet takie funkcje zostałyby dobrane, to z kolei obliczanie współczynników macierzy równań algebraicznych rozwiązania przybliżonego nie może być zautomatyzowane, ponieważ funkcje aproksymacyjne zmieniają się zależnie od rozważanego problemu. Oznacza to, że poprawa efektywności stosowania metod wariacyjnych zależy od tego, czy możliwe jest, przy rozwiązywaniu danej klasy problemów, konstruowanie funkcji aproksymacyjnych dla dowolnych obszarów z wariacyjnie konsystentnymi warunkami brzegowymi. Takie możliwości stwarza metoda elementów skończonych (MES).

Metoda elementów skończonych jest procedurą wariacyjną, w której funkcje aproksymacyjne są wyznaczone w obszarze zastąpionym przez zbiór prostych podobszarów, na jakie obszar ten został podzielony. Układ równań algebraicznych problemu jest w tej metodzie generowany w odmienny sposób niż to ma miejsce w tradycyjnych metodach wariacyjnych, ponieważ funkcje aproksymacyjne są wielomianami algebraicznymi, wyznaczonymi według zasad aproksymacji interpolacyjnej. Podobszary, nazywane elementami skoń-

czonymi, mają zwykle geometrycznie proste kształty, co ułatwia budowanie funkcji aproksymacyjnych. Ponieważ funkcje aproksymacyjne są wielomianami algebraicznymi, to możliwe jest zautomatyzowanie na maszynie cyfrowej (komputerze) obliczania współczynników macierzy równań algebraicznych. Jak dalej zobaczymy, proces budowy funkcji aproksymacyjnych jest niezależny od danych warunków brzegowych i innych danych definiujących rozwiązywany problem. Zgodnie z teorią interpolacji nieznane parametry, występujące w funkcjach aproksymacyjnych, przedstawiają wartości zmiennych, występujących w podstawowych warunkach brzegowych, w skończonej liczbie wcześniej ustalonych punktów elementu skończonego. Liczba tych punktów i ich rozmieszczenie w elemencie decyduje o stopniu i postaci funkcji aproksymacyjnych. Wszystko to powoduje, że metoda elementów skończonych w wyjątkowo dobry sposób nadaje się do obliczeń komputerowych dzięki łatwości jej zalgorytmizowania i w konsekwencji dzięki możliwości budowania programów komputerowych o bardzo ogólnym przeznaczeniu.

Podsumowując powyższe uwagi, rozwiązanie typowego problemu metodą elementów skończonych jest realizowane w następujących etapach:

1. **Podział obszaru na podobszary.** Wynikiem podziału jest zastąpienie obszaru zbiorem *elementów skończonych* (dyskretyzacja). Liczba, kształt i typ elementu zależą od obszaru i rozwiązywanego równania różniczkowego. Podstawowymi krokami w tym etapie są:
  - (a) Ustalenie liczby węzłów i elementów, tworzących tzw. *siatkę skończenie elementową*.
  - (b) Wygenerowanie współrzędnych węzłów siatki i utworzenie tablicy nazywanej *tablicą topologii* (lub incydencji), która zawiera relacje pomiędzy numerami elementów i numerami węzłów siatki (określenie miejsca elementu w siatce).

Jak to stwierdziliśmy, jedną z cech odróżniających MES od klasycznych metod wariacyjnych jest zastąpienie obszaru rozwiązania przez układ prostych podobszarów. W wyniku takiego postępowania możemy łatwo obliczać pochodne funkcji interpolacyjnych dla prostych obszarów geometrycznych, jak: linia, trójkąt, prostokąt, sześciąt itp. Drugą korzyścią jest to, że ponieważ funkcje aproksymacyjne są zdefiniowane w elemencie, to dokładność aproksymacji może być polepszona przez zwiększenie



liczby elementów (poprawianie siatki skończenie elementowej). Zastępowanie obszaru zbiorem elementów nazywamy *generowaniem siatki skończenie elementowej* lub *dyskretyzacją skończenie elementową* i zbiór ten oznaczmy przez  $\Omega_h$ .

Powyższy opis dyskretyzacji może być zapisany zwięźle w terminach matematycznych.

Obszar z brzegiem  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  jest podzielony na skończoną liczbę  $N$  podobszarów  $\bar{\Omega}^e$ , nazywanych *elementami skończonymi*, w sposób zapewniający spełnienie następujących warunków:

- (a) Każdy obszar  $\bar{\Omega}^e$  jest zwarty i niepusty.
- (b) Granica  $\Gamma^e$  każdego  $\Omega^e$  jest ciągła w sensie Lipschitza (funkcje aproksymujące są wystarczająco różniczkowalne w elemencie z brzegiem wypukłym).
- (c) Część wspólna obszarów dowolnych dwóch oddzielnych elementów jest pusta, tzn.

$$\Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset \quad e \neq f$$

- (d) Złożenie  $\bar{\Omega}_h$  wszystkich elementów  $\bar{\Omega}^e$  jest równe (przynajmniej w przybliżeniu) obszarowi całkowitemu  $\bar{\Omega}$ :

$$\bar{\Omega} \approx \bar{\Omega}_h = \sum_{e=1}^N \bar{\Omega}^e$$

## 2. Wyznaczenie równań MES dla elementów.

- (a) Sformułowanie równania wariacyjnego jedną z metod opisanych w rozdziale piątym.
- (b) Aproksymacja nieznanymi funkcjami w elementach. W metodzie elementów skończonych funkcje aproksymacyjne są wyznaczone oddzielnie dla każdego elementu. Jeśli na przykład funkcje takie chcemy zbudować dla skończenia elementowej aproksymacji Rayleigha-Ritza, to muszą one spełniać podstawowe warunki brzegowe problemu, co nie jest jednakże możliwe, ponieważ brzeg obszaru jest utworzony z więcej niż jednego elementu. Trudność tę pokonujemy przyjmując, że każdy oddzielny element jest możliwą reprezentacją

całego obszaru ze wszystkimi warunkami brzegowymi równania różniczkowego. Innymi słowy, przyjmujemy, że dane równanie różniczkowe jest sformułowane i aproksymowane w każdym elemencie za pomocą jednej z metod wariacyjnych. Następnie, po zagregowaniu elementów, za stopnie swobody w węzłach części brzegu, gdzie określone są podstawowe warunki brzegowe, podstawiane są zadane wartości brzegowe (tzw. *nałożenie warunków brzegowych*). W metodzie elementów skończonych funkcjami aproksymacyjnymi są wielomiany algebraiczne, co ułatwia dokładne numeryczne obliczanie współczynników macierzy i dowodzenie zbieżności aproksymacji skończonej elementowej. Minimalny stopień wielomianu przyjmowany do aproksymacji niewiadomych funkcji problemu zależy od rzędu rozwiązywanego równania różniczkowego i, z kolei, od stopnia wielomianu zależy liczba punktów interpolacji (*węzłów*) w elemencie. Liczba węzłów zależy również od geometrycznego kształtu elementu. W ogólności liczba funkcji aproksymacyjnych  $n$  i liczba węzłów  $m$  w elemencie nie jest taka sama ( $n \geq m$ ). Funkcje aproksymacyjne są *funkcjami interpolacyjnymi*, ponieważ są one wyznaczone z warunków interpolacji funkcji, i ewentualnie ich pochodnych, w węzłach elementu. Węzły są umieszczane na brzegu elementu tak, aby mogły w jednoznaczny sposób zdefiniować geometrię elementu. Dodatkowo, jeśli tego wymaga interpolacja, mogą być też umieszczone w innych punktach brzegu lub we wnętrzu elementu. Węzły brzegowe umożliwiają również łączenie ze sobą elementów na podstawie warunku, że *pierwotne stopnie swobody* (tzn. zmienne, które występują w podstawowych warunkach brzegowych) są takie same we wspólnych węzłach dowolnych dwóch elementów.

Oznaczmy dla każdego elementu  $\bar{\Omega}^e$  przez  $P_e$  przestrzeń skończonego wymiarową liniowo niezależnych *lokalnych* funkcji interpolacyjnych dla punktów węzłowych  $\{N_i^e\}_{i=1}^n$ . Te funkcje bazowe nazywamy w metodzie elementów skończonych *funkcjami kształtu*. W każdym elemencie  $\bar{\Omega}^e \subset \bar{\Omega}_h$  funkcję aproksymacyjną  $u_e$  możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$u_e \approx u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e \quad (6.1)$$

gdzie współczynniki  $u_j^e$  są wartościami funkcji  $u$  i ewentualnie jej po-

chodnych w wybranych węzłach  $\{\mathbf{x}_i^e\}_{i=1}^m$  elementu  $\bar{\Omega}^e$ . Współczynniki  $u_j^e$  nazywamy *elementowymi (lub lokalnymi) stopniami swobody*. W ogólności wymagamy, aby  $P_e$  zawierała przestrzeń wielomianów  $\mathcal{P}_k(\bar{\Omega}^e)$  dla  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}^e$  stopnia  $\leq k$ . Inaczej mówiąc, funkcje bazowe  $N_i^e$ ,  $1 \leq i \leq n$ , i *punkty węzłowe*  $\mathbf{x}_i^e$ ,  $1 \leq i \leq m$ , wybieramy w taki sposób, aby kombinacja liniowa (6.1) była wielomianem stopnia  $\leq k$  w  $\bar{\Omega}^e$ .

(c) Budowa równań MES dla elementów. Jest to układ równań algebraicznych z niewiadomymi węzłowymi.

3. **Złożenie (agregacja) elementów.** Budowa układu równań dla wszystkich elementów siatki przy wykorzystaniu warunku zgodności zmiennych węzłowych oznaczającego, że wartości tych zmiennych w węzle wspólnym dla dwóch lub więcej elementów są takie same. Etap ten można interpretować jako „wstawienie” z powrotem do siatki elementów, które były traktowane jako wyizolowane. W rezultacie otrzymujemy układ równań MES rozwiązania całego problemu.

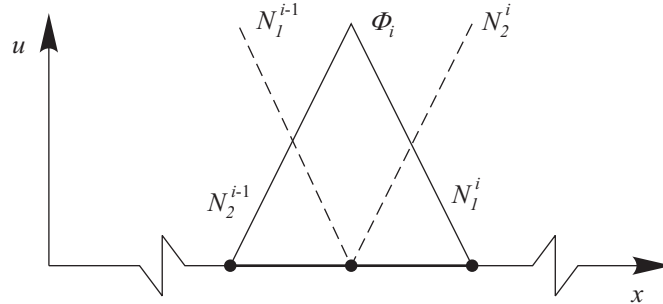
Wymaganie, aby w węzłach wspólnych dla sąsiednich elementów wartości węzłowych stopni swobody elementów były takie same pozwala zdefiniować ciągłe, liniowo niezależne, globalne funkcje interpolacyjne  $\{\Phi_J\}_{J=1}^N$  ze zlokalizowanym i zwartym nośnikiem (tzn. funkcje te są niezerowe tylko wewnątrz małego regionu obszaru  $\bar{\Omega}$ )

$$u \approx u_h = \sum_{J=1}^N U_J \Phi_J \quad (6.2)$$

gdzie  $U_J$  oznacza *globalny stopień swobody* w węzle globalnym  $J$  (o numery globalnym  $J$ ). Dla przykładu, jeśli obszar  $\Omega = [0, L]$  jest podzielony na dziesięć podprzedziałów o długości  $h = L/10$ , to funkcje  $\Phi_i$  są dane wzorami (rys. 6.1)

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq (i-2)\frac{L}{10} \\ \frac{10x}{L} - (i-2) & (i-2)\frac{L}{10} \leq x \leq (i-1)\frac{L}{10} \\ i - \frac{10x}{L} & (i-1)\frac{L}{10} \leq x \leq \frac{iL}{10} \\ 0 & \frac{iL}{10} \leq x \leq L \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\Phi_i(x)$  jest zdefiniowana przez dwie rozłączne lokalne funkcje kształtu  $N_2^{i-1}(x)$  oraz  $N_1^i(x)$ . Przestrzeń utworzona przez zbiór liniowo niezależnych funkcji zlokalizowanych  $\{\Phi_I\}_{I=1}^N$ , i oznaczona  $S^h(\Omega_h)$ , nazywa się *przestrzenią skończenie elementową*.



Rys.6.1. Funkcje kształtu i funkcja zlokalizowana w aproksymacji skończenie elementowej równania różniczkowego rzędu drugiego

4. **Uwzględnienie warunków brzegowych.** Wprowadzenie podstawowych i naturalnych warunków brzegowych do zagregowanego układu równań.
5. **Rozwiązanie równań.** Rozwiązanie układu równań algebraicznych ze względu na niewiadome węzłowe.
6. **Obliczenie dodatkowych wielkości.** Wykorzystując wyznaczone wielkości węzłowe, obliczenie wartości funkcji rozwiązania i ich pochodnych, w innych niż węzły punktach obszaru.

## 6.2. Zbieżność rozwiązania skończenie elementowego

Z dotychczas przeprowadzonych rozważań wynika, że w metodzie elementów skończonych poszukujemy rozwiązania przybliżonego w formie kombinacji liniowej funkcji, które definiują skończenie wymiarową podprzestrzeń  $S^h$  przestrzeni Hilberta  $H$ . Indeks  $h$  jest oznaczeniem pewnego parametru geometrycznego związanego z siatką skończenie elementową (zazwyczaj pewnego

wymiaru elementu). W modelu skończenie elementowym poszukujemy takiej funkcji  $u_h \in S^h$ , że

$$B(v_h, u_h) = l(v_h) \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (6.3)$$

Błąd aproksymacji  $\varepsilon = u - u_h$  jest ortogonalny do przestrzeni  $S^h$  w sensie spełnienia warunku

$$B(\varepsilon, v_h) = 0 \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (6.4)$$

i spełnia nierówność

$$\|\varepsilon\|_H \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \|u - v_h\|_H \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (6.5)$$

gdzie  $M$  i  $\alpha_h$  są pewnymi stałymi.

Nierówność (6.5) jest wykorzystywana przy dowodzeniu zbieżności metody elementów skończonych. Z dowodu tego wynika, że błąd aproksymacji skończenie elementowej jest ograniczony przez normę  $\|u - v_h\|_H$ . Wielkość tej normy zależy od tego jak przestrzeń  $S^h$  jest bliska przestrzeni  $H$ . Jeśli  $S^h$  jest przestrzenią wielomianów interpolacyjnych funkcji  $u$ , to wówczas wielkość  $\|u - v_h\|_H$  i przyrost zbieżności mogą być oszacowane w funkcji stopnia tych wielomianów.

Powiemy, że rodzina problemów dyskretnych (6.3) jest *zbieżna*, jeśli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_H = 0 \quad (6.6)$$

Z kolei powiemy, że rozwiązanie skończenie elementowe  $u_h$  jest *zbieżne w sensie normy energetycznej* (tzn. w przestrzeni  $H_A$ ) do rozwiązania dokładnego  $u$ , jeśli

$$\|u - u_h\|_A \leq ch^p \quad p > 0 \quad (6.7)$$

gdzie  $c$  jest stałą niezależną od  $u$  i  $u_h$ , a stała  $p$  określa rząd zbieżności.

Założmy, że skończenie elementowe funkcje interpolacyjne  $\Phi_J$ , gdzie  $J = 1, 2, \dots, N$ , są kompletnymi wielomianami stopnia  $k$ , tzn., że dowolny wielomian aż do stopnia  $k$  może być przedstawiony dokładnie przez te funkcje. Wówczas można wykazać, że błąd obliczeń w przestrzeni  $H_A = H^m(\Omega)$  spełnia nierówność

$$\|\varepsilon\|_m \equiv \|u - u_h\|_m \leq ch^p \quad p = k + 1 - m \quad (6.8)$$

Powyższe oszacowanie błędu implikuje, że błąd aproksymacji zmierza do zera z rzędem zbieżności  $k$ , gdy  $h$  się zmniejsza (lub zwiększa się liczba elementów). Innymi słowy, logarytm błędu w sensie normy energetycznej względem logarytmu  $h$  jest linią prostą o nachyleniu  $(k + 1 - m)$ . Im wyższy jest stopień funkcji interpolacyjnych, tym szybszy przyrost zbieżności. Zauważmy również, że błąd w sensie normy energetycznej zmierza do zera z przyrostem  $(k + 1 - m)$ , natomiast błąd w sensie normy  $L_2$  nawet szybciej, bowiem z przyrostem  $(k + 1)$  (innymi słowy, pochodne są wolniej zbieżne niż samo rozwiązanie).

Przedstawione powyżej oszacowanie błędu jest wykorzystywane w obliczeniach MES, nie odpowiada jednakże na proste pytanie użytkownika systemu MES, kiedy należałoby przerwać poprawianie siatki skończenie elementowej. Jest to decyzja, którą powinien podejmować autor obliczeń, ponieważ tylko on wie, jaka jest dopuszczalna tolerancja dla rozwiązywanego problemu. Poprawianie siatki skończenie elementowej stanowi trudne zadanie, ponieważ w większości rozwiązywanych problemów jest to konieczne tylko dla pewnych części obszaru rozwiązania. Obszary te są jednakże a priori nieznanne i konieczne jest *podejście adaptacyjne*. Końcowy cel adaptacji to *polepszenie dokładności rozwiązania i przyspieszenie procesu obliczeń*. Ten ostatni cel jest szczególnie istotny w zastosowaniach MES do analizy problemów nieliniowych (nie rozważanych w podręczniku).

Metody adaptacji istniejącej siatki skończenie elementowej można podzielić na pięć podstawowych grup, a mianowicie:

1. *Adaptacja typu h*. Jest to intuicyjnie najprostsza metoda, polegająca na zmniejszaniu wymiarów elementów w części obszaru lub w całym obszarze rozwiązania. W rezultacie topologia elementów i całkowita liczba stopni swobody mogą ulec zmianie, lecz nie zmienia się stopień wielomianu interpolacyjnego (funkcji kształtu).
2. *Adaptacja typu p*. W tej metodzie liczba elementów pozostaje niezmienną, lecz zmianie ulega stopień wielomianów interpolacyjnych (funkcji kształtu) w elementach.
3. *Adaptacja typu r*. W tej prostej metodzie siatkę skończenie elementową adaptujemy dokonując odpowiedniej relokacji węzłów. Topologia elementów i całkowita liczba stopni swobody pozostają niezmienione.
4. *Adaptacja typu s*. Jest to metoda, w której rozwiązanie otrzymuje się przez złożenie rozwiązań z oddzielnych podobszarów obszaru rozwiązania. W pierwszym kroku wykonuje się obliczenia, przyjmując rzadką

siatkę. Następnie, po rozeznaniu spodziewanego rozwiązania, nakłada się dodatkową siatkę elementów w tych podobszarach, gdzie jest to konieczne dla polepszenia obliczeń i wykonuje się obliczenia powtórnie.

5. *Metody mieszane.* Przykładem takiej adaptacji może być połączenie podejścia 1 i 2, czyli *adaptacja typu hp*.

W sformułowaniu konkretnej procedury metody elementów skończonych wykorzystamy metodę Bubnowa-Galerkina, przede wszystkim w jej słabym sformułowaniu. Pokażemy również wyprowadzenie równań MES metodą Rayleigha-Ritza (jak wiemy, w określonych warunkach równoważnej ze słabym sformułowaniem Bubnowa-Galerkina). Wprowadzimy terminologie:

- *model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym* – jeśli do zbudowania równań MES będziemy wykorzystywali równania słabego sformułowania metody Bubnowa-Galerkina (typu (5.51)),
- *model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina* – jeśli do zbudowania równań MES będziemy wykorzystywali równania metody Bubnowa-Galerkina (typu (5.49)),
- *model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza* – jeśli do zbudowania równań MES będziemy wykorzystywali metodę Rayleigha-Ritza, minimalizując odpowiednio zbudowany funkcjonal kwadratowy (typu (5.9)).

W obliczonych przykładach wykorzystamy standardowy algorytm budowy i rozwiązania problemu metodą elementów skończonych. Inne problemy, które mogą być rozwiązywane metodą elementów skończonych, i bardziej zaawansowane algorytmy rozwiązania są już przedmiotem literatury specjalistycznej.

## 6.3. Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu

### 6.3.1. Model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym

Metodę elementów skończonych zastosujemy do rozwiązania równania różniczkowego:

$$-\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (6.9)$$

gdzie współczynniki  $a = a(x)$  i  $f = f(x)$  są znanymi funkcjami. Celem naszym jest obliczenie aproksymacji rozwiązania dokładnego  $u(x)$ , spełniającego równanie (6.9) i odpowiednie warunki brzegowe. Powtórzmy, że równanie typu (6.9) jest jednowymiarowym modelem matematycznym wielu problemów fizycznych, np. problemów analizy pręta rozciąganego, ustalonego przepływu ciepła wzdłuż pręta, czy też przepływu cieczy w ośrodku porowatym. Dla zachowania pewnej ogólności dopuścimy, że  $a(x)$  może nie być funkcją ciągłą (np. skokowo zmienny przekrój poprzeczny) oraz że  $f(x)$  również nie musi być ciągłą (w szczególnym przypadku nawet równa zero w pewnej części przedziału  $0 \leq x \leq L$ ).

Rozważymy także dwa typy warunków brzegowych:

- *podstawowy*: dane  $u$
- *naturalny*: dane  $a \left( \frac{du}{dx} \right)$

Takie postawienie zadania oznacza poszukiwanie rozwiązania przybliżonego równania (6.9) dla każdego podprzedziału w  $(0, L)$ , w którym równanie ma ciągłe współczynniki. Liczba tych podprzedziałów określa minimalną liczbę elementów skończonych, które musimy przyjąć do rozwiązania.

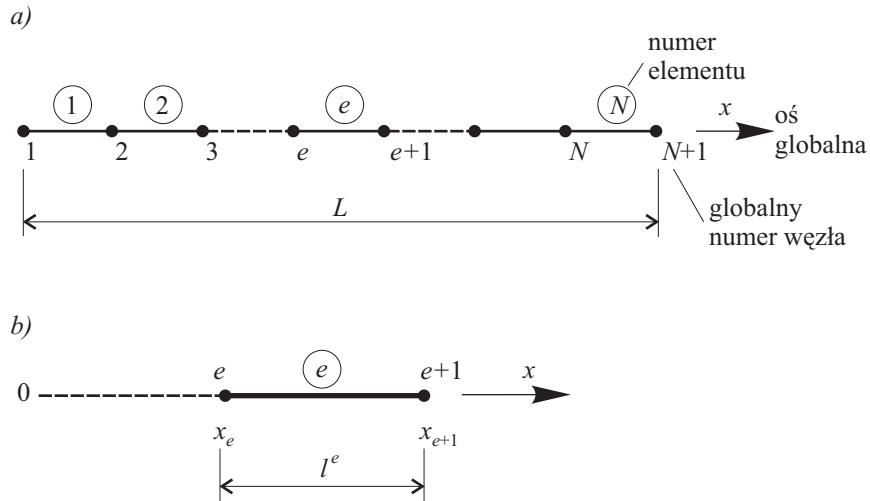
Etapy rozwiązania równania (6.9) metodą elementów skończonych są następujące.

**1. Dyskretyzacja obszaru.** Obszar  $\bar{\Omega} \equiv [0, L]$  dzielimy na zbiór liniowych elementów skończonych, rys. 6.2a.

Element  $\Omega^e$  jest zawarty pomiędzy węzłami  $e$  i  $e + 1$ , co oznacza, że  $\bar{\Omega}^e = [x_e, x_{e+1}]$ , rys. 6.2b. Długość elementu wynosi  $l^e = x^{e+1} - x^e$ .

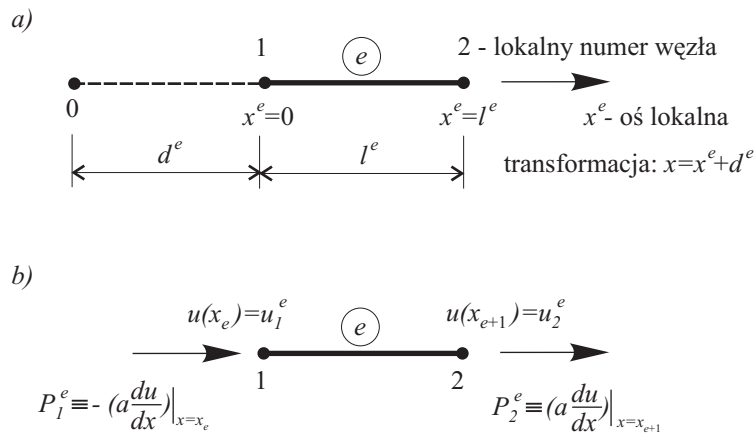
**2. Wyznaczenie równań MES dla elementów.** Równanie MES dla elementu skończonego wyznaczymy, rozważając wariacyjną aproksymację równania (6.9) w elemencie  $e$ . Otrzymane równanie algebraiczne MES będzie wyrażało zależność pomiędzy węzłowymi *niewiadomymi pierwotnymi* funkcji  $u$  i węzłowymi *niewiadomymi wtórnymi* funkcji  $P \equiv a \left( \frac{du}{dx} \right)$ . Niewiadomymi pierwotnymi są wartości funkcji występujących w podstawowych warunkach brzegowych, natomiast niewiadome wtórne wynikają z postaci naturalnych warunków brzegowych.





Rys.6.2. a) skończenie elementowa dyskretyzacja obszaru liniowego  $[0, L]$ , b) element liniowy

Dla ułatwienia algorytmizacji obliczeń wygodnie jest wprowadzić tzw. *lokalny układ współrzędnych elementu*  $x^e \in (0, l^e)$  oraz *lokalne numery węzłów* 1 i 2, rys. 6.3a.



Rys.6.3. a) lokalny układ współrzędnych elementu, b) niewiadome pierwotne i wtórne dla elementu

Równanie MES będące modelem numerycznym równania (6.9) w elemencie skończonym wyznaczmy w trzech krokach.

**a. Sformułowanie wariacyjne.** Równanie (6.9) jest określone w przedziale  $[0, L]$ , jest więc również słuszne w elemencie  $\bar{\Omega}^e$ . Wykorzystując procedurę metody Bubnowa-Galerkina opisaną w p. 5.5.1, słabe sformułowanie wariacyjne równania (6.9) w funkcji współrzędnej lokalnej  $x^e$  przyjmie postać

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{l^e} v^e(x^e) \left[ -\frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) - f^e(d^e + x^e) \right] dx^e = \\ &= \int_0^{l^e} \left( a^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - v^e(x^e) f^e(d^e + x^e) \right) dx^e + \left[ v^e(x^e) \left( -a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) \right] \Big|_0^{l^e} \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie funkcję  $u(x^e)$  w elemencie oznaczono przez  $u^e(x^e)$  oraz  $a^e = a^e(d^e + x^e)$ , gdzie  $d^e$  określa początek osi lokalnej  $x^e$  dla elementu  $e$ . W ostatnim składniku po prawej stronie równania (6.10) występują podstawowe i naturalne warunki brzegowe dla węzłów  $x_e = 0$  ( $x = d^e$ ) i  $x^e = l^e$  ( $x_{e+1} = d^e + l^e$ ).

Wprowadzimy oznaczenia

$$u^e(x^e = 0) \equiv u_1^e \qquad u^e(x^e = l^e) \equiv u_2^e \quad (6.11a)$$

$$\left( -a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) \Big|_{x^e=0} \equiv P_1^e \qquad \left( -a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) \Big|_{x^e=l^e} \equiv -P_2^e \quad (6.11b)$$

Wykorzystując oznaczenia (6.11b) równanie (6.10) przyjmie formę

$$0 = \int_0^{l^e} \left[ a^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - v^e(x^e) f^e(d^e + x^e) \right] dx^e - P_1^e v^e(0) - P_2^e v^e(l^e) \quad (6.12)$$

lub

$$0 = B^e(v^e, u^e) - l^e(v^e)$$

gdzie formy: dwuliniowa i liniowa są wyrażone wzorami

$$\begin{aligned} B^e(v^e, u^e) &= \int_0^{l^e} a^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} dx^e \\ l^e(v^e) &= \int_0^{l^e} v^e f^e dx^e + v^e(0)P_1^e + v^e(l^e)P_2^e \end{aligned} \quad (6.13)$$

**b. Aproksymacja MES.** Chcemy teraz znaleźć rozwiązanie aproksymacyjne problemu (6.12) z warunkami brzegowymi (6.11a). Przyjmiemy, że aproksymacje  $u^e(x^e)$  i  $v^e(x^e)$  są wyrażone wzorami

$$\begin{aligned} u^e(x^e) &= \sum_{j=1}^2 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{u}^e \\ v^e(x^e) &= \sum_{i=1}^2 v_i^e N_i^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{v}^e \end{aligned} \quad (6.14)$$

gdzie:

$\mathbf{u}^e = [u_1^e \ u_2^e]^T$  – wektor kolumnowy stopni swobody elementu (nieznanymi pierwotnymi),

$\mathbf{v}^e = [v_1^e \ v_2^e]^T$  – wektor kolumnowy współczynników aproksymacji funkcji testowej  $v^e(x^e)$ ,

$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e) \ N_2^e(x^e)]$  – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Podstawiając do równania (6.12) wzory (6.14), otrzymamy równanie w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{l^e} a^e v_i^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \frac{dN_j^e}{dx^e} u_j^e dx^e - \sum_{i=1}^2 \int_0^{l^e} v_i^e N_i^e(x^e) f^e(dx^e + x^e) dx^e + \\ - \sum_{i=1}^2 v_i^e P_1^e N_i^e(0) - \sum_{i=1}^2 v_i^e P_2^e N_i^e(l^e) = 0 \end{aligned}$$

lub, po uporządkowaniu

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 v_i^e \sum_{j=1}^2 \left( \int_0^{l^e} a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \frac{dN_j^e}{dx^e} dx^e \right) u_j^e + \\ & - \sum_{i=1}^2 v_i^e \left( \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e + P_1^e N_i^e(0) + P_2^e N_i^e(l^e) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

gdzie dużymi nawiasami zaznaczono współrzędne macierzy i wektora

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_0^{l^e} a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \frac{dN_j^e}{dx^e} dx^e \quad i, j = 1, 2 \\ F_i^e &= \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e + P_1^e N_i^e(0) + P_2^e N_i^e(l^e) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia, równanie (6.15) przyjmie formę

$$\sum_{i=1}^2 v_i^e \left( \sum_{j=1}^2 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e \right) = 0$$

Skorzystanie z warunków  $v_i^e \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , prowadzi do układu dwóch równań metody elementów skończonych

$$\sum_{j=1}^2 K_{ij}^e u_j^e - F_i^e = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6.17a)$$

który w zapisie macierzowym ma postać

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (6.17b)$$

Elementy macierzy  $\mathbf{K}^e$  i wektora  $\mathbf{F}^e$  są obliczane według wzorów (6.16), a ich zapis macierzowy ma formę

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} (\mathbf{B}^e)^T a^e (d^e + x^e) \mathbf{B}^e dx^e \\ \mathbf{F}^e &= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T f^e (d^e + x^e) dx^e + \mathbf{P}^e \end{aligned} \quad (6.18)$$

gdzie:

$B^e$  – macierz jednowierszowa zróżniczkowanych funkcji kształtu,

$P^e = [P_1^e \ P_2^e]^T$  – wektor o współrzędnych wynikających z naturalnych warunków brzegowych (6.11b).

Zauważmy, że we wzorze na wektor  $F^e$  wykorzystano własności interpolacji funkcji kształtu  $N_i^e(x^e)$ ,  $i = 1, 2$ .

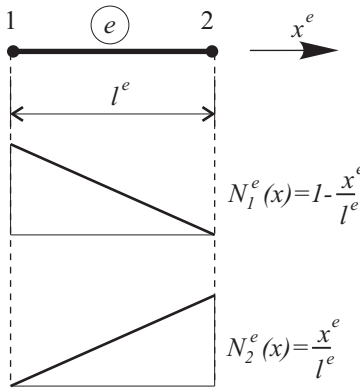
**c. Obliczenie funkcji kształtu.** Funkcje kształtu  $N_i^e \in P_e$  muszą być tak dobrane, aby: (a) funkcja  $u^e(x^e)$  była co najmniej klasy  $C^1$  i spełniała podstawowe warunki brzegowe (6.11a); (b)  $\{N_i^e(x^e)\}$ ,  $i = 1, 2$ , były liniowo niezależne; (c)  $\{N_i^e(x^e)\}$ ,  $i = 1, 2$ , były funkcjami kompletnymi. Warunki te są spełnione przez aproksymację liniową o postaci

$$u^e(x^e) = \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) u_1^e + \frac{x^e}{l^e} u_2^e = \sum_{j=1}^2 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{u}^e \quad (6.19a)$$

gdzie funkcje kształtu

$$N_1^e(x^e) = 1 - \frac{x^e}{l^e} \quad N_2^e(x^e) = \frac{x^e}{l^e} \quad 0 \leq x^e \leq l^e \quad (6.19b)$$

są znanymi już nam *funkcjami bazowymi Lagrange'a* (4.27). Na rys. 6.4 (będącym w zasadzie powtórzeniem rys. 4.6) pokazano wykresy funkcji (6.19b).



Rys.6.4. Liniowe funkcje kształtu Lagrange'a

Podstawiając funkcje kształtu (6.19b) do wzorów (6.16) na  $K_{ij}^e$  i na  $F_i^e$  oraz wykonując stosowne całkowanie, otrzymamy macierz  $\mathbf{K}^e$  i wektor  $\mathbf{F}^e$  dla elementu w postaci

$$\mathbf{K}^e = \frac{a^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^e = \frac{f^e l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{f}^e + \mathbf{P}^e \quad (6.20)$$

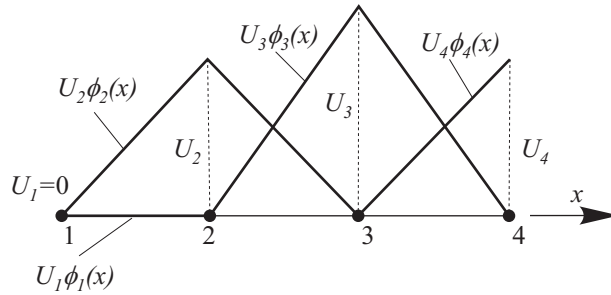
gdzie dodatkowo przyjęto, że  $a^e$  i  $f^e$  są stałymi w elemencie skończonym.

Przyjęta aproksymacja liniowa spełnia minimalne wymagania dotyczące ciągłości. Możliwe jest też przyjęcie aproksymacji wyższego rzędu, czego konsekwencją byłoby powiększenie liczby węzłów w elemencie skończonym. Oznacza to, że istnieje zależność pomiędzy rzędem aproksymowanej funkcji  $u^e$  a liczbą węzłów w elemencie.

**3. Agregacja (składanie) równań dla elementów.** Celem uproszczenia dalszych rozważań założmy, że obszar rozwiązania  $[0, L]$  został zdyskretyzowany trzema elementami skończonymi o nierównej długości. Na podstawie warunków ciągłości funkcji  $u$  możemy napisać, że

$$u_1^1 = U_1 \quad u_2^1 = u_1^2 = U_2 \quad u_2^2 = u_1^3 = U_3 \quad u_3^2 = U_4 \quad (6.21)$$

gdzie wprowadziliśmy *globalne stopnie swobody*, które zawarte są w wektorze  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$ , rys. 6.5. Relacje (6.21) nazywamy *warunkami ciągłości międzyelementowej*. Rozwiązanie globalne  $u_h(x)$  wygodniej jest teraz zapisać



Rys.6.5. Globalne stopnie swobody i funkcje zlokalizowane

w funkcji  $x$ , co prowadzi do wzoru

$$u_h(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^2 u_j^1 N_j^1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \sum_{j=1}^2 u_j^2 N_j^2(x) & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \sum_{j=1}^2 u_j^3 N_j^3(x) & x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases} \quad (6.22)$$

Uwzględniając warunki (6.21) oraz że  $u_h(x) \in S^h(\Omega_h) \subset H^1(\Omega)$  wyrazimy funkcję  $u_h(x)$  przez kombinację liniową funkcji zlokalizowanych  $\{\Phi_I\}_{I=1}^N$

$$u_h(x) = \sum_{I=1}^N U_I \Phi_I(x) \quad (6.23)$$

gdzie

$$\Phi_I(x) = \begin{cases} N_2^{(I-1)}(x) & x_{I-1} < x < x_I \\ N_1^{(I)}(x) & x_I < x < x_{I+1} \end{cases} \quad (6.24)$$

Równania dla elementów złożymy w jeden system na podstawie warunku, że globalne sformułowanie wariacyjne jest sumą sformułowań wariacyjnych dla elementów:

$$B(u_h, v_h) - l(v_h) = \sum_{e=1}^E [B^e(u^e, v^e) - l^e(v^e)] = 0 \quad (6.25)$$

gdzie  $E$  jest całkowitą liczbą elementów w siatce. Podstawiając (6.15) do (6.25) i wykorzystując (6.21) dla  $u_j^e$  i  $v_i^e$  (zastępując  $U_i$  przez  $V_i$  dla  $v_i^e$ ) otrzymamy, w sposób analogiczny jak to miało miejsce przy formułowaniu równań MES dla pojedynczego elementu skończonego, równanie

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e=1}^3 \left[ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_i^e K_{ij}^e u_j^e - \sum_{i=1}^2 v_i^e F_i^e \right] = \\ &= v_1^1 (K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 - F_1^1) + v_2^1 (K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 - F_2^1) + \\ &+ v_1^2 (K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 - F_1^2) + v_2^2 (K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 - F_2^2) + \\ &+ v_1^3 (K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 - F_1^3) + v_2^3 (K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 - F_2^3) = \\ &= V_1 [K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 - F_1^1] + \\ &+ V_2 [K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + K_{12}^2 U_3 - (F_2^1 + F_1^2)] + \\ &+ V_3 [K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 - (F_2^2 + F_1^3)] + \\ &+ V_4 [K_{21}^3 U_3 + K_{22}^3 U_4 - F_2^3] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Równanie (6.25) jest słuszne dla dowolnej funkcji  $v_h = \sum_{I=1}^N V_I \Phi_I$ , a to oznacza, że (6.26) jest ważne dla dowolnych  $V_I, I = 1, 2, 3, 4$ . W rezultacie muszą być równe zero wszystkie współczynniki przy  $V_I$ , co prowadzi do układu czterech równań algebraicznych, które w zapisie macierzowym mają postać

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

lub

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6.28)$$

Macierz  $\mathbf{K}$  nazywamy macierzą globalną, a wektor  $\mathbf{F}$  wektorem globalnym. Macierz  $\mathbf{K}$  jest symetryczna i pasmowa.

Opisane postępowanie prowadzące do macierzy  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{F}$  można sformalizować wykorzystując *metodę agregacji symbolicznej*. W tym celu należy dla każdego elementu skończonego zdefiniować macierz zero-jedynkową  $\mathbf{Z}^e$  (o wymiarze: liczba stopni swobody elementu  $\times$  liczba stopni swobody systemu) taką, że ma miejsce tożsamość

$$\mathbf{u}^e \equiv \mathbf{Z}^e \mathbf{U} \quad (6.29)$$

co prowadzi do wzorów

$$\overline{\mathbf{K}}^e = (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Z}^e \quad \overline{\mathbf{F}}^e = (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (6.30)$$

Macierz  $\overline{\mathbf{K}}^e$  i wektor  $\overline{\mathbf{F}}^e$  mają obecnie wymiary odpowiadające liczbie stopni swobody systemu, co umożliwia proste dodawanie

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Z}^e \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^E (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (6.31)$$

Wzory (6.31) mogą być traktowane jako symboliczne definicje procedury agregacji macierzy elementów  $\mathbf{K}^e$  i  $\mathbf{F}^e$  do macierzy globalnych systemu  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}$ . Metoda agregacji symbolicznej jest wysoce nieefektywna (macierze prostokątne  $\mathbf{Z}^e$  zawierają prawie same zera z niewielką liczbą jedynek) i zakres jej wykorzystania jest ograniczony do systemu z małą liczbą stopni swobody.

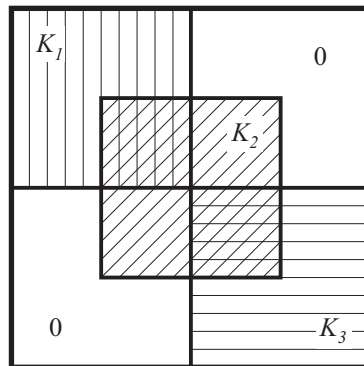


Znacznie lepszym sposobem, stosowanym w programowaniu metody elementów skończonych, jest skorzystanie z *metody agregacji bezpośredniej*. Metoda ta polega na wykorzystaniu tablicy topologii (incydencji) elementów skończonych. Istnienie tablicy topologii, wiążącej ze sobą numery węzłów z numerami elementów skończonych, jest cechą charakterystyczną metody elementów skończonych. W tym przykładzie ma ona postać pokazaną w tab. 6.1.

Numer elementu skończonego	(1) Numer węzła początkowego	(2) Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Tabela 6.1. Tablica topologii

Założmy, że węzeł początkowy ma numer niższy od numeru węzła końcowego i że w węźle początkowym jest zlokalizowany początek lokalnego układu współrzędnych elementu (nie jest to konieczne, lecz znacznie ułatwia np. późniejsze programowanie MES). W układzie współrzędnych lokalnych węzeł początkowy elementu ma zawsze numer 1, a węzeł końcowy numer 2, co zaznaczono w tab. 6.1 liczbami (1) i (2). Wówczas proces agregacji można przedstawić graficznie w sposób pokazany na rys. 6.6 oraz zapisać wzorem



Rys.6.6. Proces agregacji macierzy sztywności

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \sum_{e=1}^3 \mathbf{A} \mathbf{K}^e = \\
&= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest operatorem agregacji. Podobnie, na podstawie tablicy topologii, przebiega agregacja wektora  $\mathbf{F}$ .

**4. Uwzględnienie warunków brzegowych.** Macierz globalna  $\mathbf{K}$  jest osobliwa i rozwiązanie równania (6.28) wymaga uwzględnienia podstawowych warunków brzegowych w wektorze pierwotnych stopni swobody  $\mathbf{U}$ . Również i prawa strona (6.28) nie jest całkowicie znana przed nałożeniem warunków „równowagi” dla niewiadomych wtórnych (wtórnych stopni swobody). Zauważmy bowiem, że  $F_i^e$  jest sumą udziałów od funkcji  $f(x)$  równania różniczkowego (6.9) i od niewiadomej wtórnej  $P_i^e$ . Niewiadome  $P_i^e$  są nieznanne (w mechanice będą to siły reakcji), jednak ich suma w węźle jest znana, jeśli w tym węźle nie jest znana niewiadoma pierwotna i na odwrót.

Warunek „równowagi” oznacza, że suma  $P_2^e$  i  $P_1^{e+1}$  w węźle o numerze globalnym  $(e + 1)$  jest równa zero (w mechanice oznaczać to będzie brak siły skupionej w węźle)

$$\left( a^e \frac{du}{dx} \right)^+ \Big|_{x=x_{e+1}} - \left( a^e \frac{du}{dx} \right)^- \Big|_{x=x_{e+1}} \equiv P_2^e + P_1^{e+1} = 0 \tag{6.33}$$

**5. Rozwiązanie układu równań.** Układ równań (6.28) często wygodnie jest przedstawić w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

gdzie:

$\mathbf{U}_1$  – wektor kolumnowy nieznanych pierwotnych stopni swobody

$\mathbf{U}_2$  – wektor kolumnowy znanych pierwotnych stopni swobody

$F_1$  – wektor kolumnowy znanych wtórnych stopni swobody

$F_2$  – wektor kolumnowy nieznanymi wtórnych stopni swobody.

Rozwiązaniem równania pierwszego z (6.34) jest

$$U_1 = (K_{11})^{-1}(F_1 - K_{12}U_2) \quad (6.35)$$

Znając  $U_1$  z równania drugiego (6.34) obliczymy  $F_2$ .

**6. Rozwiązanie przybliżone.** Rozwiązanie (6.35) wyznacza wartości nieznanej funkcji w węzłach. Często jednakże interesują nas również wartości funkcji i jej pochodnej w innych punktach obszaru zdyskretyzowanego elementami skończonymi. Wartości  $u_h$  dla dowolnego  $x$  obliczymy z wzoru (6.22). Na przykład, przyjmując  $d^1 = 0$  dla  $x = \alpha l^1$ ,  $0 < \alpha < 1$ , mamy

$$u(\alpha l^1) = \frac{l^1 - \alpha l^1}{l^1} u_1^1 + \frac{\alpha l^1 - 0}{l^1} u_2^1 = (1 - \alpha)u_1^1 + \alpha u_2^1 \quad (6.36)$$

Podobnie, dla  $x = l^1 + \alpha l^2$  z drugiego wzoru (6.22), obliczymy

$$u(l^1 + \alpha l^2) = (1 - \alpha)u_1^2 + \alpha u_2^2$$

Pochodną funkcji  $u_h$  obliczymy różniczkując wzory (6.22)

$$\frac{du_h}{dx} = \sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{dN_j^e}{dx} = \frac{u_2^e - u_1^e}{l^e} \quad \text{dla} \quad x_e < x < x_{e+1} \quad (6.37)$$

Z powyższego wzoru wynika, że pochodna funkcji jest stała w każdym elemencie. Brak ciągłości pochodnej  $\frac{du_h}{dx}$  w węzłach wynika z przyjętej interpolacji Lagrange'a, niezależnie od stopnia wielomianu interpolacyjnego. W literaturze takie rozwiązanie jest nazywane rozwiązaniem ze słabą nieciągłością (w mechanice oznaczać to będzie, że rozwiązanie dla przemieszczeń jest ciągłe, natomiast wystąpi skok w polu odkształceń).

**Przykład 6.1.** Rozważmy problem z przykładu 5.2. Równanie (5.16) jest specjalnym przypadkiem (6.9) dla  $L = 1, a = 1$  i  $f = \cos \pi x, 0 \leq x \leq 1$ . Macierz  $\mathbf{K}^e$  dana jest wzorem (6.20) z  $a^e = 1$  dla wszystkich elementów  $e$ . Wektor kolumnowy  $\mathbf{F}^e$  obliczymy ze wzoru

$$F_i^e = \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) N_i^e(x^e) dx^e + P_i^e = f_i^e + P_i^e$$

skąd mamy

$$\begin{aligned} f_1^e &= \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) dx^e = \\ &= \frac{\sin \pi(d^e + l^e)}{\pi} - \frac{\sin \pi d^e}{\pi} - \cos \pi d^e \left(\frac{\cos \pi l^e}{\pi^2 l^e} + \frac{\sin \pi l^e}{\pi} - \frac{1}{\pi^2 l^e}\right) + \\ &+ \sin \pi d^e \left(\frac{\sin \pi l^e}{\pi^2 l^e} - \frac{\cos \pi l^e}{\pi}\right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} f_2^e &= \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) \frac{x^e}{l^e} dx^e = \\ &= \cos \pi d^e \left(\frac{\cos \pi l^e}{\pi^2 l^e} + \frac{\sin \pi l^e}{\pi} - \frac{1}{\pi^2 l^e}\right) - \sin \pi d^e \left(\frac{\sin \pi l^e}{\pi^2 l^e} - \frac{\cos \pi l^e}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Przyjmując dyskretyzację czterema równymi elementami skończonymi,  $l^e = 0,25$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{element 1: } & d^1 = 0, \quad f_1^1 = 0,1187, \quad f_2^1 = 0,1064 \\ \text{element 2: } & d^2 = 0,25, \quad f_1^2 = 0,0615, \quad f_2^2 = 0,0317 \\ \text{element 3: } & d^3 = 0,5, \quad f_1^3 = -0,0317, \quad f_2^3 = -0,0615 \\ \text{element 4: } & d^4 = 0,75, \quad f_1^4 = -0,1064, \quad f_2^4 = -0,1187 \end{aligned}$$

Układ równań (6.27) ma postać

$$\frac{1}{0,25} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 + P_1^3 \\ P_2^3 + P_1^4 \\ P_2^4 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Powyższy układ równań rozwiążemy dla trzech typów warunków brzegowych.

1. *Warunki brzegowe Dirichleta:*  $u(0) = u(1) = 0$ . Te warunki brzegowe oznaczają, że  $U_1 = U_5 = 0$ . Dodatkowo spełnione są warunki „równowagi”

$$P_2^1 + P_1^2 = 0 \quad P_2^2 + P_1^3 = 0 \quad P_2^3 + P_1^4 = 0 \quad (6.40)$$

Wykorzystując powyższe warunki w równaniu (6.39), obliczenie niewiadomych pierwotnych sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań

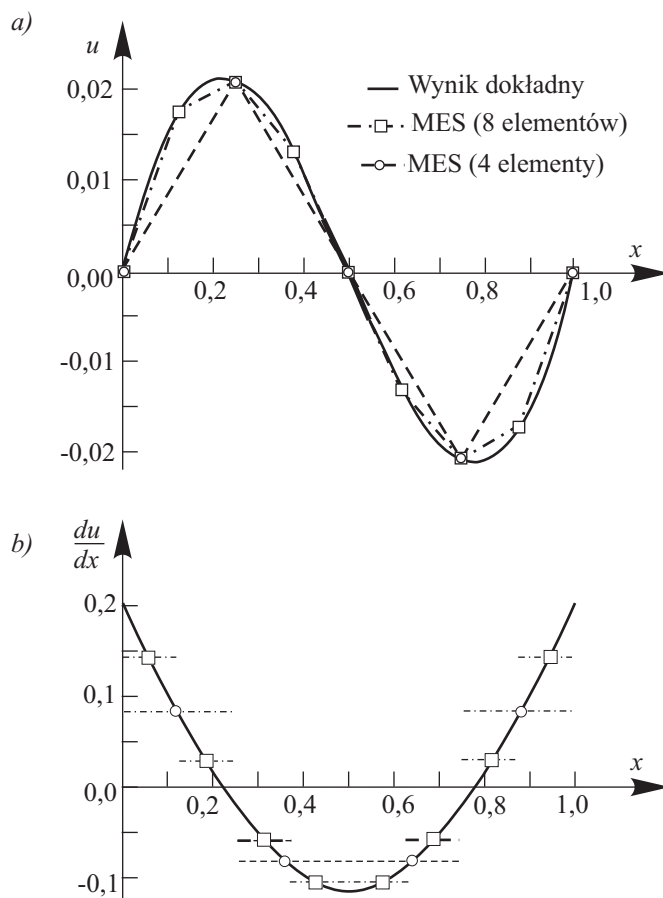
$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1679 \\ 0 \\ -0,1679 \end{bmatrix}$$

Wynikiem jest  $U_2 = -U_4 = 0,02098$ ,  $U_3 \cong 0,0$ , co odpowiada rozwiązaniu dokładnemu dla  $x = 0,25, 0,5$  i  $0,75$ . Niewiadome wtórne obliczymy z pierwszego i piątego równania (6.39):  $P_1^1 = -4U_2 - 0,1187 = -0,20262$ ,  $P_2^4 = -4U_4 + 0,1187 = 0,20262$ .

Na rys. 6.7a porównano rozwiązanie otrzymane dla czterech i ośmiu elementów skończonych z rozwiązaniem dokładnym. Na rys. 6.7b porównano natomiast pierwsze pochodne otrzymanych rozwiązań.

Z analizy tych rysunków wynika, że chociaż wartości  $u(x)$  w węzłach obliczonych za pomocą MES są dokładne, to jednak w innych punktach obszaru błąd jest znaczny. Pochodna  $\frac{du}{dx}$  jest stała w elementach skończonych i w środku elementów jej wartość jest dokładna. Założone warunki równowagi na granicach między elementami (6.40) nie są oczywiście spełnione, ponieważ rozwiązanie skończenie elementowe jest odcinkowo liniowe.

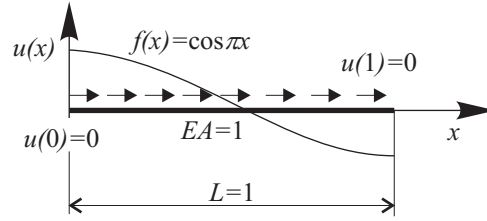
Otrzymane rozwiązanie można jeszcze inaczej interpretować, jeśli równaniu (6.9) nadamy sens fizyczny. Jeśli  $a(x) = EA(x)$  jest sztywnością pręta na rozciąganie, gdzie  $E$  jest modułem Younga,  $A(x)$  jest funkcją przekroju poprzecznego pręta, a  $f(x)$  jest intensywnością obciążenia równoległego do osi pręta to  $u(x)$  jest przemieszczeniem osi pręta i równanie (6.9), wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, jest modelem matematycznym problemu analizy pręta rozciąganego (lub ściskanego, lecz bez możliwości wybożenia).



Rys.6.7. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (6.9) z warunkami brzegowymi Dirichleta  $u(0) = u(1) = 0$

W tym przykładzie mamy, że  $EA = 1$ ,  $f = \cos \pi x$  i długość pręta wynosi  $L = 1$ . Na rys. 6.8 pokazano rozważany pręt wraz z obciążeniem i warunkami brzegowymi.

Obliczmy teraz funkcje przemieszczeń  $u(x)$  w każdym z elementów skończonych i pochodne  $du(x)/dx$  (patrz też rys. 6.7). Zauważmy, że ponieważ  $EA = 1$ , to pochodne te wyrażają siły podłużne w elementach skończonych:  $S(x) = EA \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$ .

Rys.6.8. Pręt rozciągany z warunkami brzegowymi Dirichleta  $u(0) = u(1) = 0$ 

Element 1

$$u^1(x^1) = (1 - 4x^1) \cdot 0 + 4x^1 \cdot 0,02098 = 0,08392x^1, \quad x^1 \in [0, 0,25]$$

$$S_1 = \frac{du^1}{dx^1} = 0,08392$$

Element 2

$$u^2(x^2) = (1 - 4x^2) \cdot 0,02098 + 4x^2 \cdot 0 = 0,02098 - 0,08392x^2, \quad x^2 \in [0,025, 0,5]$$

$$S_2 = \frac{du^2}{dx^2} = -0,08392$$

Element 3

$$u^3(x^3) = (1 - 4x^3) \cdot 0 - 4x^3 \cdot 0,02098 = -0,08392x^3, \quad x^3 \in [0,5, 0,75]$$

$$S_3 = \frac{du^3}{dx^3} = -0,08392$$

Element 4

$$u^4(x^4) = -(1 - 4x^4) \cdot 0,02098 + 4x^4 \cdot 0 = -0,02098 + 0,08392x^4, \quad x^4 \in [0,75, 1]$$

$$S_4 = \frac{du^4}{dx^4} = 0,08392$$

Jak to wyżej stwierdziliśmy, nie są spełnione warunki równowagi na granicach między elementami, co oznacza skok w tych miejscach siły podłużnej. Pytanie, które obecnie postawimy to, czy możliwe jest obliczenie siły podłużnej w inny sposób niż drogą różniczkowania przybliżonych funkcji przemieszczenia osi pręta, co, jak stwierdziliśmy, znacznie obniża jakość rozwiązania. Odpowiedź jest twierdząca, ponieważ możemy skorzystać z równań MES dla elementu skończonego (6.17b), które są w tym przypadku równaniami równowagi.

Wykonajmy stosowne obliczenia dla każdego z elementów skończonych.

Element 1

Równania równowagi MES

$$P_1^1 = K_{11}^1 \cdot U_1 + K_{12}^1 \cdot U_2 - f_1^1 = 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0,02098 - 0,1187 = -0,20262$$

$$P_2^1 = K_{21}^1 \cdot U_1 + K_{22}^1 \cdot U_2 - f_2^1 = -4 \cdot 0 + 4 \cdot 0,02098 - 0,1064 = -0,2248$$

Wykorzystując wzory (6.11b) możemy napisać, że

$$S_1^1 = -P_1^1 = 0,20262 \quad S_2^1 = P_2^1 = -0,2248$$

Wynik dokładny otrzymamy różniczkując wzór (5.18)

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2}$$

skąd mamy

$$\frac{du}{dx}(0) = 0,20264 \quad \frac{du}{dx}(0,25) = -0,02244$$

Element 2

Równania równowagi MES

$$P_1^2 = K_{11}^2 \cdot U_2 + K_{12}^2 \cdot U_3 - f_1^2 = 4 \cdot 0,02098 - 4 \cdot 0 - 0,0615 = 0,02242$$

$$P_2^2 = K_{21}^2 \cdot U_2 + K_{22}^2 \cdot U_3 - f_2^2 = -4 \cdot 0,02098 + 4 \cdot 0 - 0,0317 = -0,11562$$

$$S_1^2 = -P_1^2 = -0,02242 \quad S_2^2 = P_2^2 = -0,11562$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0,25) = -0,02244 \quad \frac{du}{dx}(0,5) = -0,11567$$

Element 3

Równania równowagi MES

$$P_1^3 = K_{11}^3 \cdot U_3 + K_{12}^3 \cdot U_4 - f_1^3 = 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0,02098 + 0,0317 = 0,11562$$

$$P_2^3 = K_{21}^3 \cdot U_3 + K_{22}^3 \cdot U_4 - f_2^3 = -4 \cdot 0 - 4 \cdot 0,02098 + 0,0615 = -0,02242$$



$$S_1^3 = -P_1^3 = -0,11562 \quad S_2^3 = P_2^3 = -0,02242$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0,5) = -0,11567 \quad \frac{du}{dx}(0,75) = -0,02244$$

Element 4

Równania równowagi MES

$$P_1^4 = K_{11}^4 \cdot U_4 + K_{12}^4 \cdot U_5 - f_1^4 = -4 \cdot 0,02098 - 4 \cdot 0 + 0,1064 = 0,02248$$

$$P_2^4 = K_{21}^4 \cdot U_4 + K_{22}^4 \cdot U_5 - f_2^4 = 4 \cdot 0,020298 + 4 \cdot 0 + 0,1187 = 0,20262$$

$$S_1^4 = -P_1^4 = -0,02248 \quad S_2^4 = P_2^4 = 0,20262$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0,75) = -0,02244 \quad \frac{du}{dx}(1,00) = 0,20262$$

Wnioski z przeprowadzonych obliczeń są bardzo znaczące bowiem, z nich wynika, że wykonując obliczenia dla poszczególnych elementów skończonych otrzymujemy poprawne wielkości sił podłużnych w węzłach i spełnione są w tych węzłach warunki równowagi. Jest to sposób obliczeń, który ma swoje uzasadnienie w mechanice konstrukcji prętowych.

2. *Mieszane warunki brzegowe:*  $u(0) = u'(1) = 0$ . Warunki te implikują, że  $U_1 = 0$  i  $P_2^4 = 0$ . Obowiązują też dalej warunki równowagi (6.40).

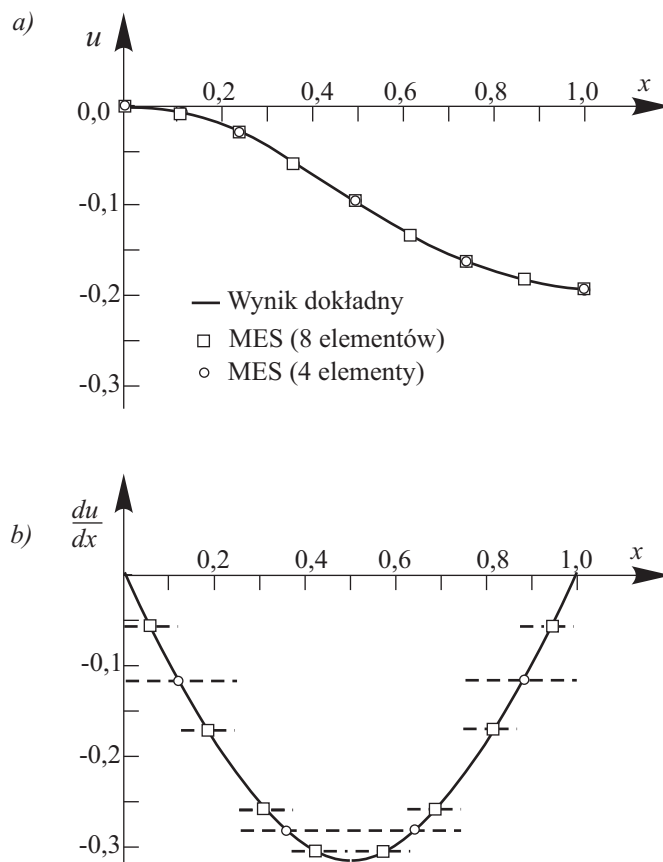
Niewiadome pierwotne obliczymy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1679 \\ 0 \\ -0,1679 \\ -0,1187 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie wynosi  $U_2 = -0,02968$ ,  $U_3 = -0,10132$ ,  $U_4 = -0,17297$ ,  $U_5 = -0,20264$ , co jest rozwiązaniem dokładnym w węzłach. Niewiadomą wtórną obliczymy z pierwszego równania (6.39)

$$P_1^1 = -4U_2 - 0,1187 \cong 0$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6.9. Z rys. 6.9a wynika, że dla tego przypadku warunków brzegowych już dyskretyzacja czterema elementami skończonymi daje rozwiązanie prawie dokładne we wszystkich punktach.



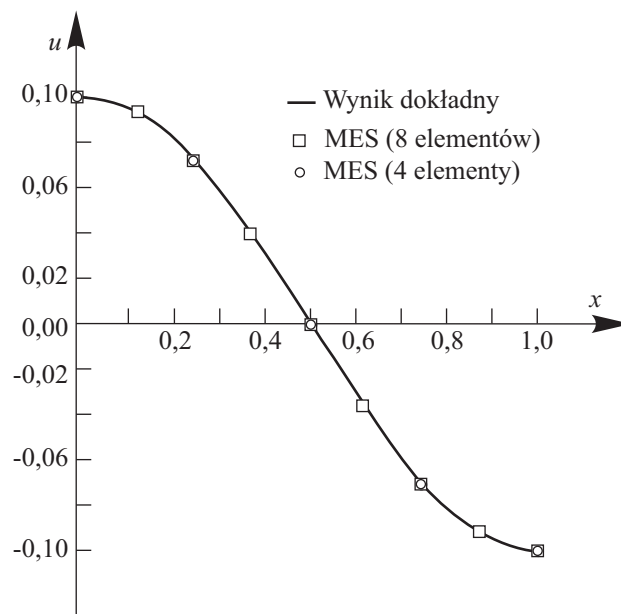
Rys.6.9. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (6.9) z mieszanymi warunkami brzegowymi  $u(0) = u'(1) = 0$

3. *Warunki brzegowe Neumanna:*  $u'(0) = u'(1) = 0$ . Te warunki brzegowe oznaczają, że  $P_1^1 = P_2^4 = 0$ . Dodatkowo, dalej obowiązują warunki równowagi (6.40). W efekcie mamy, że wektor  $\mathbf{P}$  jest wektorem zerowym,  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ . W tym przypadku równanie (6.39) nie może być rozwiązane, ponieważ macierz  $\mathbf{K}$  jest osobliwa. Rozwiązanie otrzymamy przyjmując

jąc dowolną stałą za jedną z niewiadomych pierwotnych, np.  $U_3 = 0$ . Wprowadzenie tego warunku do (6.39) prowadzi do rozwiązania układu równań w formie:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1187 \\ 0,1679 \\ -0,1679 \\ -0,1187 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie wynosi:  $U_1 = -U_5 = 0,10132$ ,  $U_2 = -U_4 = 0,071645$ , co znowu jest rozwiązaniem dokładnym w węzłach. Wyniki obliczeń pokazano na rys. 6.10. Wykres pochodnej  $\frac{du}{dx}$  jest taki sam jak na rys. 6.9b.



Rys.6.10. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (6.9) z warunkami brzegowymi Neumanna  $u'(0) = u'(1) = 0$

W standardowej procedurze MES polepszenie wyników obliczeń możemy uzyskać, stosując adaptację typu  $h$ , tzn. powiększając liczbę elementów skończonych. Wynik takiego postępowania prześledzimy na przykładzie.

**Przykład 6.2.** Rozwiążemy problem brzegowy

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x^3 \sin x u(x) = -x^2 - x^3 \quad 1 < x < 2 \quad (6.41a)$$

$$u'(1) = 0, 5 \quad (6.41b)$$

$$u(2) = -1 \quad (6.41c)$$

przyjmując 3, 5 i 10 równej długości elementy skończone. Postępując w sposób analogiczny jak w przykładzie 6.1 sformułujemy równanie wariacyjne dla elementu skończonego w formie

$$\begin{aligned} & - \int_0^{l^e} \left[ \frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - (x^e + d^e)^3 \sin(x^e + d^e) v^e u^e \right] dx^e + \\ & + \int_0^{l^e} v^e \left[ (x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^e + v^e \frac{du^e}{dx^e} \Big|_0^{l^e} = 0 \end{aligned}$$

Przyjmując następnie aproksymacje dla  $u^e(x^e)$  i  $v^e(x^e)$  w postaci (6.14) otrzymamy równanie MES dla elementu skończonego (6.17b), gdzie obecnie

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} \left[ (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e - (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e (x^e + d^e)^3 \sin(x^e + d^e) \right] dx^e \\ \mathbf{F}^e &= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T \left[ (x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^e + (\mathbf{N}^e)^T \frac{du^e}{dx^e} \Big|_0^{l^e} = \\ &= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T \left[ (x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^e + \begin{bmatrix} -u'^e(0) \\ u'^e(l^e) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{f}^e + \mathbf{P}^e \end{aligned}$$

Końcowe rozwiązania równań  $\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F}$  są

- dla 3 elementów skończonych ( $l^e = \frac{1}{3}$ ,  $d_i^e = 1 + \frac{1}{3}(i-1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{Q} = [6, 886 \quad 6, 439 \quad 3, 963]^T$$

$$u'(2) = -17, 188$$

- dla 5 elementów skończonych ( $l^e = \frac{1}{5}$ ,  $d_i^e = 1 + \frac{1}{5}(i-1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ ):

$$\mathbf{Q} = [9,405 \quad 9,257 \quad 8,386 \quad 6,442 \quad 3,231]^T$$

$$u'(2) = -22,493$$

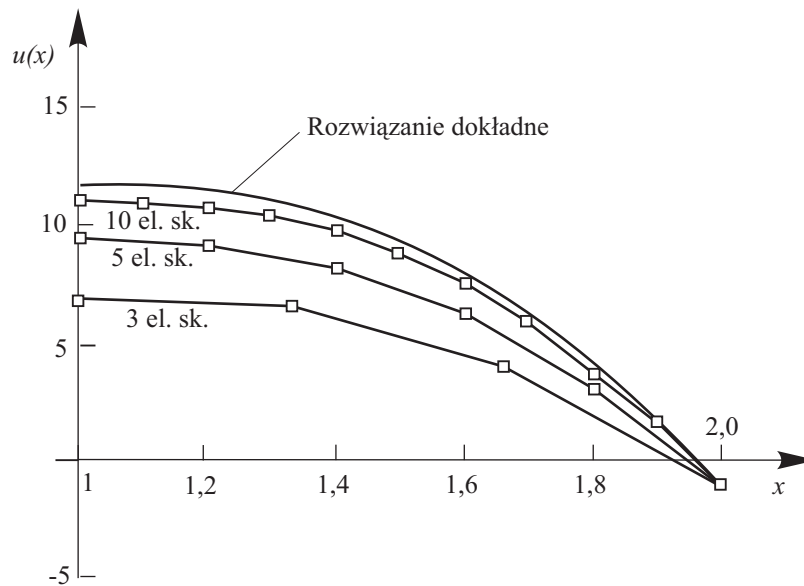
- dla 10 elementów skończonych ( $l^e = \frac{1}{10}$ ,  $d_i^e = 1 + \frac{1}{10}(i-1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ):

$$\mathbf{Q} = [11,027 \quad 11,013 \quad 10,844 \quad 10,468 \quad 9,832 \quad 8,884 \quad 7,584 \quad 5,911 \quad 3,877 \quad 1,538]^T$$

$$u'(2) = -25,898$$

Rozwiązanie dokładne dla pochodnej wynosi  $u'(2) = -27,284$ .

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6.11, gdzie dokonano też porównania z rozwiązaniem otrzymanym za pomocą systemu MATHCAD. Jak widać, wyniki obliczeń metodą elementów skończonych z adaptacją typu  $h$  gwałtownie się poprawiają przy wzroście liczby elementów skończonych.



Rys.6.11. Wyniki obliczeń w przykładzie 6.2

**Przykład 6.3.** Rozważymy równanie czwartego rzędu (5.64a), będące modelem matematycznym problemu zginania belki. Równanie to rozwiążemy dla

zilustrowania tzw. *mieszanej metody elementów skończonych*. W tym celu równanie (5.64a) zastąpimy dwoma równaniami drugiego rzędu w postaci

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = f \quad \text{dla } 0 < x < L \quad (6.42)$$

Model skończenie elementowy dla równań (6.42) otrzymamy formułując równanie wariacyjne dla elementu  $\bar{\Omega}^e = [x^e, x^{e+1}]$ . Rozważymy najpierw pierwsze równanie. Mnożąc to równanie przez funkcję testową  $v_1^e$  i całkując przez części w obszarze  $\bar{\Omega}^e$  otrzymamy (w tym przykładzie nie będziemy wprowadzać lokalnego układu współrzędnych)

$$0 = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \left( \frac{dv_1^e}{dx} \frac{dw^e}{dx} + \frac{1}{b^e} v_1^e M^e \right) dx - P_1^e v_1^e(x^e) - P_2^e v_1^e(x^{e+1}) \quad (6.43)$$

gdzie  $b^e = E^e I^e$ ,  $P_1^e = -\frac{dw^e}{dx}(x^e)$  i  $P_2^e = \frac{dw^e}{dx}(x^{e+1})$ .

Podobnie, z drugiego równania mamy

$$0 = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \left( \frac{dv_2^e}{dx} \frac{dM^e}{dx} + v_2^e f^e \right) dx - Q_1^e v_2^e(x^e) - Q_2^e v_2^e(x^{e+1}) \quad (6.44)$$

gdzie  $v_2^e$  jest funkcją testową,  $Q_1^e = -\frac{dM^e}{dx}(x^e)$  i  $Q_2^e = \frac{dM^e}{dx}(x^{e+1})$ . Zauważmy, że równania (6.43) i (6.44) są sprzężone. Model skończenie elementowy otrzymamy interpolując funkcje  $w^e$  i  $M^e$  w elemencie  $\Omega^e$ . Z postaci równań (6.43) i (6.44) (w szczególności z postaci drugich składników w wyrażeniu pod całkami) wynika, że funkcja testowa  $v_1^e$  powinna być interpolowana przez te same funkcje co  $M^e$ , a funkcja testowa  $v_2^e$  przez te same funkcje co  $w^e$ .

Podstawiając

$$w^e = \sum_{j=1}^n w_j^e N_j^{1e} \quad M^e = \sum_{j=1}^n M_j^e N_j^{2e} \quad v_1^e = N_i^{2e} \quad v_2^e = N_i^{1e} \quad (6.45)$$

do (6.43) i (6.44) dostaniemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^e \mathbf{w}^e + \mathbf{B}^e \mathbf{M}^e &= \mathbf{P}^e \\ (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{M}^e &= \mathbf{f}^e + \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (6.46)$$

gdzie

$$A_{ij}^e = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \frac{dN_i^{2e}}{dx} \frac{dN_j^{1e}}{dx} dx \quad B_{ij}^e = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \frac{1}{b^e} N_i^{2e} N_j^{2e} dx \quad f_i^e = - \int_{x^e}^{x^{e+1}} f^e N_i^{1e} dx \quad (6.47)$$

Macierz  $\mathbf{A}^e$  nie jest w ogólności macierzą kwadratową. Przyjmując liniowe funkcje kształtu,  $N_i^{1e} = N_i^{2e} = N_i^e$ , otrzymamy

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^e = \frac{l^e}{6b^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Układ równań (6.46) dla elementu skończonego można napisać w formie ( $\alpha^e = (l^e)^2/(6b^e)$ ).

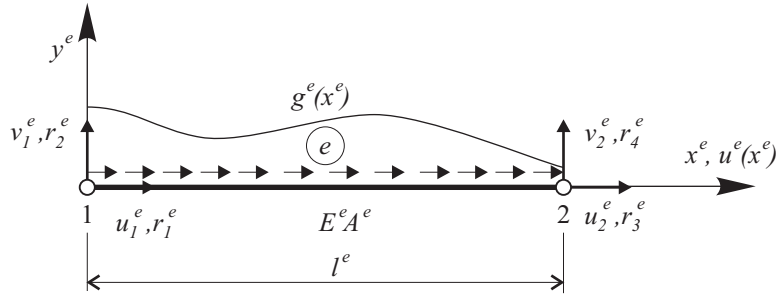
$$\frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2\alpha^e & -1 & \alpha^e \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha^e & 1 & 2\alpha^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^e \\ M_1^e \\ w_2^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ 0 \\ f_2^e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ P_1^e \\ Q_2^e \\ P_2^e \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Dalsze postępowanie jest typowe jak w metodzie elementów skończonych. W przedstawionym przykładzie  $P_i^e$  są kątaami ugięcia, a  $Q_i^e$  – siłami poprzecznymi. Korzyścią wpływającą ze stosowania metody mieszanej jest to, że można było zastosować interpolację liniową dla obu funkcji oraz obliczyć w ten sposób wartości momentów w węzłach.

### 6.3.2. Rozwiązanie statyczne płaskiej kratownicy

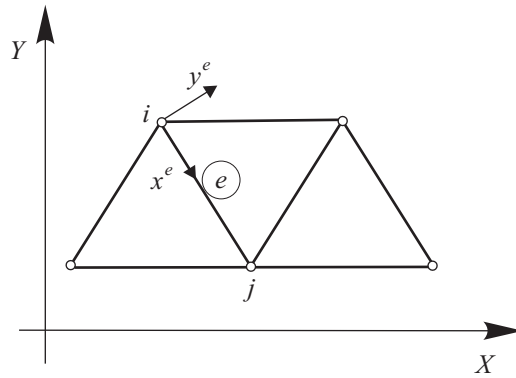
W p. 6.3.1, dyskutując wyniki obliczeń w przykładzie 6.1, zinterpretowaliśmy rozpatrywany tam problem brzegowy, stwierdzając, że może on opisywać zagadnienie pręta rozciąganego (lub ściskanego bez wyboczenia). Zbiór takich prętów, obciążonych statycznie, tworzy kratownicę płaską z tzw. idealnymi węzłami przegubowymi. Analiza statyczna kratownicy wymaga obliczenia przemieszczeń węzłów, reakcji podpór oraz sił osiowych (sił podłużnych) w każdym z prętów. Założymy, że obciążeniem mogą być siły skupione w węzłach oraz obciążenie ciągłe, równoległe do osi pręta i przyłożone na całej długości pręta. Metoda rozwiązania polegać będzie na obliczeniu macierzy i wektorów dla elementów skończonych (utożsamianych z prętami), ich agregacji w celu zbudowania układu równań równowagi MES dla węzłów całej kratownicy, i w końcu ich rozwiązania uwzględniając podstawowe (kinematyczne) warunki brzegowe.

Sposób obliczeń prześledzimy na prostym przykładzie. Najpierw jednak zdefiniujemy *plaski element kratowy* pokazany na rys. 6.12.



Rys.6.12. Element skończony kratowy

Jest to element 2-węzłowy o dwóch stopniach w węźle, w którym oprócz stopni swobody ( $u_1^e, u_2^e$ ), związanych z funkcją przemieszczenia osi pręta  $u^e(x^e)$ , wprowadzone zostały stopnie swobody ( $v_1^e, v_2^e$ ), niezbędne do złożenia elementów w jeden dyskretny układ kratowy, rys. 6.13.



Rys.6.13. Układy współrzędnych: lokalny dla elementu ( $x^e, y^e$ ) i globalny ( $X, Y$ )

Rozwiązując konstrukcje prętowe (kratownice, ramy) wprowadza się dwa układy współrzędnych, a mianowicie *lokalny* układ współrzędnych ( $x^e, y^e$ ), w którym zdefiniowany jest element skończony, oraz *globalny układ współrzędnych* ( $X, Y$ ), w którym określa się współrzędne węzłów. Tylko bowiem w jednym, globalnym układzie współrzędnych możemy dokonać procesu agregacji i budowy globalnego układu równań równowagi MES. Przyjmijmy umowę, że



macierze i wektory w układzie  $(x^e, y^e)$  będziemy oznaczali małymi literami, natomiast macierze i wektory w układzie  $(X, Y)$  oznaczmy dużymi literami. Przykładowo,  $\mathbf{k}^2$  – macierz sztywności elementu<sup>1</sup> 2 w układzie  $(x^2, y^2)$ ;  $\mathbf{K}^2$  – macierz sztywności elementu 2 w układzie  $(X, Y)$ ,  $\mathbf{Q}$  – wektor stopni swobody konstrukcji w układzie  $(X, Y)$ .

### 1. Macierze i wektory dla elementu

Wektor stopni swobody elementu kwadratowego ma postać

$$\mathbf{q}^e = [u_1^e \ v_1^e \ u_2^e \ v_2^e]^T \quad (6.49)$$

Wykorzystując wzory (6.20), zdefiniujemy

- macierz sztywności

$$\mathbf{k}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

- wektor obciążenia, będący wektorem równoważników w węzłach obciążenia ciągłego  $g^e = const$

$$\mathbf{p}^{eb} = \frac{g^e l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

- wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{r}^{eb} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}^e \quad (6.52)$$

- całkowity wektor obciążenia

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{p}^{eb} + \mathbf{r}^{eb} \quad (6.53)$$

---

<sup>1</sup>Stosując metodę elementów skończonych do analizy konstrukcji, macierz dla elementu będziemy nazywali *macierzą sztywności elementu*, a wektor prawej strony nazwiemy *wektorem obciążenia*.

Jak widać, macierz sztywności  $\mathbf{k}^e$  ma tylko 4 niezerowe elementy  $k_{11}^e = k_{33}^e \neq 0$  i  $k_{13}^e = k_{31}^e \neq 0$ , co oznacza brak sprzężeń pomiędzy przemieszczeniami  $u^e(x^e)$  i  $v^e(x^e)$ . Podobnie, w wektorze  $\mathbf{p}^{eb}$  tylko elementy  $p_1^{eb}$  i  $p_3^{eb}$  są różne od zera.

### Transformacja

Wykorzystanie obliczonych macierzy i wektorów dla elementu do analizy statycznej układu kratowniczowego wymaga, aby wszystkie wielkości węzłowe były wyrażone w tym samym globalnym układzie współrzędnych  $(X, Y)$ . Oznacza to konieczność skorzystania ze szczególnej liniowej transformacji zmiennych jaką jest obrót układu współrzędnych, rys. 6.14. Wzory transformacyjne dla wektorów  $\mathbf{q}^e$  i  $\mathbf{p}^{eb}$  mają postać

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{Q}^e, \quad \mathbf{p}^{eb} = \mathbf{T}^e \mathbf{P}^{eb} \quad (6.54)$$

gdzie:

$\mathbf{Q}^e = [Q_1^e \ Q_2^e \ Q_3^e \ Q_4^e]^T$  – wektor stopni swobody elementu w układzie współrzędnych globalnych

$\mathbf{P}^{eb} = [P_1^{eb} \ P_2^{eb} \ P_3^{eb} \ P_4^{eb}]^T$  – wektor obciążenia elementu w układzie współrzędnych globalnych

oraz

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & \sin \alpha^e \\ -\sin \alpha^e & \cos \alpha^e \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

jest macierzą transformacji z układu globalnego do lokalnego. Kąt  $\alpha^e$  jest kątem transformacji o dodatnim znaku pokazanym na rys. 6.14. Macierz sztywności elementu kratowego w układzie współrzędnych globalnych obliczymy ze wzoru

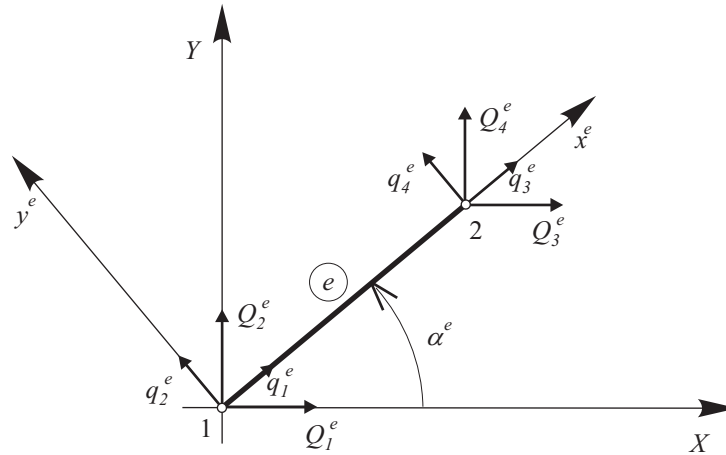
$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \quad (6.56)$$

który wynika z przekształcenia formy kwadratowej

$$(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = (\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T \left[ (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \right] \mathbf{Q}^e$$

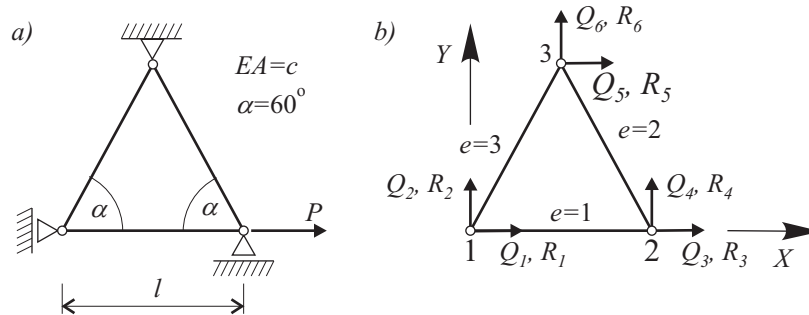
Element kratowy jest prostym elementem i można dla niego napisać explicit macierz sztywności  $\mathbf{K}^e$  (oznaczenia  $\cos \alpha^e = c$ ;  $\sin \alpha^e = s$ )

$$\mathbf{K}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$



Rys.6.14. Transformacja układu współrzędnych

**Przykład 6.4.** Rozwiążemy kratownicę pokazaną na rys. 6.15a. Obciążeniem jest tylko siła skupiona  $P$ , co oznacza, że dla elementów  $\mathbf{P}^{eb} = \mathbf{0}$ . Pomińmy też ciężar własny kratownicy.



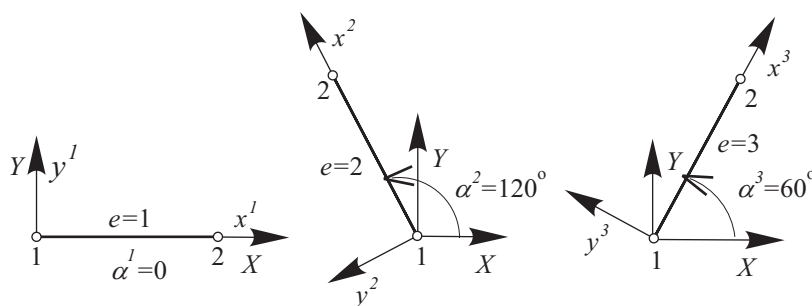
Rys.6.15. a) kratownica, b) model skończenie elementowy

**1. Dyskretyzacja MES.** Kratownica jest zdyskretyzowana trzema elementami kratowymi. Na rys. 6.15b podane zostały numery węzłów i elementów, stopnie swobody  $Q_i$ , siły węzłowe  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  oraz globalny układ współrzędnych  $(X, Y)$ . W tab. 6.2 podano topologię zdyskretyzowanej kratownicy.

Numer elementu skończonego	Numer węzła początkowego	Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Tabela 6.2. Tablica topologii kratownicy

Kąty transformacji dla poszczególnych elementów skończonych pokazano na rys. 6.16.



Rys.6.16. Kąty transformacji dla elementów skończonych

## 2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów.

**Element 1:**  $\alpha^1 = 0$ ,  $l^1 = l$

Macierz sztywności elementu w układzie globalnym

$$\mathbf{K}^1 = \frac{c}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^1 = [R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1]^T$$

**Element 2:**  $\alpha^2 = 120^\circ$ ,  $l^2 = l$

Macierz sztywności elementu w układzie globalnym

$$\mathbf{K}^2 = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^2 = [R_1^2 \ R_2^2 \ R_3^2 \ R_4^2]^T$$

**Element 3:**  $\alpha^3 = 60^\circ$ ,  $l^3 = l$

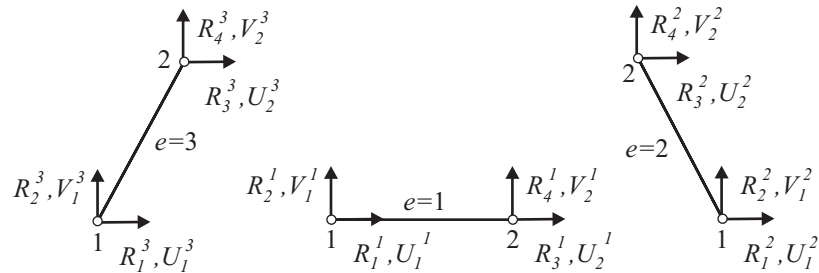
Macierz sztywności elementu w układzie globalnym

$$\mathbf{K}^3 = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^3 = [R_1^3 \ R_2^3 \ R_3^3 \ R_4^3]$$

**3. Agregacja i budowa równań MES.** Warunki zgodności przemieszczeń w węzłach kratownicy mają następującą formę (rys. 6.17):



Rys.6.17. Siły węzłowe i przemieszczenia w globalnym układzie współrzędnych

$$\begin{array}{lll} U_1^1 = U_1^3 = Q_1 & V_1^1 = V_1^3 = Q_2 & U_2^1 = U_1^2 = Q_3 \\ V_2^1 = V_1^2 = Q_4 & U_2^2 = U_2^3 = Q_5 & V_2^2 = V_2^3 = Q_6 \end{array}$$

gdzie  $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , jest wektorem globalnych stopni swobody.

Układ równań MES utworzony na podstawie tablicy topologii ma postać

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^1 + R_1^3 \\ R_2^1 + R_2^3 \\ R_3^1 + R_1^2 \\ R_4^1 + R_2^2 \\ R_3^2 + R_3^3 \\ R_4^2 + R_4^3 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

**4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił.** Kinematyczne warunki brzegowe są jednorodne w postaci

$$Q_1 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0 \quad (6.59)$$

Statyczne warunki brzegowe wyrażają warunki równowagi statycznej w węzłach kratownicy

$$\begin{aligned} R_1^1 + R_1^3 = R_1 & & R_2^1 + R_2^3 = 0 & & R_3^1 + R_1^2 = R_3 = P \\ R_4^1 + R_2^2 = R_4 & & R_3^2 + R_3^3 = R_5 & & R_4^2 + R_4^3 = R_6 \end{aligned} \quad (6.60)$$

gdzie  $R_1$ ,  $R_4$ ,  $R_5$ , i  $R_6$  są reakcjami w równaniu (6.58).

Wykorzystując (6.59) i (6.60) w równaniu (6.58), otrzymamy układ równań

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ P \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Jest to układ sześciu liniowych równań algebraicznych z sześcioma niewiadomymi: dwiema niewiadomymi pierwotnymi i czterema niewiadomymi wtórnymi. Układ ten można rozwiązać ze względu na niewiadome pierwotne, a następnie z pozostałych (czterech) równań obliczyć niewiadome wtórne. Pokażemy to, przekształcając (6.61) do innej, dogodnej postaci (por. równanie (6.34))

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 3 & 0 & \vdots & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 5 & \vdots & -4 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{3} & -4 & \vdots & 5 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & \vdots & 0 & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & -1 & \vdots & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & \vdots & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ \dots \\ R_1 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Pierwsze dwa równania dają rozwiązanie dla niewiadomych pierwotnych

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{4l}{15c} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} = \frac{4Pl}{5c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Niewiadome wtórne obliczymy z drugiej grupy równań

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{4Pl}{5c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{P}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

**5. Obliczenie sił przywęzłowych w elementach.** Siły przywęzłowe obliczymy z równania równowagi w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{p}^e \quad (6.63)$$

gdzie w tym przykładzie  $\mathbf{p}^e = \mathbf{0}$ .

#### Element 1

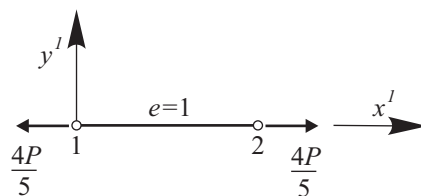
Wektor przemieszczeń węzłowych elementu w układzie współrzędnych lokalnych wyznaczmy na podstawie tablicy topologii

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4Pl}{5c} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{k}^1 \mathbf{q}^1 = \frac{c}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4Pl}{5c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4P}{5} \\ 0 \\ \frac{4P}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na podstawie rys. 6.18 stwierdzamy, że element 1 jest rozciągany.



Rys.6.18. Siły przywęzłowe dla elementu 1

### Element 2

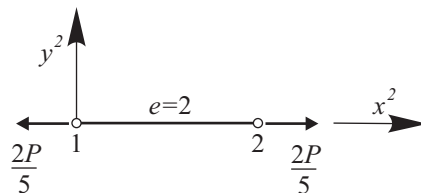
Wektor przemieszczeń węzłowych elementu w układzie współrzędnych globalnych oraz w układzie współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} \frac{4Pl}{5c} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q}^2 = \mathbf{T}^2 \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{2Pl}{5c} & -\frac{2\sqrt{3}Pl}{5c} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{2P}{5} \\ 0 \\ \frac{2P}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z rys. 6.19 widać, że element 2 jest też rozciągany.



Rys.6.19. Siły przywęzłowe dla elementu 2

### Element 3

Dla tego elementu  $\mathbf{Q}^3 = 0$ , skąd wnosimy, że  $\mathbf{r}^3 = \mathbf{0}$  (pręt zerowy).



### 6.3.3. Inne sformułowania wariacyjne modelu skończenie elementowego

W rozdziale piątym wykazaliśmy równoważność metody Rayleigha-Ritza z metodą Bubnowa-Galerkina w słabym sformułowaniu, jeśli operator  $A$  równania różniczkowego jest symetryczny i dodatni (a rozwiązywane dotychczas przykłady te warunki spełniały). Dlatego obecnie omówimy krótko jeszcze model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu silnym (który nazwiemy po prostu *modelem skończenie elementowym Bubnowa-Galerkina*) oraz model skończenie elementowy, wykorzystujący metodę najmniejszych kwadratów.

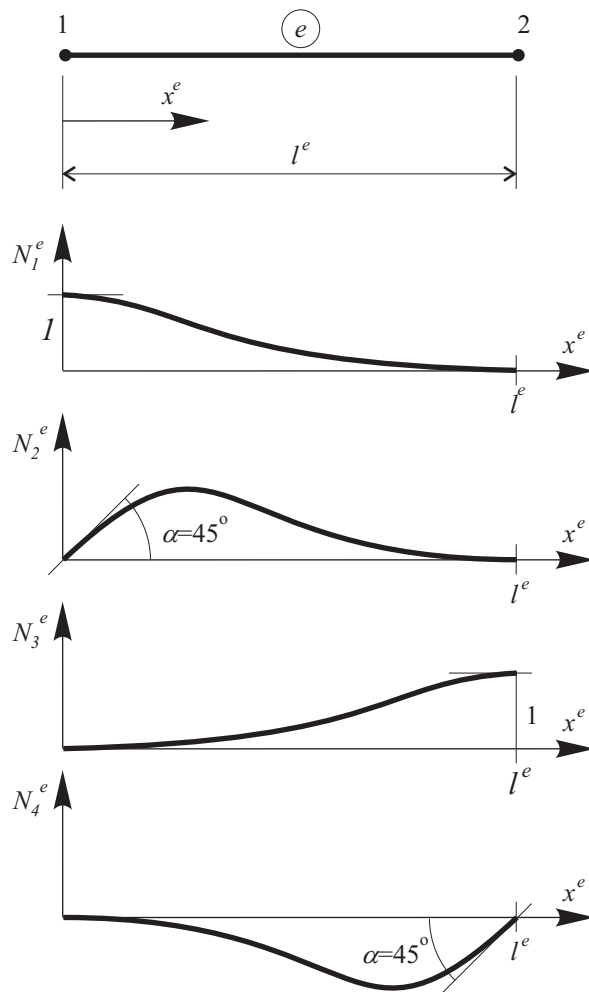
W modelu skończenie elementowym Bubnowa-Galerkina funkcje aproksymacyjne muszą zapewniać ciągłość aproksymacji klasy  $C^1$ . W równaniu (6.9) naturalny warunek brzegowy oznacza wyspecyfikowanie  $a\left(\frac{du}{dx}\right)$  na brzegach elementu. Stąd funkcje interpolacyjne muszą zostać tak wybrane, aby  $a\left(\frac{du}{dx}\right)$  było ciągle w węzłach pomiędzy elementami. To z kolei implikuje (jeśli  $a$  jest funkcją ciągłą) ciągłość pochodnej  $\frac{du}{dx}$  w całym obszarze  $\Omega = (0, L)$ .

Powyższe wymagania są spełnione dla elementu dwuwęzłowego z sześcienną interpolacją funkcji  $u^e(x)$  i dwoma stopniami swobody w węźle, a mianowicie  $u$  i  $\frac{du}{dx}$ . Funkcjami kształtu są *wielomiany Hermite'a* omówione w p. 4.6. Taki element skończony jest różny od elementu z sześciennymi funkcjami kształtu Lagrange'a, który ma cztery węzły z jednym stopniem swobody w węźle. Interpolacja Lagrange'a (dowolnego rzędu) nie spełnia warunku ciągłości  $\frac{du}{dx}$  na granicy pomiędzy elementami, i stąd nie należy do  $C^1(0, L)$ .

Funkcje kształtu Hermite'a określone są wzorami (4.37), które przepiszemy w nowych oznaczeniach

$$\begin{aligned}
 N_1^e(x^e) &= 1 - 3\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 + 2\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^3 & N_2^e(x^e) &= x^e \left[1 - \left(\frac{x^e}{l^e}\right)\right]^2 \\
 N_3^e(x^e) &= 3\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 - 2\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^3 & N_4^e(x^e) &= x^e \left[\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 - \left(\frac{x^e}{l^e}\right)\right]
 \end{aligned}
 \tag{6.64}$$

Na rys. 6.20 (będącym powtórzeniem rys. 4.17) narysowano wykresy funkcji kształtu (6.64) dla elementu skończonego.



Rys.6.20. Funkcje kształtu Hermite'a

Wykorzystując (6.64) aproksymację  $u_h(x^e)$  wyraża wzór

$$u^e(x^e) = \sum_{j=1}^4 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e \quad (6.65)$$

gdzie

$\mathbf{u} = \left[ u_1^e, u_2^e \equiv \left( \frac{du^e(0)}{dx^e} \right), u_3^e, u_4^e \equiv \left( \frac{du^e(l^e)}{dx^e} \right) \right]^T$  – wektor stopni swobody elementu ( $u_1^e, u_3^e$  – wartości  $u^e$  w węzłach i  $u_2^e, u_4^e$  – wartości pochodnej  $\frac{du^e}{dx^e}$  w węzłach),

$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e), N_2^e(x^e), N_3^e(x^e), N_4^e(x^e)]$  – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Równanie metody Bubnowa-Galerkina dla równania (6.9) w elemencie skończonym  $\Omega^e = (0, l^e)$  ma postać

$$\int_0^{l^e} v^e(x^e) \left[ -\frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) - f^e(d^e + x^e) \right] dx^e = 0$$

Podstawiając  $v^e = N_i^e(x^e)$  i (6.65) za  $u^e(x^e)$  otrzymamy układ czterech równań MES

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e = 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

lub

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (6.66)$$

gdzie

$$K_{ij}^e = - \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) \frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{dN_j^e}{dx^e} \right) dx^e \quad (6.67)$$

$$f_i^e = \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e$$

Dla metody najmniejszych kwadratów otrzymamy wzory

$$K_{ij}^e = \int_0^{l^e} \frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \right) \frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{dN_j^e}{dx^e} \right) dx^e, \quad (6.68)$$

$$f_i^e = - \int_0^{l^e} \frac{d}{dx^e} \left( a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \right) f^e(x^e + d^e) dx^e$$

**Przykład 6.5.** Rozważmy problem brzegowy

$$-\frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (6.69)$$

za pomocą różnych modeli skończenie elementowych. Obszar rozwiązania zdyskretyzujemy dwoma elementami skończonymi o równej długości. Dla każdego modelu przyjmujemy funkcję kształtu Hermite'a, otrzymując w ten sposób układ zdyskretyzowany z trzema węzłami i sześcioma stopniami swobody. Przyjmujemy warunki brzegowe w postaci

$$u(0) = 0 \quad \left[ (1+x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=1} = 1 \quad (6.70)$$

co oznacza, że

$$U_1 = 0 \quad U_6 \equiv \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+1} = 0.5 \quad (6.71)$$

Rozwiązanie dokładne wynosi  $u = \ln(1+x)$ .

1. *Metoda Bubnowa-Galerkina*

Wykorzystując wzory (6.67) obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych

**Element 1**

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1,15 & -3 & 0,1 \\ 0,15 & 0,075 & -0,15 & -0,021 \\ -3 & -0,15 & 3 & -1,6 \\ 0,1 & -0,021 & -0,1 & 0,092 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

**Element 2**

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 4,2 & 1,7 & -4,2 & 0,15 \\ 0,2 & 0,108 & -0,2 & -0,029 \\ -4,2 & -0,2 & 4,2 & -2,15 \\ 0,15 & -0,029 & -0,15 & 0,125 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES ma formę

$$\begin{bmatrix} 3 & 1,15 & -3 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0,075 & -0,15 & -0,021 & 0 & 0 \\ -3 & -0,15 & 7,2 & 0,1 & -4,2 & 0,15 \\ 0,1 & -0,021 & 0,1 & 0,2 & -0,2 & -0,029 \\ 0 & 0 & -4,2 & -0,2 & 4,2 & -2,15 \\ 0 & 0 & 0,15 & -0,029 & -0,15 & 0,125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Uwzględnienie w powyższym równaniu warunków brzegowych (6.71) prowadzi do układu czterech równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 0,075 & -0,15 & -0,021 & 0 \\ -0,15 & 7,2 & 0,1 & -4,2 \\ -0,021 & 0,1 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & -4,2 & -0,2 & 4,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,075 \\ 0,015 \\ 1,075 \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

którego rozwiązanie wynosi:  $U_2 = 0,99604$ ,  $U_3 = 0,40537$ ,  $U_4 = 0,66707$  i  $U_5 = 0,69309$ .

## 2. Metoda najmniejszych kwadratów

Korzystając ze wzorów (6.68), obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych:

### Element 1

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 153,6 & 33,4 & -153,6 & 43,4 \\ 33,4 & 9,267 & -33,4 & 6,433 \\ -153,6 & -33,4 & 153,6 & -43,4 \\ 43,4 & 6,433 & -43,4 & 16,767 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

### Element 2

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 297,6 & 67,4 & -297,6 & 81,4 \\ 67,4 & 19,767 & -67,4 & 12,433 \\ -297,6 & -67,4 & 297,6 & -81,4 \\ 81,4 & 12,433 & -81,4 & 30,267 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES ma postać

$$\begin{bmatrix} 153,6 & 33,4 & -153,6 & 43,4 & 0 & 0 \\ 33,4 & 9,267 & -33,4 & 6,433 & 0 & 0 \\ -153,6 & -33,4 & 451,2 & 24 & -297,6 & 81,4 \\ 43,4 & 6,433 & 24 & 36,533 & -67,4 & 12,433 \\ 0 & 0 & -297,6 & -67,4 & 297,6 & -81,4 \\ 0 & 0 & 81,4 & 12,433 & -81,4 & 30,267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

Uwzględnienie w powyższym równaniu warunków brzegowych (6.71) prowadzi do układu czterech równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 9,267 & -33,4 & 6,433 & 0 \\ -33,4 & 451,2 & 24 & -297,6 \\ 6,433 & 24 & 36,533 & -67,4 \\ 0 & -297,6 & -67,4 & 297,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40,7 \\ -6,217 \\ 40,7 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

którego rozwiązanie wynosi:  $U_2 = 0,99902$ ,  $U_3 = 0,40554$ ,  $U_4 = 0,66645$  i  $U_5 = 0,69324$ .

W tab. 6.3 zestawiono wyniki obliczeń. Jak widać, zgodność rozwiązania tymi metodami z rozwiązaniem dokładnym jest zadowalająca.

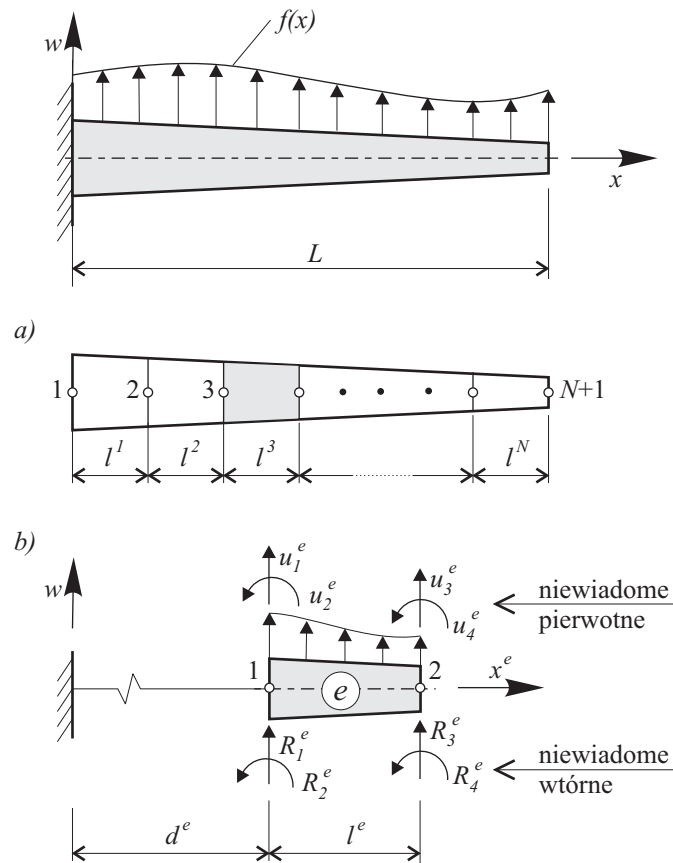
$x$		Wynik dokładny	Metoda Bubnowa-Galerkina	Metoda najmniejszych kwadratów
0	$u$	0,00000	0,00000	0,00000
	$u'$	1,00000	0,99604	0,99902
0,5	$u$	0,40547	0,40537	0,40554
	$u'$	0,66667	0,66707	0,66645
1,0	$u$	0,69315	0,69309	0,69324
	$u'$	0,50000	0,50000	0,50000

Tabela 6.3. Porównanie wyników rozwiązania równania (6.69)

## 6.4. Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego czwartego rzędu

### 6.4.1. Model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym

Rozwiązanie równania różniczkowego czwartego rzędu za pomocą MES przedstawimy na przykładzie problemu zginania belki sprężystej, przedstawionego w przykładzie 5.8. Sformułowanie modelu skończenie elementowego



Rys.6.21. a) belka wspornikowa, b) element skończony belkowy

wymaga wykonania tych samych etapów, opisanych w punkcie 6.3, z pewnymi zmianami wynikającymi z rzędu rozwiązywanego równania. Modelem matema-

tycznym problemu zginania belki sprężystej jest równanie postaci, rys. 6.21

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (6.76)$$

gdzie:

$b = EI$  – sztywność na zginanie ( $E$  – moduł Younga,  $I$  – moment bezwładności względem osi głównej centralnej przekroju poprzecznego),

$f$  – intensywność obciążenia poprzecznego.

**1. Dyskretyzacja obszaru.** Belka jest zdyskretyzowana przez  $N$  elementów dwuwęzłowych.

**2. Wyznaczenie równań MES dla elementów.** W tym etapie budujemy formę wariacyjną równania (6.76) dla elementu skończonego  $\bar{\Omega}^e = (0, l^e)$ . Na tej podstawie zidentyfikujemy bliżej niewiadome pierwotne i niewiadome wtórne. Następnie przyjmujemy odpowiednią aproksymację dla zmiennych pierwotnych i utworzymy układ równań MES dla elementu skończonego. Na rys. 6.21b pokazano rozważany element skończony wraz z niewiadomymi pierwotnymi, niewiadomymi wtórnymi oraz lokalną osią współrzędnych  $x^e$ .

**a. Sformułowanie wariacyjne.** Wykorzystując uzyskaną już wiedzę napiszemy równanie

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{l^e} v^e \left[ \frac{d^2}{dx^{e2}} \left( b^e (d^e + x^e) \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) - f^e (d^e + x^e) \right] dx^e = \\ &= \int_0^{l^e} \left\{ -\frac{dv^e}{dx^e} \frac{d}{dx^e} \left[ b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] - v^e f^e \right\} dx^e + \left\{ v^e \frac{d}{dx^e} \left[ b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} = \\ &= \int_0^{l^e} \left[ b^e \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} - v^e f^e \right] dx^e + \left\{ v^e \frac{d}{dx^e} \left[ b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} + \\ &- \left\{ \frac{dv^e}{dx^e} b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} \end{aligned} \quad (6.77)$$



gdzie  $v^e \in H^2(\bar{\Omega}^e)$  jest funkcją testową. Z analizy wyrazów brzegowych w powyższym równaniu wynika, że z podstawowymi warunkami brzegowymi są związane zmienne  $w^e$  i  $\frac{dw^e}{dx^e}$ , natomiast naturalne warunki brzegowe wiążą się ze zmiennymi  $b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}}$  i  $\frac{d}{dx^e} \left( b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right)$  w węzłach końcowych elementu (rys. 6.21b). Oznacza to, że  $w^e$  i  $\frac{dw^e}{dx^e}$  są niewiadomymi pierwotnymi i muszą wystąpić w interpolacji funkcji ugięcia  $w^e(x^e)$ . Naturalne warunki brzegowe pozostaną w sformułowaniu wariacyjnym i pojawią się po prawej stronie równania MES jako siły brzegowe. Warunki brzegowe są więc postaci

*podstawowe*

$$\begin{aligned} w^e(x^e = 0) &\equiv u_1^e & \left. \frac{dw^e}{dx^e} \right|_{x=0} &\equiv u_2^e \\ w^e(x^e = l^e) &\equiv u_3^e & \left. \frac{dw^e}{dx^e} \right|_{x=l^e} &\equiv u_4^e \end{aligned} \quad (6.78a)$$

*naturalne*

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dx^e} \left( b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \right] \Big|_{x^e=0} &\equiv R_1^e & \left( -b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \Big|_{x^e=0} &\equiv R_2^e \\ \left[ -\frac{d}{dx^e} \left( b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \right] \Big|_{x^e=l^e} &\equiv R_3^e & \left( b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \Big|_{x^e=l^e} &\equiv R_4^e \end{aligned} \quad (6.78b)$$

Podstawiając (6.78a) i (6.78b) do (6.77) otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{l^e} \left[ b^e \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} - v^e f^e \right] dx^e + \\ &- v^e(0)R_1^e - \frac{dv^e}{dx^e}(0)R_2^e - v^e(l^e)R_3^e - \frac{dv^e}{dx^e}(l^e)R_4^e \equiv \\ &\equiv B^e(v^e, w^e) - l^e(v^e) \end{aligned} \quad (6.79a)$$

gdzie formy dwuliniowa i liniowa wyrażone są wzorami

$$\begin{aligned}
 B^e(v^e, w^e) &= \int_0^{l^e} b^e(d^e + x^e) \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} dx^e \\
 l^e(v^e) &= \int_0^{l^e} f^e(d^e + x^e) v^e dx^e + v^e(0) R_1^e + \frac{dv^e}{dx^e}(0) R_2^e + \\
 &+ v^e(l^e) R_3^e + \frac{dv^e}{dx^e}(l^e) R_4^e
 \end{aligned} \tag{6.79b}$$

**b. Funkcje interpolacyjne.** Z postaci formy wariacyjnej (6.79b) wnioskujemy, że funkcje interpolacyjne dla  $w^e$  muszą być wybrane z przestrzeni  $H^2(\Omega^e)$ , czyli że funkcjami kształtu są wielomiany Hermite'a (6.64).

Podstawiając do (6.79a)  $v^e = N_i^e(x^e)$  i wzór typu (6.65) za  $w^e(x^e)$  otrzymamy układ czterech równań MES dla elementu skończonego w formie:

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e = F_i^e, \quad i = 1, \dots, 4$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \tag{6.80}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^e &= \int_0^{l^e} b^e(d^e + x^e) \frac{d^2 N_i^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 N_j^e}{dx^{e2}} dx^e \\
 F_i^e &= \int_0^{l^e} f^e(d^e + x^e) N_i^e(x^e) dx^e + R_i^e
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

Jeśli  $b^e = E^e I^e = const$  i  $f^e = const$  w elemencie  $\bar{\Omega}^e$ , to macierz sztywności elementu belkowego  $\mathbf{K}^e$  i wektor obciążenia  $\mathbf{F}^e$  mają postać

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (6.82)$$

$$\mathbf{F}^e = \frac{f^e l^e}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ l^e \\ 6 \\ -l^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^e \\ R_2^e \\ R_3^e \\ R_4^e \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

Można wykazać, że pierwsza kolumna w wektorze na  $\mathbf{F}^e$  przedstawia statycznie równoważne siły i momenty w więzach belki obustronnie utwierdzonej od obciążenia równomiernie rozłożonego  $f^e$ .

**3. Agregacja równań dla elementów.** W porównaniu z agregacją dla równania różniczkowego drugiego rzędu obecnie węzeł ma dwa stopnie swobody. Wykorzystując do agregacji macierz topologii, otrzymamy dla dwóch elementów skończonych globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążenia w formie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 + R_1^2 \\ R_4^1 + R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_4^2 \end{bmatrix}$$

**4. Uwzględnienie warunków brzegowych.** Warunki brzegowe dla przemieszczeń i sił uwzględniamy tak samo jak w p. 6.3.1. Warunek równowagi sił w węzłach uwzględniamy modyfikując odpowiednio drugi składnik w wektorze  $\mathbf{F}$  (6.84).

Na przykład, jeśli w  $I$ -tym węźle globalnym jest przyłożona siła  $F_0$ , a w węźle  $K$ -tym jest moment  $M_0$ , to warunki równowagi będą miały postać:

$$R_3^I - 1 + R_1^I = F_0 \quad R_4^K - 1 + R_2^K = M_0$$

Jeśli nie będzie obciążeń skupionych, to powyższe sumy będą równe zero. Dalsze postępowanie jest już całkowicie analogiczne do postępowania opisanego w p. 6.3.1.

**Przykład 6.6.** Rozważmy belkę jednoprzęsłową swobodnie podpartą na lewej podporze ( $w(0)=0$ ) i utwierdzoną na podporze prawej ( $w(L)=\frac{dw}{dx}(L)=0$ ). Pozostałe dane wynoszą:  $L=180$  cm,  $I=723$  cm<sup>4</sup>,  $E=29 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup>,  $f = -q_0 x/L$ . Pomijamy ciężar własny belki. Przyjmujemy dyskretyzację belki dwoma i czterema elementami o równej długości.

Ponieważ  $b^e = \text{const}$ , to macierze sztywności elementów obliczymy z (6.82), a wektor obciążenia  $\mathbf{F}^e$  wyznaczymy z drugiego ze wzorów (6.81)

$$f_i^e = - \int_0^{l^e} \left( q_0 \frac{d^e + x^e}{L} \right) N_i^e(x^e) dx^e \quad i = 1, \dots, 4$$

Dla dwóch elementów ( $l^e=90$  cm) wektor obciążenia dla elementu 1 wynosi

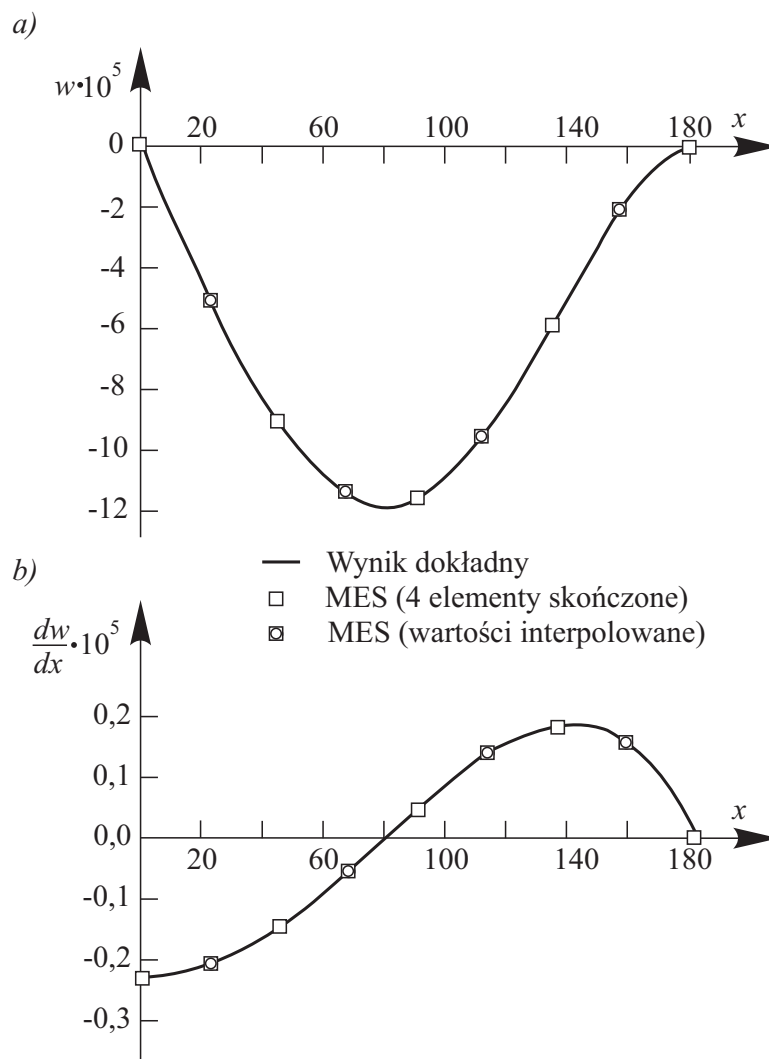
$$\mathbf{f}^1 = [-6, 75 \quad 135, 0 \quad -15, 75 \quad 202, 5]^T q_0$$

Warunki brzegowe i równowagi w węzłach międzyelementowych mają postać

$$U_1 = 0 \quad U_5 = U_6 = 0 \quad P_2^1 = 0 \quad P_3^1 + P_1^2 = 0 \quad P_4^1 + P_2^2 = 0$$

Obliczone niewiadome pierwotne  $U_2$ ,  $U_3$ , i  $U_4$  są wartościami dokładnymi w węzłach. Ponieważ rozwiązanie dokładne  $w$  jest wielomianem stopnia piątego, to w punktach pomiędzy węzłami rozwiązanie jest przybliżone.

Na rys. 6.22 porównano wyniki obliczeń MES otrzymane dla dyskretyzacji czterema elementami z wynikami dokładnymi. Zwraca uwagę bardzo dobra jakość rozwiązania MES.



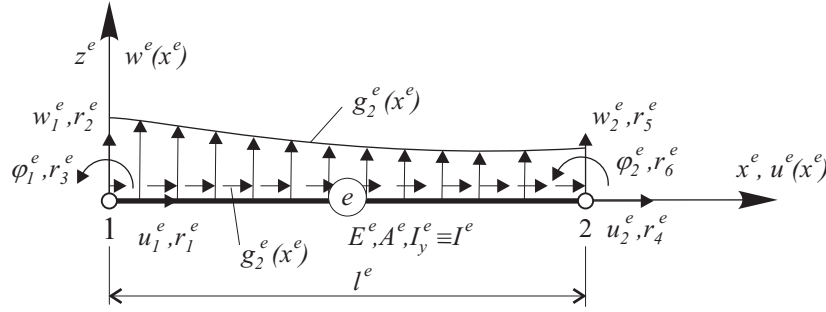
Rys.6.22. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym dla przykładu 6.6

## 6.4.2. Rozwiązanie statyczne płaskiej ramy

### 1. Element skończony ramowy

Element skończony ramowy przedstawiono na rys. 6.23. Jest to element dwuwęzłowy o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Wektor stopni swobody ma postać

$$\mathbf{q}^e = [u_1^e \ w_1^e \ \varphi_1^e \ u_2^e \ w_2^e \ \varphi_2^e]^T \quad (6.85)$$



Rys.6.23. Element skończony ramowy

Macierze dla tego elementu można wyprowadzić w taki sam sposób jak to czyniliśmy dla elementów kratowego i belkowego. Różnica w porównaniu z tamtymi rozwiązaniami polega jednakże na tym, że obecnie nieznane jest pole wektorowe, w którym poszukiwane są dwie funkcje przemieszczeń, a mianowicie  $u^e(x^e)$  i  $w^e(x^e)$ . Łącząc ze sobą równania (6.12) i (6.79a), napiszemy dla elementu ramowego równanie wariacyjne w postaci

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^{l^e} \left[ a^e \frac{dv_1^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - v_1^e(x^e) g_1^e(x^e) \right] dx^e - r_1^e v_1^e(0) - r_4^e v_1^e(l^e) + \\ & + \int_0^{l^e} \left[ b^e \frac{d^2 v_2^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} - v_2^e(x^e) g_2^e(x^e) \right] dx^e + \\ & - r_2^e v_2^e(0) - r_3^e \frac{dv_2^e}{dx^e} \Big|_{x^e=0} - r_5^e v_2^e(l^e) - r_6^e \frac{dv_2^e}{dx^e} \Big|_{x^e=l^e} \end{aligned} \quad (6.86)$$

gdzie oznaczenia dostosowano do rys. 6.23 oraz  $a^e \equiv E^e A^e$  i  $b^e \equiv E^e I^e$ .

Aproksymacje funkcji  $u^e(x^e)$  i  $w^e(x^e)$  oraz funkcji wagowych  $v_1^e(x^e)$  i  $v_2^e(x^e)$  wyrażają wzory

$$\begin{aligned} u^e(x^e) &= \mathbf{N}_1^e(x^e) \mathbf{q}^e & w^e(x^e) &= \mathbf{N}_2^e(x^e) \mathbf{q}^e \\ v_1^e(x^e) &= \mathbf{N}_1^e(x^e) \mathbf{d}^e & v_2^e(x^e) &= \mathbf{N}_2^e(x^e) \mathbf{d}^e \end{aligned} \quad (6.87)$$

gdzie macierze jednowierszowe funkcji kształtu  $\mathbf{N}_1^e(x^e)$  oraz  $\mathbf{N}_2^e(x^e)$  wynoszą

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1^e(x^e) &= [N_1^e(x^e) \ 0 \ 0 \ N_4^e(x^e) \ 0 \ 0] \\ \mathbf{N}_2^e(x^e) &= [0 \ N_2^e(x^e) \ N_3^e(x^e) \ 0 \ N_5^e(x^e) \ N_6^e(x^e)] \end{aligned} \quad (6.88)$$

Funkcje kształtu  $N_1^e(x^e)$  i  $N_4^e(x^e)$  są liniowymi funkcjami Lagrange'a (6.19b), a  $N_2^e(x^e)$ ,  $N_3^e(x^e)$ ,  $N_5^e(x^e)$  i  $N_6^e(x^e)$  są sześciennymi funkcjami Hermite'a (6.64). Wykorzystując następnie (6.87) w równaniu (6.86), otrzymamy po przekształceniach i wykorzystaniu warunku  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , równanie macierzowe w formie

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \left[ \int_0^{l^e} \left( (\mathbf{N}_1^e(x^e))^T a^e \mathbf{N}_1^e(x^e) + (\mathbf{N}_2^e(x^e))^T b^e \mathbf{N}_2^e(x^e) \right) dx^e \right] \mathbf{q}^e + \\ &\quad - \left[ \int_0^{l^e} \left( (\mathbf{N}_1^e(x^e))^T g_1^e(x^e) + (\mathbf{N}_2^e(x^e))^T g_2^e(x^e) \right) dx^e \right] + \\ &\quad - \left[ r_1^e (\mathbf{N}_1^e(0))^T + r_2^e (\mathbf{N}_2^e(0))^T + r_3^e (\mathbf{N}_2^e(0))^T + r_4^e (\mathbf{N}_1^e(l^e))^T + \right. \\ &\quad \left. + r_5^e (\mathbf{N}_2^e(l^e))^T + r_6^e (\mathbf{N}_2^e(l^e))^T \right] \end{aligned} \quad (6.89a)$$

lub

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{f}^e \quad (6.89b)$$

gdzie dodatkowo oznaczono całkowity wektor obciążenia elementu

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{p}^{eb} + \mathbf{r}^{eb} \quad (6.90)$$

oraz zdefiniowano:

macierz sztywności elementu ramowego

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{l^e} \left( \left( \mathbf{N}'_1(x^e) \right)^T E^e A^e \mathbf{N}'_1(x^e) + \left( \mathbf{N}''_2(x^e) \right)^T E^e I^e \mathbf{N}''_2(x^e) \right) dx^e \quad (6.91)$$

wektor równoważników obciążenia ciągłego

$$\mathbf{p}^{eb}(x^e) = \int_0^{l^e} \left( \left( \mathbf{N}_1^e(x^e) \right)^T g_1^e(x^e) + \left( \mathbf{N}_2^e(x^e) \right)^T g_2^e(x^e) \right) dx^e \quad (6.92)$$

wektor sił węzłowych (niewiadomych wtórnych)

$$\mathbf{r}^{eb} = [r_1^e \ r_2^e \ r_3^e \ r_4^e \ r_5^e \ r_6^e]^T \quad (6.93)$$

Zauważmy, że definiując wektor  $\mathbf{r}^{eb}$  wykorzystano w (6.89a) własności interpolacyjne funkcji kształtu.

Przyjmując, że  $E^e A^e = const$ ,  $E^e I^e = const$  oraz  $g_1^e = const$  i  $g_2^e = const$  otrzymamy z wzorów (6.91) i (6.92), po wykonaniu koniecznych całkowań, macierz sztywności  $\mathbf{k}^e$  w postaci

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (6.94)$$

oraz wektor  $\mathbf{p}^{eb}$  w formie

$$\mathbf{p}^{eb} = \left[ \frac{g_1 l}{2} \ \frac{g_2 l}{2} \ \frac{g_2 l^2}{12} \ \frac{g_1 l}{2} \ \frac{g_2 l}{2} \ -\frac{g_2 l^2}{12} \right]^{eT} \quad (6.95)$$



Macierz sztywności  $\mathbf{k}^e$  i wektor obciążenia  $\mathbf{p}^e$  można było też napisać bezpośrednio, wykorzystując zasadę superpozycji i dodając odpowiednio do siebie macierze elementów kratowego i belkowego.

## 2. Transformacja

Macierze i wektory zdefiniowane w lokalnym układzie współrzędnych  $(x^e, z^e)$  transformujemy do układu globalnego  $(X, Z)$  wg wzorów (6.54) i (6.56). Macierz transformacji ma formę

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

gdzie macierz  $\mathbf{t}^e$  obliczamy wzorem (6.55).

Macierz sztywności elementu ramowego można explicite przedstawić w układzie współrzędnych globalnych w postaci sumy dwóch macierzy, odpowiadających udziałowi sztywności osiowej (wyrazy zawierające  $EA$ ) oraz udziałowi sztywności zginania (wyrazy zawierające  $EI$ )

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_a^e + \mathbf{K}_b^e$$

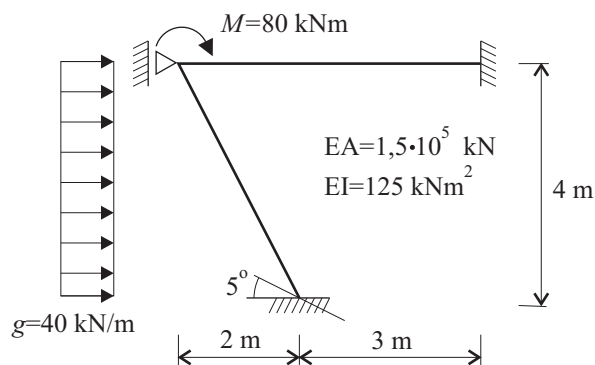
gdzie

$$\mathbf{K}_a^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (6.97)$$

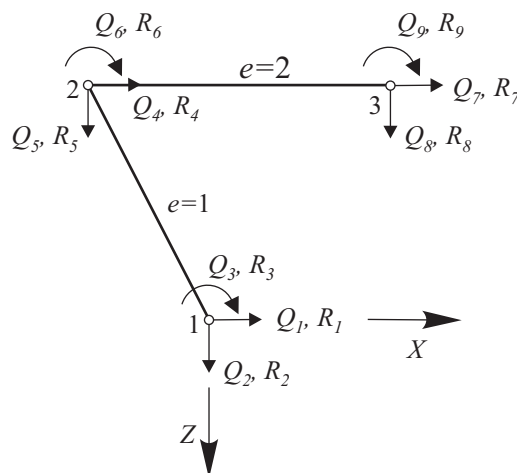
$$\mathbf{K}_b^e = \frac{E^e I^e}{(l^e)^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12cs & -6sl & -12s^2 & 12cs & -6sl \\ -12cs & 12c^2 & 6cl & 12cs & -12c^2 & 6cl \\ -6sl & 6cl & 4l^2 & 6sl & -6cl & 2l^2 \\ -12s^2 & 12cs & 6sl & 12s^2 & -12cs & 6sl \\ 12cs & -12c^2 & -6cl & -12cs & 12c^2 & -6cl \\ -6sl & 6cl & 2l^2 & 6sl & -6cl & 4l^2 \end{bmatrix}^e \quad (6.98)$$

**Przykład 6.7.** Rozważmy ramę pokazaną na rys. 6.24a. Jest ona obciążona obciążeniem statycznym oraz geometrycznym, którym jest obrót podpory A o kąt  $5^\circ = 0.087$  rad. W obliczeniach pominiemy ciężar własny ramy.

a)



b)



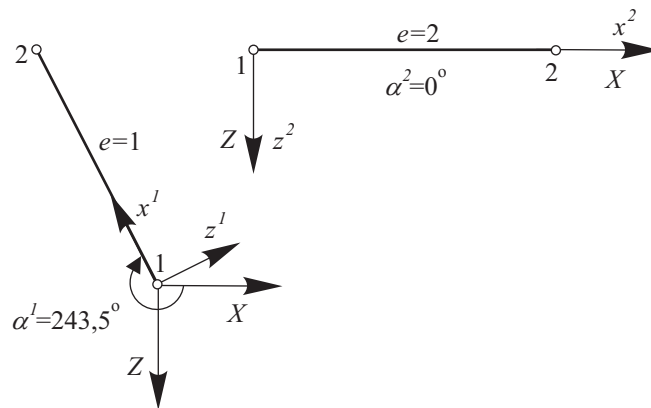
Rys.6.24. a) rama, b) model skończenie elementowy

**1. Dyskretyzacja MES.** Rama jest zdyskretyzowana dwoma elementami ramowymi. Na rys. 6.24b opisano numery węzłów i elementów oraz zdefiniowano uogólnione globalne stopnie swobody  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , wraz z siłami węzłowymi i globalny układ współrzędnych  $(X, Z)$ . Tablicę topologii pokazano w tab. 6.4.

Numer elementu skończonego	Numer węzła początkowego	Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3

Tabela 6.4. Tablica topologii ramy

Kąty transformacji dla elementów wyznaczono zgodnie z rys. 6.25 (oś  $X$  jest osią pierwszą).



Rys.6.25. Kąty transformacji dla elementów skończonych

## 2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

**Element 1**  $\alpha^1=243,5^\circ$ ,  $l^1=4,472$  m

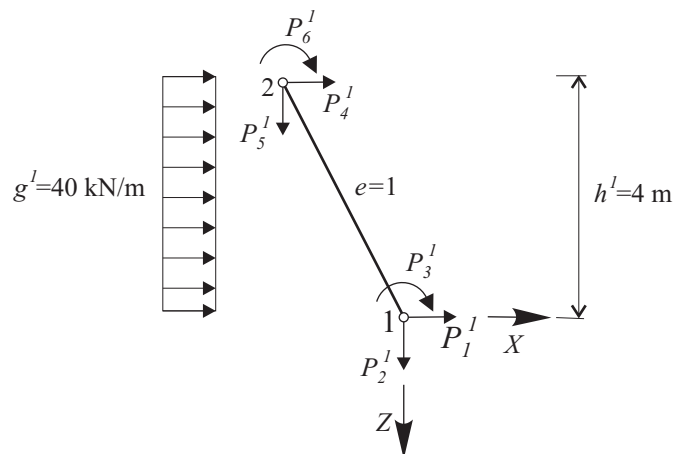
Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^1 = (\mathbf{T}^1)^T \mathbf{k}^1 \mathbf{T}^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 6,7216 & 13,4097 & 0,0335 & -6,7216 & -13,4097 & 0,0335 \\ 13,4097 & 26,8362 & -0,0168 & -13,4097 & -26,8362 & -0,0168 \\ 0,0335 & -0,0167 & 0,1118 & -0,0335 & 0,0168 & 0,0559 \\ -6,7216 & -13,4097 & -0,0335 & 6,7216 & 13,4097 & -0,0335 \\ -13,4097 & -26,8362 & 0,0168 & 13,4097 & 26,8362 & 0,0168 \\ 0,0335 & -0,0168 & 0,0559 & -0,0335 & 0,0168 & 0,1118 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Wektor sił węzłowych

Wykorzystamy w obliczeniach, że obciążenie  $g$  w elemencie jest obciążeniem ciągłym na metr długości rzutu elementu 1 na oś globalną  $Z$ . W ten sposób możemy od razu napisać wektor sił węzłowych w globalnym układzie współrzędnych, rys. 6.26.



Rys.6.26. Wektor równoważników obciążenia  $\mathbf{P}^{1b}$

$$\mathbf{P}^{1b} = \begin{bmatrix} \frac{gh}{2} \\ 0 \\ \frac{gh^2}{12} \\ \frac{gh}{2} \\ 0 \\ -\frac{gh^2}{12} \end{bmatrix}^{1b} = \begin{bmatrix} 80,0000 \\ 0,0000 \\ 53,3333 \\ 80,0000 \\ 0,0000 \\ -53,3333 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{R}^{1b} = [R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1 \ R_5^1 \ R_6^1]^T$$

**Element 2**  $\alpha=0^\circ$ ,  $l^2=5,0$  m

Macierz sztywności

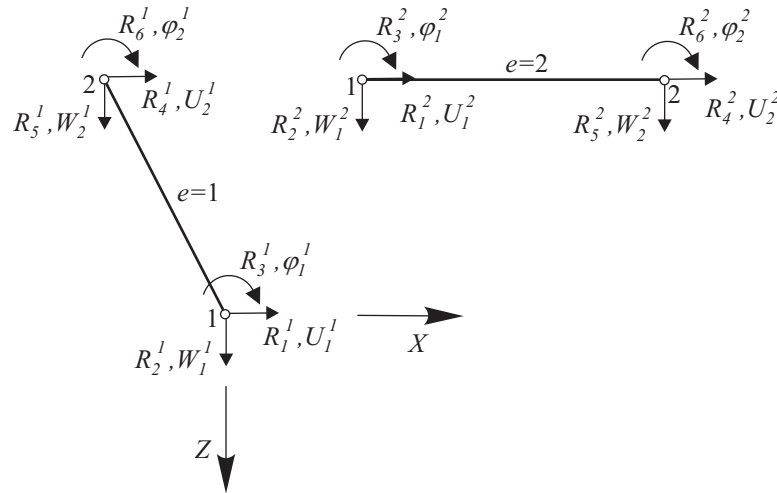
$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{k}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 30,0000 & 0 & 0 & -30,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0120 & 0,0300 & 0 & -0,0120 & 0,0300 \\ 0 & 0,0300 & 0,1000 & 0 & -0,0300 & 0,0500 \\ -30,0000 & 0 & 0 & 30,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0120 & -0,0300 & 0 & 0,0120 & -0,0300 \\ 0 & 0,0300 & 0,0500 & 0 & -0,0300 & 0,1000 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Wektor sił węzłowych  $\mathbf{P}^{2b} = \mathbf{0}$  oraz

$$\mathbf{R}^{2b} = [R_1^2 \ R_2^2 \ R_3^2 \ R_4^2 \ R_5^2 \ R_6^2]^T$$

**3. Agregacja i budowa równań MES.** Globalny układ równań MES budujemy, wykorzystując tablicę topologii oraz warunki ciągłości przemieszczeń uogólnionych w węzłach (rys. 6.27)



Rys.6.27. Siły węzłowe i przemieszczenia uogólnione dla elementów w globalnym układzie współrzędnych

$$\begin{array}{lll}
U_1^1 = Q_1 & U_2^1 = U_1^2 = Q_4 & U_2^2 = Q_7 \\
W_1^1 = Q_2 & W_2^1 = W_1^2 = Q_5 & W_2^2 = Q_8 \\
\varphi_1^1 = Q_3 & \varphi_2^1 = \varphi_1^2 = Q_6 & \varphi_2^2 = Q_9
\end{array}$$

gdzie  $U_i^e$ ,  $W_i^e$ ,  $e, i = 1, 2$  są przemieszczeniami elementów w globalnym układzie współrzędnych, a  $\varphi_i^e$  kątami ugięcia. W rezultacie otrzymamy układ równań w postaci (6.99) (s. 191).

**4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach.** Kinematyczne warunki brzegowe są niejednorodne i mają postać

$$\begin{array}{l}
Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = 0 \\
Q_3 = 0,087
\end{array} \quad (6.100)$$

Warunki statyczne są równaniami równowagi sił w węzłach ramy o postaci

$$\begin{array}{lll}
R_1^1 = R_1 & R_4^1 + R_1^2 = R_4 & R_4^2 = R_7 \\
R_2^1 = R_2 & R_5^1 + R_2^2 = R_5 = 0 & R_5^2 = R_8 \\
R_3^1 = R_3 & R_6^1 + R_3^2 = R_6 = 80 & R_6^2 = R_9
\end{array} \quad (6.101)$$

gdzie  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_7$ ,  $R_8$  i  $R_9$  są reakcjami podpór.

Podstawiając (6.100) i (6.101) do (6.99) otrzymamy końcowy układ równań w formie (6.102) (s. 192). Jest to układ dziewięciu równań z dwiema niewiadomymi pierwotnymi  $Q_5$  i  $Q_6$  oraz siedmioma niewiadomymi wtórnymi (reakcjami). Niewiadome pierwotne obliczymy rozwiązując piąte i szóste równanie (6.102)

$$10^3 \begin{bmatrix} 26,8480 & 0,0468 \\ 0,0468 & 0,02118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0870 \cdot 0,0168 \cdot 10^3 \\ 26,6667 - 0,0870 \cdot 0,0559 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymamy

$$\mathbf{Q} = \{0 \ 0 \ 0,0870 \ 0 \ -0,2338 \cdot 10^{-3} \ 0,1030 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (6.103)$$

Pozostałe równania w (6.102) wykorzystujemy do obliczenia reakcji

$$\begin{aligned}
R_1 &= -80,0000 + 0,0335 \cdot 10^3 \cdot 0,0870 - 13,4100 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} \\
&\quad + 0,0335 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = -70,4930 \text{ kN}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= -0,0168 \cdot 10^3 \cdot 0,0870 - 26,8360 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} \\
&\quad - 0,0168 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = 3,0870 \text{ kN}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^3 \cdot \begin{bmatrix} 6.7216 & 13.4097 & 0.0335 & -6.7216 & -13.4097 & 0.0335 & 0 & 0 & 0 \\ 13.4097 & 26.8362 & -0.0168 & -13.4097 & -26.8362 & -0.0168 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.1118 & -0.0335 & 0.0168 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7216 & -13.4097 & -0.0335 & 36.7216 & 13.4097 & -0.0335 & -30.0000 & 0 & 0 \\ -13.4097 & -26.8362 & 0.0168 & 13.4097 & 26.8482 & 0.0468 & 0 & -0.0120 & 0.0300 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.0559 & -0.0335 & 0.0468 & 0.2118 & 0 & -0.0300 & 0.0500 \\ 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 & 0 & 30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0120 & -0.0300 & 0 & 0.0120 & -0.0300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0300 & 0.0500 & 0 & -0.0300 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} 80.0000 \\ 0 \\ 53.3333 \\ 80.0000 \\ 0 \\ -53.3333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_4^1 + R_1^2 \\ R_5^1 + R_2^2 \\ R_6^1 + R_3^2 \\ R_4^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{bmatrix} \quad (6.99)
\end{aligned}$$

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 6.7216 & 13.4097 & 0.0335 & -6.7216 & -13.4097 & 0.0335 & 0 & 0 & 0 \\ 13.4097 & 26.8362 & -0.0168 & -13.4097 & -26.8362 & -0.0168 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.1118 & -0.0335 & 0.0168 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7216 & -13.4097 & -0.0335 & 36.7216 & 13.4097 & -0.0335 & -30.0000 & 0 & 0 \\ -13.4097 & -26.8362 & 0.0168 & 13.4097 & 26.8482 & 0.0468 & 0 & -0.0120 & 0.0300 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.0559 & -0.0335 & 0.0468 & 0.2118 & 0 & -0.0300 & 0.0500 \\ 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 & 0 & 30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0120 & -0.0300 & 0 & 0.0120 & -0.0300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0300 & 0.0500 & 0 & -0.0300 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0870 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 80.0000 + R_1 \\ R_2 \\ 53.3333 + R_3 \\ 80.0000 + R_4 \\ 0 \\ 26.6667 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} \quad (6.102)$$



$$R_3 = -53,3333 + 0,1118 \cdot 10^3 \cdot 0,0870 + 0,0168 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} \\ + 0,0559 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = -37,8530 \text{ kNm}$$

$$R_4 = -80,0000 - 0,0335 \cdot 10^3 \cdot 0,0870 + 13,4100 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} \\ - 0,0335 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = -89,5070 \text{ kN}$$

$$R_7 = 0$$

$$R_8 = -0,0120 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} - 0,0300 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = -3,087 \text{ kN}$$

$$R_9 = 0,0300 \cdot 10^3 \cdot -0,2338 \cdot 10^{-3} + 0,0500 \cdot 10^3 \cdot 0,1030 = 5,1426 \text{ kNm}$$

**5. Obliczenie wektorów sił przywęzłowych w elementach.** Siły przywęzłowe możemy obliczyć z równania równowagi elementów skończonych w lokalnych układach współrzędnych. Dla celów dydaktycznych (nie do końca zgodnie z algorytmem MES) najpierw obliczymy siły przywęzłowe w układzie współrzędnych globalnych, a następnie dopiero otrzymane wektory sił przetransformujemy do układów lokalnych. W analizie statycznej konstrukcji prętowych jest to nieraz postępowanie dogodniejsze.

**Element 1** (rys. 6.28)

Wektor stopni swobody elementu w układzie współrzędnych globalnych

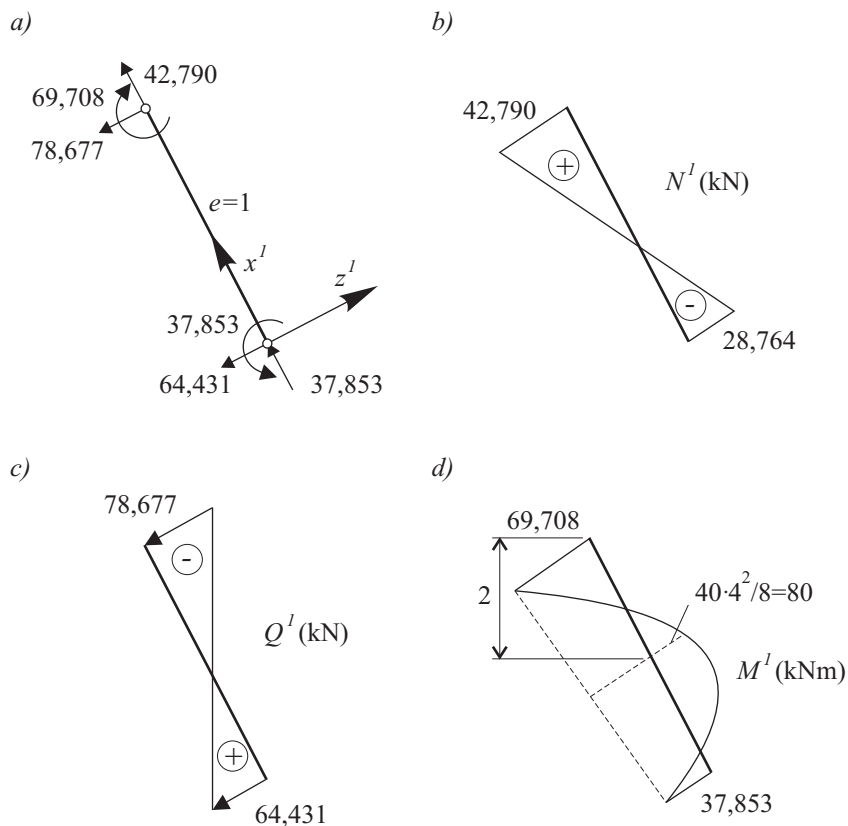
$$Q^1 = [0 \ 0 \ 0,0870 \ 0 \ -0,2338 \cdot 10^{-3} \ 0,1030]^T$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych globalnych:

$$R^{1b} = K^1 Q^1 - P^{1b} = \begin{bmatrix} -70,493 \\ 3,087 \\ -37,853 \\ -89,507 \\ -3,087 \\ 69,708 \end{bmatrix}$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych lokalnych:

$$r^{1b} = T^1 R^{1b} = [28,764 \ -64,431 \ -37,853 \ 42,790 \ -78,677 \ 69,708]^T$$



Rys.6.28. a) siły przywęzłowe dla elementu 1, b) c) wykresy sił podłużnych i poprzecznych, d) wykres momentu zginającego

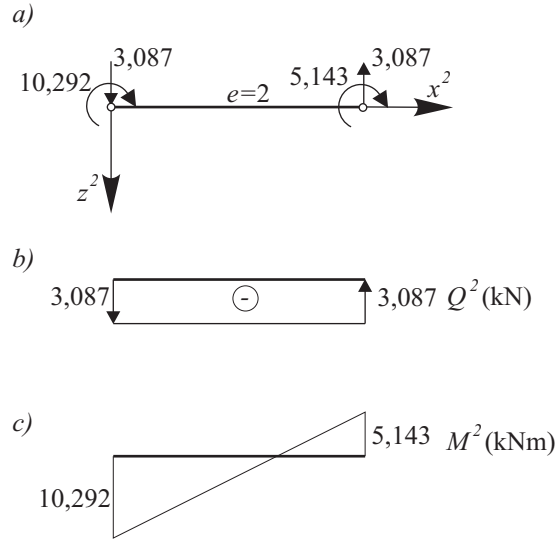
### Element 2 (rys. 6.29)

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = [0 \quad -0,2338 \cdot 10^{-3} \quad 0,1030 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Wektor sił przywęzłowych ( $\mathbf{q}^2 = \mathbf{Q}^2$ )

$$\mathbf{r}^{2b} = \mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2 = [0 \quad 3,087 \quad 10,292 \quad 0 \quad -3,087 \quad 5,143]^T$$



Rys.6.29. a) siły przywęzłowe dla elementu 2, b) wykres siły poprzecznej, c) wykres momentu zginającego

## 6.5. Model skończenie elementowy dla problemu ustalonego przepływu ciepła w obszarze dwuwymiarowym

W tym punkcie przedstawimy zastosowanie MES do rozwiązania problemu przepływu ciepła. Przyjmujemy, że ciepło przepływa przez obszar dwuwymiarowy na płaszczyźnie  $(x, y)$ . W p. 2.3 sformułowaliśmy odpowiednie równania modelu matematycznego dla ustalonego przepływu ciepła. Rozważymy prosty przypadek materiału jednorodnego i izotropowego ( $tk = const$ ) co sprowadza problem do równania Poissona (2.29) z odpowiednimi warunkami brzegowymi

$$-\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{d^2T}{dy^2} = \frac{Q}{k} \quad \text{w } \Omega \quad (6.104a)$$

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h \quad \text{na brzegu } \Gamma_h \quad (6.104b)$$

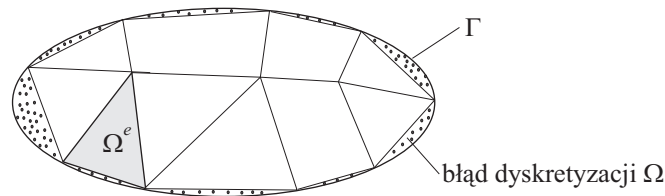
$$T = g \quad \text{na brzegu } \Gamma_g \quad (6.104c)$$

gdzie, przypomnijmy,  $T(x, y)$  jest funkcją temperatury,  $Q$  jest intensywnością generacji ciepła wewnątrz ciała (źródła ciepła) [ $\text{J}/\text{m}^2\text{s}$ ],  $k$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego materiału [ $\text{J}/^\circ\text{C ms}$ ],  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia przepływu ciepła o składowych mających wymiar [ $\text{J}/\text{m}^2\text{s}$ ],  $q_n$  jest przepływem, a  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do brzegu  $\Gamma$ . Na brzegu  $\Gamma_h$  dane jest  $q_n$  (naturalny warunek brzegowy), natomiast na brzegu  $\Gamma_g$  dane jest  $T$  (podstawowy warunek brzegowy).

Równanie MES sformułujemy, przyjmując model skończenie elementowy w słabym sformułowaniu wariacyjnym. Od strony wykorzystania procedury MES problem jest łatwy do rozwiązania, bo co prawda obszar rozwiązania jest dwuwymiarowy, ale niewiadomą pierwotną jest tylko jedna funkcja  $T(x, y)$ , czyli, jak mówimy, nieznanne jest pole skalarne w obszarze  $\Omega$ .

### 6.5.1. Dyskretyzacja obszaru

Obszar dwuwymiarowy może być zdyskretyzowany elementami trójkątnymi i/lub elementami czworobocznymi tak, aby możliwie najlepiej opisać obszar  $\Omega$ , rys. 6.30.



Rys.6.30. Dyskretyzacja obszaru  $\Omega$  elementami trójkątnymi i czworobocznymi

W dalszym ciągu założymy, że obszar  $\Omega$  został w całości zdyskretyzowany elementami trójkątnymi  $\bar{\Omega}^e$ .

### 6.5.2. Wyznaczenie równań MES dla elementu skończonego

Rozważmy typowy element skończony  $\bar{\Omega}^e$ , nie określając na razie bliżej jego geometrii.

**a. Sformułowanie wariacyjne.** Zgodnie z procedurą opisaną w p. 5.5.1, mnożymy równanie (6.104a) przez funkcję wagową  $v^e$ , następnie całkujemy po obszarze  $\bar{\Omega}^e$  i w końcu korzystamy z twierdzenia Greena-Gaussa (2.22) dla

## 6.5. Model skończenie elementowy dla ustalonego przepływu ciepła 197

uogólnionego całkowania przez części, otrzymując równanie w formie

$$0 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v^e}{\partial x} \frac{\partial T^e}{\partial x} k^e + \frac{\partial v^e}{\partial y} \frac{\partial T^e}{\partial y} k^e - v^e Q^e \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} v^e \left( n_x^e k^e \frac{\partial T^e}{\partial x} + n_y^e k^e \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) ds \quad (6.105)$$

gdzie  $n_x^e$  i  $n_y^e$  są współrzędnymi (cosinusami kierunkowymi) wektora  $\mathbf{n}^e$

$$\mathbf{n}^e = n_x^e \mathbf{i} + n_y^e \mathbf{j} = \cos \alpha^e \mathbf{i} + \sin \alpha^e \mathbf{j} \quad (6.106)$$

Wykorzystując oznaczenia wprowadzone w p. 2.3, równanie wariacyjne (6.105) możemy zapisać w formie macierzowej jako

$$\int_{\Omega^e} (\nabla v^e)^T k^e \nabla T^e dx dy = \int_{\Omega^e} v^e Q^e dx dy - \int_{\Gamma^e} v^e q_n^e ds \quad (6.107)$$

**b. Aproxymacja MES.** Przyjmijmy, że obszar  $\bar{\Omega}^e$  jest 3-węzłowym elementem trójkątnym, rys. 6.31, w którym  $u^e$  i  $v^e$  są aproksymowane wzorami

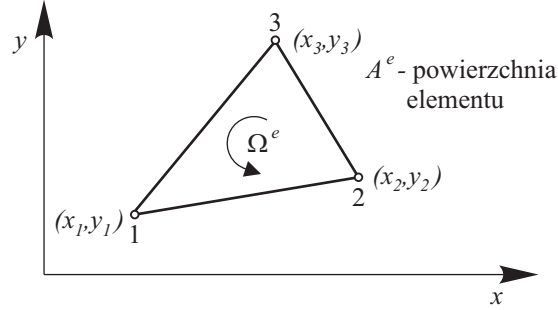
$$\begin{aligned} u^e &= \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{T}^e \\ v^e &= \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{c}^e \end{aligned} \quad (6.108)$$

gdzie:

$\mathbf{T}^e = [T_1^e \ T_2^e \ T_3^e]^T$  – wektor stopni swobody elementu skończonego (wartości temperatury w węzłach),

$\mathbf{c}^e$  – wektor parametrów aproksymacji funkcji wagowej,

$\mathbf{N}_1^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]$  – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.



Rys.6.31. Liniowy element trójkątny

Funkcje kształtu  $N_i^e(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , zdefiniowane są wzorami (4.33), które przepiszemy z dodatkowymi oznaczeniami

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (6.109)$$

$$\alpha_i^e = x_j y_k - x_k y_j \quad \beta_i^e = y_j - y_k \quad \gamma_i^e = x_k - x_j$$

$$i \neq j \neq k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

gdzie  $A^e$  jest powierzchnią trójkąta.

Wektory gradientów obliczymy ze wzorów

$$\nabla T^e = \nabla(\mathbf{N}^e T^e) = \nabla \mathbf{N}^e T^e = \mathbf{B}^e T^e \quad (6.110)$$

$$\nabla v^e = \nabla(\mathbf{N}^e \mathbf{c}^e) = \nabla \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{c}^e$$

gdzie zdefiniowano macierz zróżniczkowanych funkcji kształtu  $\mathbf{B}^e$  w postaci

$$\mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}^e \quad (6.111)$$

Wykorzystanie (6.108) i (6.110) w (6.107) prowadzi do równania MES dla elementu skończonego w formie

$$\mathbf{K}^e T^e = \mathbf{F}^e \quad (6.112)$$

gdzie zdefiniowano macierz i wektory dla elementu

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T k^e \mathbf{B}^e dx dy = k^e A^e (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e \quad (6.113a)$$

## 6.5. Model skończenie elementowy dla ustalonego przepływu ciepła 199

lub w zapisie wskaźnikowym

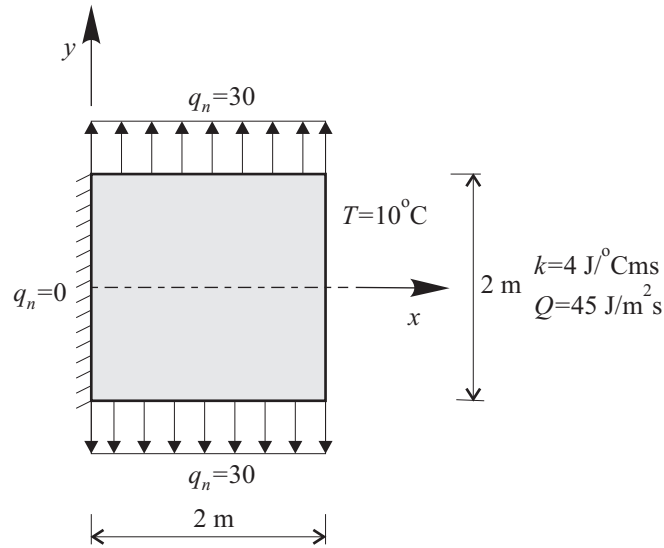
$$K_{ij}^e = \frac{k^e}{4A^e} (\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.113b)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T Q^e dx dy \quad \mathbf{P}^{eb} = - \oint_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^T q_n^e ds \quad (6.113c)$$

oraz  $\mathbf{F}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{P}^{eb}$ .

Dalsze postępowanie jest już typowe dla metody elementów skończonych. Podsumujmy, że w problemie ustalonego przepływu ciepła niewiadomą pierwotną jest temperatura  $T$ , a niewiadomą wtórną intensywność strumienia przepływu ciepła  $q_n$ , przepływającego przez jednostkę powierzchni brzegu.

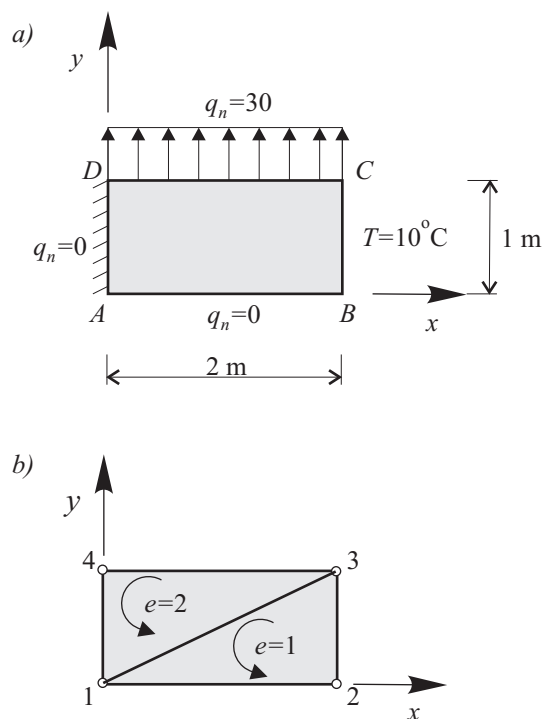
**Przykład 6.8.** Wyznamy rozkład temperatury dla tarczy pokazanej na rys. 6.32 [9]. Jest ona wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego, dla



Rys.6.32. Tarcza z przepływem ciepła

którego  $k = 4 \text{ J}/^\circ\text{Cms}$ . Grubość tarczy  $t = 1$  m. Intensywność generacji ciepła  $Q = 45 \text{ J}/\text{m}^2 \text{ s}$ . Na brzegu  $x = 2$  m zadany jest podstawowy warunek brzegowy  $T = 10^\circ\text{C}$ , natomiast naturalny warunek brzegowy  $q_n = 30 \text{ J}/\text{m}^2 \text{ s}$  jest określony na brzegach  $y = 1$  m i  $y = -1$  m oraz  $q_n = 0$  jest na brzegu  $x = 0$ .

Uwzględniając symetrię tarczy względem osi  $x$  rozpatrzmy jej połowę pokazaną na rys. 6.33a.



Rys.6.33. a) rozwiązywana tarcza, b) dyskretyzacja skończenie elementowa

Tarczę z rys. 6.33a zdyskretyzowano dwoma liniowymi elementami trójkątnymi, rys. 6.33b. Macierz topologii została podana w tab. 6.5.

Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	1 3 4

Tabela 6.5. Macierz topologii dla przykładu 6.8



## 6.5. Model skończenie elementowy dla ustalonego przepływu ciepła 201

### 1. Macierze $K^e$ dla elementów

Macierze  $K^e$  dla elementów obliczymy, korzystając ze wzoru (6.113a) (przyjmując, że  $a = k$ ).

**Element 1:**  $i = 1, j = 2, k = 3, A^1 = 1, x_i = y_i = 0, x_j = 2, y_j = 0, x_k = 2, y_k = 1$

Macierz  $B^1$  obliczona wg (6.111) wynosi

$$B^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

stąd po podstawieniu do (6.113a) dostaniemy

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

**Element 2:**  $i = 1, j = 2, k = 3, A^2 = 1, x_i = y_i = 0, x_j = 2, y_j = 1, x_k = 0, y_k = 1$

Podobnie jak w elemencie 1 mamy

$$B^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

oraz

$$K^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

### 2. Wektor $F^e$ dla elementów

Z pierwszego wzoru (6.113c) dla  $f^e$  otrzymamy

$$f^1 = f^2 = \frac{Q}{3} A^e [1 \ 1 \ 1]^T = 15 [1 \ 1 \ 1]^T$$

Wektor  $P^e$  obliczymy z drugiego wzoru (6.113c) odpowiednio dla brzegu B-C elementu 1 i dla brzegu C-D elementu 2:

**Element 1**

$$\mathbf{P}_{B-C}^{1b} = - \int_0^1 q_n \begin{bmatrix} 0 \\ N_2^1(x=2, y) \\ N_3^1(x=2, y) \end{bmatrix} dy$$

**Element 2**

$$\mathbf{P}_{C-D}^{2b} = - \int_0^2 30 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x}{2} \\ 1 - \frac{x}{2} \end{bmatrix} dx = - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Dodając wektory  $\mathbf{f}^e$  i  $\mathbf{P}^e$  otrzymamy wektory  $\mathbf{F}^e$  w formie

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 + P_2^{1b} \\ 15 + P_3^{1b} \end{bmatrix}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia  $P_2^{1b} = \int_0^1 q_n N_2^1(x=2, y) dy$  i  $P_3^{1b} = \int_0^1 q_n N_3^1(x=2, y) dy$

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 - 30 \\ 15 - 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

**3. Agregacja i budowa równań MES**

Na podstawie macierzy topologii budujemy macierze globalne  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}$  otrzymując układ równań

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 + P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \\ -15 \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

**4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych**

Wprowadzając podstawowe warunki brzegowe  $T_2 = 10$  i  $T_3 = 10$  do (6.116) otrzymamy układ czterech równań z dwiema niewiadomymi podstawowymi i dwiema niewiadomymi wtórnymi

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 10 \\ 10 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 + P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \\ -15 \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

Z pierwszego i czwartego równania dostaniemy

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 30 \\ 10 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -5 \end{bmatrix}$$

z rozwiązaniem

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

Niewiadome wtórne w postaci całkowej obliczymy z równania drugiego i trzeciego, otrzymując

$$P_2^{1b} = -25 \quad P_3^{1b} = -5$$

Funkcje kształtu  $N_2^1$  i  $N_3^1$  są dodatnie, co oznacza, że  $q_n$  jest dodatnie wzdłuż brzegu B-C, tzn. aby na brzegu B-C utrzymana została temperatura  $T=10 \text{ } ^\circ\text{C}$ , to wzdłuż tego brzegu ciepło musi być wydzielane. Równanie bilansu cieplnego jest spełnione, ponieważ  $\sum_{i=1}^4 F_i = 0$ .

### 5. Obliczenie wektora intensywności strumienia przepływu ciepła w elementach

Wektor intensywności strumienia przepływu ciepła w elemencie obliczymy według wzoru

$$\mathbf{q}^e = -\mathbf{D}^e \nabla T^e = -k^e \nabla T^e = -k^e \mathbf{B}^e \mathbf{T}^e \quad (6.118)$$

#### Element 1

$$\mathbf{T}^1 = [20 \ 10 \ 10]^T$$

Wykorzystując (6.114) mamy

$$\mathbf{q}^1 = -2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

**Element 2**

$$\mathbf{T}^2 = [20 \ 10 \ 15]^T$$

Korzystając z (6.115) otrzymamy

$$\mathbf{q}^2 = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

**6.6. Liniowy problem teorii sprężystości (LPTS)****6.6.1. Podstawowy układ równań LPTS**

Liniowy problem teorii sprężystości jest jednym z podstawowych zagadnień w mechanice ciała stałego. W poprzednich punktach tego rozdziału, analizując kratownice, belki i ramy płaskie, wyprowadziliśmy równania równowagi MES interpretując w kategoriach mechaniki odpowiednie problemy brzegowe. Równania LPTS są sformułowaniem ogólnym i oczywiście te problemy brzegowe mogą być z nich wyprowadzone jako przypadki szczególne, na ogół wprowadzając dodatkowe założenia. Metodę postępowania w bardziej złożonych przypadkach pokażemy na przykładzie analizy statycznej tarczy, opisanej równaniami płaskiego stanu naprężenia. Trudność zadania wzrasta, ponieważ obszar rozwiązania jest dwuwymiarowy i niewiadomymi pierwotnymi są dwie funkcje przemieszczeń, czyli nieznane jest pole wektorowe.

W dalszym ciągu tego punktu najpierw wypiszemy wszystkie równania LPTS, w zapisie wskaźnikowym i macierzowym, a następnie sformułujemy dwie metody jego rozwiązania. Pozwoli nam to w końcu skoncentrować uwagę na zastosowaniu metody elementów skończonych do analizy tarczy.

**a. Równania geometryczne Cauchy'ego.** Równania te

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z \quad (6.119a)$$

z podstawowymi (kinematycznymi) warunkami brzegowymi

$$u_i(x, y, z) = u_i^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u \quad (6.119b)$$

w zapisie macierzowym mają postać

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (6.120a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_u \quad (6.120b)$$

W powyższych równaniach występują wektory i macierz:

$\mathbf{u} = [u_x \equiv u(x, y, z), u_y \equiv v(x, y, z), u_z \equiv w(x, y, z)]^T$  – wektor funkcji przemieszczeń

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$  – wektor odkształceń ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – odkształcenia liniowe;  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – kąty odkształcenia postaciowego)

$\mathbf{L}$  – macierz operatorów różniczkowych

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

**b. Równania równowagi Naviera.** Jest to układ równań

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{w objętości ciała } V \quad (6.122a)$$

z naturalnymi (statycznymi) warunkami brzegowymi

$$\sigma_{ij}n_j = t_i^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma \quad (6.122b)$$

gdzie:

$$S = S_u \cup S_\sigma \text{ i } S_u \cap S_\sigma = 0,$$

$S$  – powierzchnia ograniczająca  $V$ ,

$n_x, n_y, n_z$  – współrzędne wektora normalnego do części powierzchni ciała  $S_\sigma$ .

Zapis macierzowy tych równań ma postać

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{w objętości ciała } V \quad (6.123a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^o \quad \text{na części powierzchni ciała } S_\sigma \quad (6.123b)$$

W powyższych wzorach zdefiniowane są wektory

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]^T$  – wektor naprężeń ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – naprężenia normalne,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – naprężenia styczne)

$\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$  – wektor intensywności sił objętościowych

$\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$  – wektor intensywności sił powierzchniowych

**c. Równania fizyczne Hooke'a.** Równania fizyczne Hooke'a dla materiału liniowo-sprężystego mają postać

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6.124a)$$

gdzie:

$G$  – moduł Kirchhoffa,

$\nu$  – liczba Poissona,

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ,

$\delta_{ij}$  – delta Kroneckera.

W zapisie macierzowym równanie to ma formę

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.124b)$$

gdzie:

$\mathbf{D}$  – macierz modułów sprężystości (nazywana też macierzą konstytutywną lub macierzą sztywności materiału).

### 6.6.2. Rozwiązanie LPTS - sformułowanie wariacyjne i minimalizacja energii

**1. Sformułowanie wariacyjne.** Sformułowanie wariacyjne otrzymamy, korzystając z metody residuów ważonych

$$\int_V v_i \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) dv = 0 \quad i, j = x, y, z \quad (6.125)$$

dla  $v_i \in S^h \subset H^1(V)$  z warunkiem, że  $v_i = 0$  na części powierzchni ciała  $S_u$ . Podstawiając do (6.125) wzór

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

otrzymamy równanie

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} dv - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv + \int_V v_i f_i dv = 0 \quad (6.126)$$

Dalsze postępowanie wymaga skorzystania z twierdzenia Gaussa o dywergencji (2.18)

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} dv = \int_S \sigma_{ij} v_i n_j ds = \int_{S_u} (\sigma_{ij} n_j) v_i ds + \int_{S_\sigma} t_i^o v_i ds \quad (6.127)$$

Podstawiając (6.127) do (6.126) z warunkiem  $v_i = 0$  na  $S_u$ , otrzymamy końcową postać sformułowania wariacyjnego

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv = \int_V f_i v_i dv + \int_{S_\sigma} t_i^o v_i ds \quad (6.128a)$$

które po pewnych przekształceniach przyjmuje w zapisie macierzowym formę

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dv = \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{f} dv + \int_{S_\sigma} \mathbf{v}^T \mathbf{t}^o ds \quad (6.128b)$$

gdzie wyraźnie zaznaczono zależność  $\boldsymbol{\varepsilon}$  od funkcji wagowych zawartych w wektorze  $\mathbf{v}$  i zależność  $\boldsymbol{\sigma}$  od nieznanego pola rzeczywistych przemieszczeń  $\mathbf{u}$ .

Problem liniowej teorii sprężystości można teraz sformułować w następujący sposób:

Należy wyznaczyć przemieszczenia  $u_i$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i naprężenia  $\sigma_{ij}$  jako wystarczająco gładkie funkcje  $x, y, z$ , spełniające równania (6.119a) i (6.124a), warunki brzegowe (6.119b) i równanie wariacyjne (6.128) dla wszystkich funkcji wagowych  $v_i$  z własnością, że  $v_i = 0$  na części powierzchni ciała  $S_u$ .

**2. Minimalizacja funkcjonału energii.** Problem brzegowy sformułowany w p. 6.6.1 przez układ równań (6.119a) do (6.124b) jest samosprzężony i może być sformułowany w sposób równoważny w postaci minimalizacji funkcjonału energii potencjalnej. Dla uwzględnienia niejednorodnych podstawowych warunków brzegowych (oraz, jak się okaże, obliczenia niewiadomych wtórnych) napiszemy funkcjonał energii potencjalnej w rozszerzonej postaci

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dv - \int_V f_i u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i^o u_i ds - \int_{S_u} t_i u_i ds \quad (6.129)$$

gdzie niewiadomymi pierwotnymi są funkcje przemieszczeń  $u_i$ , a niewiadomymi wtórnymi funkcje obciążenia powierzchniowego  $t_i$ ,  $i = x, y, z$ . Funkcjonał energii w formie (6.129) jest zmodyfikowaną postacią tzw. drugiej rozszerzonej formy funkcjonału całkowitej energii potencjalnej. Modyfikacja polega na włączeniu do (6.129) pracy nieznanymi sił powierzchniowych  $t_i$  na znanych przemieszczeniach  $u_i$ , z tym, że warunek  $u_i = u_i^0$  na  $S_u$  nie jest bezpośrednio wprowadzony do funkcjonału.

Problem liniowej teorii sprężystości ma teraz następujące sformułowanie:

Należy wyznaczyć przemieszczenia  $u_i$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i naprężenia  $\sigma_{ij}$  jako wystarczająco gładkie funkcje  $x, y, z$ , spełniające równania (6.119a) i (6.124a), warunki brzegowe (6.119b) i minimalizujące funkcjonał całkowitej energii potencjalnej (6.129).

### 6.6.3. Model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza dla płaskiego stanu naprężenia/odkształcenia

Stan dwuwymiarowy na płaszczyźnie  $(x, y)$  jest zdefiniowany przez funkcje przemieszczeń  $u \equiv u_x(x, y)$  i  $v \equiv u_y(x, y)$  oraz warunki

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6.130)$$



W płaskim stanie naprężenia  $\sigma_z = 0$  i wektory naprężeń i odkształceń mają postać

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T\end{aligned}\quad (6.131)$$

W płaskim stanie odkształcenia  $\varepsilon_z = 0$  i wektory naprężeń i odkształceń można przyjąć w formie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \sigma_z]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \varepsilon_z]^T\end{aligned}\quad (6.132)$$

Macierze operatorów różniczkowych redukują się do postaci

- dla płaskiego stanu naprężenia

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\quad (6.133)$$

- dla płaskiego stanu odkształcenia

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}\quad (6.134)$$

Macierze modułów sprężystości są natomiast

- dla płaskiego stanu naprężenia

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\quad (6.135)$$

- dla płaskiego stanu odkształcenia

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\quad (6.136)$$

W końcu, wektory intensywności sił objętościowych i sił brzegowych mają formę

$$\mathbf{f} = [f_x \ f_y]^T \quad \mathbf{t} = [t_x \ t_y]^T \quad (6.137)$$

W dalszym ciągu sformułujemy równania MES dla problemu płaskiego stanu naprężenia. Możemy w tym celu skorzystać z równania słabego sformułowania wariacyjnego (6.128) lub z warunku minimalizacji funkcjonału energii potencjalnej (6.129). Z powodów dydaktycznych wykorzystamy (6.129) do zbudowania modelu skończenie elementowego Rayleigha-Ritza. W modelu tym za niewiadome pierwotne przyjmujemy przemieszczenia – taka wersja metody elementów skończonych jest w mechanice nazywana *metodą elementów skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym*. Możliwe są również i inne sformułowania, w których na przykład niewiadomymi pierwotnymi są przemieszczenia i naprężenia (mieszany model MES).

Obszar rozwiązania  $A$  dzielimy na zbiór elementów skończonych  $\{A^e\}$  i przedstawiamy całkowitą energię potencjalną w postaci sumy energii potencjalnej elementów  $\Phi^e$ , co w zapisie macierzowym ma formę

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{e=1}^E & \left[ \frac{1}{2} \int_{A^e} (\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}^e))^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}^e) h^e dx dy - \int_{A^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e h^e dx dy + \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{t}_o^e dx dy - \int_{\Gamma_u^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{t}^e dx dy \right] \end{aligned} \quad (6.138)$$

gdzie  $A^e, h^e$  są powierzchnią i grubością elementu skończonego oraz wykorzystano równanie fizyczne  $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e$ .

**1. Wyznaczenie równań MES dla elementów.** Przyjmujemy, że  $u_i^e \in C^1(A^e)$ ,  $i = x, y$ , jest aproksymowane wzorem

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{Q}^e \quad (6.139)$$

gdzie:

$\mathbf{Q}^e = [Q_1^e \ Q_2^e \ \dots \ Q_n^e]^T$  – wektor stopni swobody (nieznanych parametrów węzłowych elementu),

$\mathbf{N}^e(x, y)$  – macierz funkcji kształtu o wymiarze  $(2 \cdot n)$ ,

$n$  – liczba stopni swobody elementu.

Równanie geometryczne (6.120a) po wykorzystaniu (6.139) przyjmie postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L}\mathbf{u}^e = \mathbf{L}\mathbf{N}^e\mathbf{Q}^e = \mathbf{B}^e\mathbf{Q}^e \quad (6.140)$$

gdzie, jak już wcześniej definiowaliśmy,  $\mathbf{B}^e = \mathbf{L}\mathbf{N}^e$  jest macierzą różniczkowanych funkcji kształtu.

Podstawiając (6.139) i (6.140) do funkcjonału  $\Phi^e$  otrzymamy

$$\begin{aligned} \Phi^e &= \frac{1}{2} \int_{A^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e h^e dx dy - \int_{A^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e h^e dx dy + \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e dx dy - \int_{\Gamma_u^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e dx dy = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \left[ \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e h^e dx dy \right] \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \int_{A^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e h^e dx dy + \\ &\quad - (\mathbf{Q}^e)^T \left[ \int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e dx dy + \int_{\Gamma_u^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e dx dy \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{P}^e + \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^{eb}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (6.141)$$

Pierwszy składnik w ostatnim równaniu jest formą kwadratową energii sprężystej elementu skończonego. W równaniu (6.141) wprowadzono następujące oznaczenia macierzy i wektorów:

macierz sztywności elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e h^e dx dy \quad (6.142)$$

wektor obciążenia elementu (równoważników węzłowych obciążenia w elemencie)

$$\mathbf{P}^e = \int_{A^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e h^e dx dy \quad (6.143)$$

wektor obciążenia brzegu  $\Gamma_\sigma^e$  elementu

$$\mathbf{P}^{eb} = \int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e dx dy \quad (6.144)$$

wektor obciążenia brzegu  $\Gamma_u^e$  elementu

$$\mathbf{R}^{eb} = \int_{\Gamma_u^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e dx dy \quad (6.145)$$

Dodatkowo, całkowity wektor obciążenia elementu oznaczono

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^{eb} \quad (6.146)$$

Uwagi:

1. Dla obliczenia  $\mathbf{K}^e$  należy wyznaczyć  $\mathbf{B}^e$  z analizy równań geometrycznych Cauchy'ego oraz  $\mathbf{D}^e$  z prawa fizycznego Hooke'a.
2. Ze wzoru na  $\mathbf{K}^e$  wynika, że jest to macierz symetryczna ( $\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}^e)^T$ ).
3. Macierz  $\mathbf{K}^e$  jest macierzą osobliwą ( $\det \mathbf{K}^e = 0$ ).
4. Wektor  $\mathbf{P}^{eb}$  jest znany, natomiast wektor  $\mathbf{R}^{eb}$  jest nieznan.

Warunek konieczny ekstremum funkcji energii potencjalnej elementu skończonego  $\partial\Phi^e/\partial\mathbf{Q}^e = \mathbf{0}$  prowadzi do układu równań MES równowagi elementu w formie

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{F}^e \quad (6.147)$$

**2. Agregacja macierzy elementów.** Globalny układ równań MES dla całego ciała zdyskretyzowanego elementami skończonymi otrzymamy ze wzoru (6.138), który obecnie ma postać

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \Phi^e = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (6.148)$$

gdzie:

$\mathbf{K} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{K}^e$  – macierz globalna sztywności

$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{P}^b + \mathbf{R} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{P}^e + \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{P}^{eb} + \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{R}^{eb}$  – globalny wektor obciążenia

$\mathbf{Q}$  – wektor globalny stopni swobody

$\mathbf{A}$  – operator agregacji.

Powtórne wykorzystanie warunku koniecznego ekstremum funkcji, tym razem całkowitej energii potencjalnej, daje układ równań MES równowagi konstrukcji w postaci

$$\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (6.149)$$

**3. Uwzględnienie warunków brzegowych.** Usunięcie osobliwości macierzy  $\mathbf{K}$  w równaniu (6.149) wymaga uwzględnienia podstawowych warunków brzegowych w wektorze pierwotnych stopni swobody  $\mathbf{Q}$ . W wektorze prawej strony występuje wektor niewiadomych wtórnych  $\mathbf{R}$ . Obliczając ten wektor, wykorzystujemy równania równowagi w węzłach siatki skończenie elementowej. Niewiadome  $R_i^{eb}$  są nieznanne, jednak ich suma w węźle jest znana. Jest ona mianowicie równa zeru lub równa się wartości obciążenia skupionego w węźle (jeśli na kierunku  $R_j$  nie jest znana niewiadoma pierwotna) bądź jest równa reakcji (jeśli na kierunku  $R_j$  niewiadoma pierwotna jest znana).

Dalsze postępowanie jest zgodne z procedurą metody elementów skończonych.

#### 6.6.4. Kryteria zbieżności

W tym punkcie podamy kryteria zbieżności metody elementów skończonych dla rozwiązywania problemów mechaniki, gdzie niewiadomymi pierwotnymi są funkcje przemieszczeń.

Zbieżność MES oznacza, że rozwiązanie aproksymacyjne  $\mathbf{u}^h$  zmierza do rozwiązania dokładnego  $\mathbf{u}$  przy zmniejszaniu wymiarów elementów skończonych. Dla zapewnienia zbieżności muszą być jednocześnie spełnione *warunki kompletności* i *zgodności (kompatybilności)*.

#### Warunki kompletności

1. Aproksymacja wektora przemieszczeń  $\mathbf{u}$  musi umożliwić opis ruchu sztywnego ciała.

2. Aproksymacja wektora przemieszczeń  $\mathbf{u}$  musi umożliwić opis dowolnego stałego stanu odkształceń.

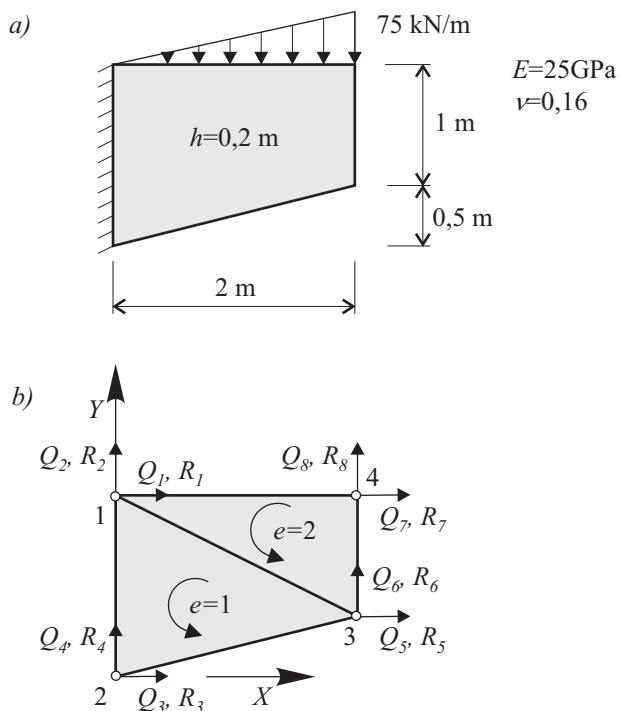
### Warunek zgodności

Aproksymacja wektora przemieszczeń  $\mathbf{u}$  musi się zmieniać w sposób ciągły na wspólnych brzegach elementów skończonych.

Elementy skończone, które nie spełniają warunku zgodności nazywamy *elementami niedostosowanymi*. Są one również z powodzeniem stosowane.

### 6.6.5. Analiza stanu naprężeń w tarczy

Przeprowadzimy analizę statyczną tarczy znajdującej się w płaskim stanie naprężenia, rys. 6.34a. W obliczeniach pominiemy ciężar własny, przyjmując  $P = 0$ .



Rys.6.34. a) tarcza, b) model tarczy skończenie elementowy

**1. Dyskretyzacja MES.** Tarczę zdyskretyzujemy dwoma 3-węzłowymi elementami trójkątnymi. Funkcje kształtu są zdefiniowane wzorami (6.109). Zauważmy, że pochodne  $N_i^e$  względem  $x$  i  $y$  są stałe, co oznacza, że pochodne funkcji przemieszczeń  $u^e$  i  $v^e$  są też stałe w całym elemencie skończonym. Uzasadnia to dla tego elementu nazwę *element trójkątny stałego odkształcenia*.

Na rys. 6.34b pokazano stopnie swobody konstrukcji  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  wraz z siłami węzłowymi  $R_i$ , w układzie współrzędnych  $(x, y)$ . Topologię elementów podano w tab. 6.6.

Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	1 3 4

Tabela 6.6. Tablica topologii tarczy

## 2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

### Element 1

Wektor stopni swobody elementu

$$Q^1 = [u_1^1 \ v_1^1 \ u_2^1 \ v_2^1 \ u_3^1 \ v_3^1]^T$$

Funkcje kształtu ( $i \equiv 1$ ,  $j \equiv 2$ ,  $k \equiv 3$ )

$$A^1 = \frac{3}{2} \quad x_i = 0 \quad y_i = 1.5 \quad x_j = 0 \quad y_j = 0 \quad x_k = 2 \quad y_k = 0.5$$

Podstawiając powyższe dane do (6.109) otrzymamy

$$\begin{aligned} N_1^1(x, y) &= -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y \\ N_2^1(x, y) &= 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \\ N_3^1(x, y) &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz stałych materiałowych

$$\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 25.657 & 4.105 & 0 \\ 4.105 & 25.657 & 0 \\ 0 & 0 & 10.776 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

Macierz sztywności obliczymy ze wzoru (6.142)

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{h}^1 (\mathbf{B}^1)^T \mathbf{D}^1 \mathbf{B}^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,6506 & -0,4960 & -1,0092 & -0,5816 & -0,6414 & 1,0776 \\ -0,4960 & 3,5107 & 0,0855 & -3,2413 & 0,4105 & -0,2694 \\ -1,0092 & 0,0855 & 2,2920 & 0,9921 & -1,2828 & -1,0776 \\ -0,5816 & -3,2413 & 0,9921 & 3,7801 & -0,4105 & -0,5388 \\ -0,6414 & 0,4105 & -1,2828 & -0,4105 & 1,9243 & 0 \\ 1,0776 & -0,2694 & -1,0776 & -0,5388 & 0 & 0,8082 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Wektor sił węzłowych  $\mathbf{R}^{1b}$

$$\mathbf{R}^{1b} = [R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1 \ R_5^1 \ R_6^1]^T$$

## Element 2

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = [u_1^2 \ v_1^2 \ u_2^2 \ v_2^2 \ u_3^2 \ v_3^2]^T$$

Funkcje kształtu ( $i \equiv 1, j \equiv 2, k \equiv 3$ )

$$A^2 = 1 \quad x_i = 0 \quad y_i = 1,5 \quad x_j = 2 \quad y_j = 0,5 \quad x_k = 2 \quad y_k = 1,5$$

Ze wzoru (6.109) mamy

$$N_1^2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$N_2^2(x, y) = \frac{3}{2} - y$$

$$N_3^2(x, y) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + y$$



Macierz pochodnych funkcji kształtu

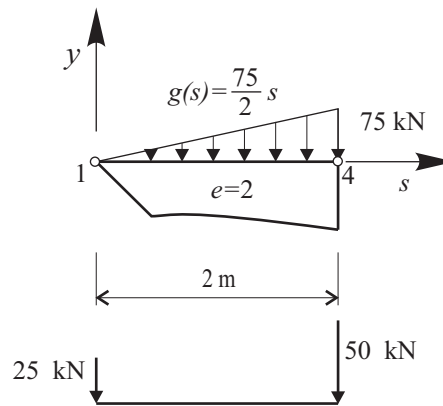
$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności obliczona ze wzoru (6.142) ma postać ( $\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^2$ ).

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{A}^2 h^2 (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{D}^2 \mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,2828 & 0 & 0 & 0,4105 & -1,2828 & -0,4105 \\ 0 & 0,5388 & 1,0776 & 0 & -1,0776 & -0,5388 \\ 0 & 1,0776 & 2,1552 & 0 & -2,1552 & -1,0776 \\ 0,4105 & 0 & 0 & 5,1314 & -0,4105 & -5,1314 \\ -1,2828 & -1,0776 & -2,1552 & -0,4105 & 3,4380 & 1,4881 \\ -0,4105 & -0,5388 & -1,0776 & -5,1314 & 1,4881 & 5,6702 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Wektor sił węzłowych  $\mathbf{P}^{2b}$  od obciążenia ciągłego brzegu 1-4 obliczymy wykorzystując rys. 6.35.



Rys.6.35. Równoważniki w węzłach od obciążenia ciągłego

Przyjmijmy na brzegu 1-4 oś lokalną i równoważniki obciążenia w węzłach elementu obliczymy ze wzoru interpolacyjnego

$$\mathbf{P}^{1-4} = - \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{2} \\ \frac{s}{2} \end{bmatrix} \frac{75}{2} s ds = - \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Na tej podstawie możemy napisać wektor  $\mathbf{P}^{2b}$  w formie

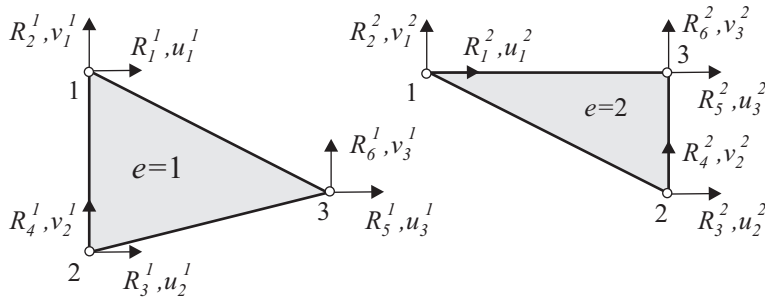
$$\mathbf{P}^{2b} = [0 \quad -25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -50]^T$$

Wektor sił węzłowych  $\mathbf{R}^{2b}$

$$\mathbf{R}^{2b} = [R_1^2 \quad R_2^2 \quad R_3^2 \quad R_4^2 \quad R_5^2 \quad R_6^2]^T$$

**3. Agregacja i budowa równań MES.** Warunki ciągłości przemieszczeń w węzłach tarczy mają postać (por. rys. 6.34 i rys. 6.36)

$$\begin{array}{llll} u_1^1 = u_1^2 = Q_1 & v_1^1 = v_1^2 = Q_2 & u_2^1 = Q_3 & v_2^1 = Q_4 \\ u_3^1 = u_2^2 = Q_5 & v_3^1 = v_2^2 = Q_6 & u_3^2 = Q_7 & v_3^2 = Q_8 \end{array}$$



Rys.6.36. Siły węzłowe i przemieszczenia dla elementów w globalnym układzie współrzędnych

Wykorzystując tablicę topologii budujemy układ równań MES w formie (6.150) (s. 219).

**4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach.** Kinematyczne (podstawowe) warunki brzegowe są następujące:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0 \quad (6.151)$$

natomiast statyczne (naturalne) warunki brzegowe wyrażają warunki równowagi sił w węzłach tarczy

$$\begin{array}{llll} R_1^1 + R_1^2 = R_1 & R_3^1 = R_3 & R_5^1 + R_3^2 = R_5 = 0 & R_5^2 = R_7 = 0 \\ R_2^1 + R_2^2 = R_2 & R_4^1 = R_4 & R_6^1 + R_4^2 = R_6 = 0 & R_6^2 = R_8 = 0 \end{array} \quad (6.152)$$

gdzie  $R_1$  do  $R_4$  są reakcjami.

$$\begin{aligned}
10^6 \cdot \begin{bmatrix} 2.9334 & -0.4960 & -1.0092 & -0.5816 & -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 \\ -0.4960 & 4.0495 & 0.0855 & -3.2413 & 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 \\ -1.0092 & 0.0855 & 2.2920 & 0.9921 & -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 \\ -0.5816 & -3.2413 & 0.9921 & 3.7801 & -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 \\ -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 & 4.0794 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 & 0 & 5.9396 & -0.4105 & -5.1314 \\ -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 & -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 & -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} &= \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 + R_1^2 \\ R_2^1 + R_2^2 \\ R_3^1 \\ R_4^1 \\ R_5^1 + R_3^2 \\ R_6^1 + R_4^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{bmatrix} \quad (6.150)
\end{aligned}$$

Podstawienie (6.151) i (6.152) do (6.150) prowadzi do układu równań w formie (6.153) (s. 221). Układ równań (6.153) zawiera cztery niewiadome pierwotne od  $Q_5$  do  $Q_8$  i cztery niewiadome wtórne od  $R_1$  do  $R_4$ . Niewiadome pierwotne obliczymy, rozwiązując cztery ostatnie równania

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 4,0794 & 0 & -2,1552 & -1,0776 \\ 0 & 5,9396 & -0,4105 & -5,1314 \\ -2,1552 & -0,4105 & 3,4380 & 1,4881 \\ -1,0776 & -5,1314 & 1,4881 & 5,6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,00818 \\ -0,05213 \\ 0,01529 \\ -0,06156 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

Reakcje podpór obliczymy natomiast z czterech pierwszych równań (6.153) i wynoszą one

$$R_1 = -66,667 \text{ kN}$$

$$R_2 = 43,556 \text{ kN}$$

$$R_3 = 66,667 \text{ kN}$$

$$R_4 = 31,444 \text{ kN}$$

## 5. Obliczenie odkształceń i naprężeń w elemencie

### Element 1

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,00818 \ -0,05213]^T \cdot 10^{-3}$$

Wektor odkształceń obliczymy wg wzoru (6.140)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^1 = \mathbf{B}^1 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} -0,00409 \\ 0 \\ -0,02606 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Wektor naprężeń obliczymy z równania fizycznego (6.124b)

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^1 = \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{bmatrix} -104,9643 \\ -16,7943 \\ -280,8512 \end{bmatrix} \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 2.934 & -0.4960 & -1.0092 & -0.5816 & -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 \\ -0.4960 & 4.0495 & 0.0855 & -3.2413 & 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 \\ -1.0092 & 0.0855 & 2.2920 & 0.9921 & -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 \\ -0.5816 & -3.2413 & 0.9921 & 3.7801 & -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 \\ -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 & 4.0794 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 & 0 & 5.9396 & -0.4105 & -5.1314 \\ -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 & -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 & -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -25 + R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \quad (6.153)$$

**Element 2**

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = \{0 \ 0 \ -0,00818 \ -0,05213 \ 0,01529 \ -0,06156\} \cdot 10^{-3}$$

Wektor odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^2 = \mathbf{B}^2 \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0,00765 \\ -0,00943 \\ -0,00731 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Wektor naprężeń

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^2 = \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{bmatrix} 157,4465 \\ -210,6384 \\ -78,7232 \end{bmatrix} \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

	Obliczenia ręczne	Program komputerowy 2 elementy	Program komputerowy 200 elementów
$u_3$	$-8,182e - 06$	$-8,1822e - 06$	$-33,395e - 06$
$v_3$	$-5,213e - 05$	$-5,2126e - 05$	$-15,484e - 05$
$u_4$	$1,529e - 05$	$1,5292e - 05$	$7,799e - 05$
$v_4$	$-6,156e - 05$	$-6,1559e - 05$	$-19,145e - 05$
$\sigma_x^1$	$-104,9643$	$-104,96$	–
$\sigma_y^1$	$-16,7943$	$-16,794$	–
$\tau_{xy}^1$	$-280,8512$	$-280,85$	–
$\sigma_x^2$	$157,4465$	$157,45$	–
$\sigma_y^2$	$-210,6384$	$-210,64$	–
$\tau_{xy}^2$	$-78,7232$	$-78,723$	–

Tabela 6.7. Porównanie wyników obliczeń ręcznych z obliczeniami komputerowymi tarczy

Obliczenia tarczy powtórzono wykorzystując program komputerowy. Tarczę zdyskretyzowano dwoma i dwustu elementami trójkątnymi tarczowymi.

W tab. 6.7 zestawiono porównanie wyników obliczeń ręcznych z obliczeniami komputerowymi. Wyniki obliczeń z dwustoma elementami skończonymi są bliskie rozwiązaniu dokładnemu. Praktycznym sposobem oceny jakości rozwiązania może być wykonanie powtórnych obliczeń, na przykład dla siatki dwukrotnie zagęszczonej, i porównanie wyników. Jeśli są bliskie sobie, to można je uznać za wiarygodne, w przeciwnym przypadku należałoby znowu siatkę dwukrotnie zagęścić itd.

### Uwaga

Sposób rozwiązywania globalnego układu równań MES w tym przykładzie (również i w następnych przykładach) jest oczywiście poprawny, ale nieefektywny, jeśli obliczenia chcielibyśmy zautomatyzować, pisząc np. program komputerowy. W takim przypadku wygodniej jest uwzględniać podstawowe warunki brzegowe w taki sposób, aby obliczanie niewiadomych pierwotnych nie wymagało zmiany wymiarów globalnej macierzy sztywności. W ten sposób również i niewiadome wtórne obliczymy, wykorzystując niezmienny wymiar macierzy  $\mathbf{K}$ . Sposób postępowania wyjaśnimy bardziej szczegółowo na przykładzie rozwiązanej tarczy.

Niewiadome pierwotne zawarte w wektorze  $\mathbf{Q}$  obliczymy, rozwiązując układ równań MES(6.150), w którym jednorodne warunki brzegowe uwzględnimy zerując wiersze i kolumny w macierzy  $\mathbf{K}$ , odpowiadające zerowym wartościom  $Q_1$  do  $Q_4$ , oraz wpisując 1 w tych równaniach na przekątnej głównej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  i zera w pierwszych czterech współrzędnych wektora prawej strony  $\mathbf{F}$ .

## 6.7. Problemy jednowymiarowe zależne od czasu

### 6.7.1. Wprowadzenie

Opis metody elementów skończonych zakończymy zastosowaniem jej do rozwiązywania prostych problemów, które są zależne od czasu. Przyjmujemy, że zmienne węzłowe w dyskretyzacji MES są funkcjami czasu, co implikuje, że rozważać będziemy takie problemy, których rozwiązanie może być przedstawione w formie z rozdzielonymi zmiennymi  $u(x, t) = T(t)U(x)$ . Odnosząc się do rozdziału trzeciego, modelem matematycznym problemu jednowymiarowego (względem zmiennych przestrzennych) zależnego od czasu może być

równanie

$$c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f \quad 1 < x < L \quad (6.154)$$

które dla  $c_2 = b = 0$ , lub  $c_1 = b = 0$ , sprowadza się do zależnego od czasu równania rzędu drugiego, i dla  $c_1 = a = 0$  jest zależnym od czasu równaniem rzędu czwartego.

Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania równań typu (6.154) sprowadza się do ich dyskretyzacji względem zmiennej przestrzennej  $x$ , a następnie do numerycznego rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na zmienną czasową  $t$ . Taki model MES rozwiązania nazywa się *półdyskretnym modelem skończenie elementowym* (ang. *semidiscrete finite element model*).

### 6.7.2. Półdyskretny model skończenie elementowy

Dyskretyzację MES względem zmiennej przestrzennej  $x$  dokonujemy w sposób opisany już w tym rozdziale, zastępując prawą stronę  $f$  przez  $f - c_1(\partial u/\partial t) - c_2(\partial^2 u/\partial t^2)$ . Funkcjami kształtu są funkcje Lagrange'a (jeśli  $b = 0$ ) lub funkcje Hermite'a (jeśli  $b \neq 0$ ).

Interpolacja w elemencie skończonym wyrażona jest wzorem

$$u^e = \sum_{j=1}^N N_j^e(x^e) u_j^e(t) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{u}^e(t) \quad (6.155)$$

Równanie słabego sformułowania wariacyjnego dla elementu skończonego ma postać

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{l^e} v^e(x^e) \left[ -\frac{\partial}{\partial x^e} \left( a^e \frac{\partial u^e}{\partial x^e} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^{e2}} \left( b^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^{e2}} \right) + c_1^e \frac{\partial u^e}{\partial t} + c_2^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial t^2} - f^e \right] dx^e = \\ &= \int_0^{l^e} \left[ a^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{\partial u^e}{\partial x^e} + b^e \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^{e2}} + c_1^e v^e \frac{\partial u^e}{\partial t} + c_2^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial t^2} - v^e f^e \right] dx^e + \\ &- \left[ \left( a^e v^e \frac{\partial u^e}{\partial x^e} \right) \Big|_0^{l^e} - \left( v^e \frac{\partial}{\partial x^e} \left( b^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^{e2}} \right) \right) \Big|_0^{l^e} + \left( b^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^{e2}} \right) \Big|_0^{l^e} \right] \end{aligned} \quad (6.156)$$



Przyjmując aproksymację  $v^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e)\mathbf{d}^e$  oraz wykorzystując zapis macierzowy, otrzymamy (dla  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ ) równanie macierzowe

$$\int_0^{l^e} \left[ a^e \left( \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} \right)^T \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} \mathbf{u}^e + b^e \left( \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} \mathbf{u}^e + c_1^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{u}}^e + c_2^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e \ddot{\mathbf{u}}^e - (\mathbf{N}^e)^T f^e \right] dx^e - \mathbf{P}^e = \mathbf{0} \quad (6.157)$$

gdzie oznaczono  $\dot{\mathbf{u}}^e \equiv \partial \mathbf{u}^e / \partial t$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^e \equiv \partial^2 \mathbf{u}^e / \partial t^2$  oraz zdefiniowano wektor  $\mathbf{P}^e$  obliczany ze wzoru

$$\mathbf{P}^e = \left[ a^e (\mathbf{N}^e)^T \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} + b^e \left( \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x^e} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} - (\mathbf{N}^e)^T \frac{d}{dx^e} \left( b^e \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} \right) \right] \mathbf{u}^e(t) \Big|_0^{l^e} \quad (6.158)$$

Przyjmijmy teraz definicje macierzy w formie

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} \left[ a^e \left( \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} \right)^T \frac{d\mathbf{N}^e}{dx^e} + b^e \left( \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} \right)^T \frac{d^2\mathbf{N}^e}{dx^{e2}} \right] dx^e \\ \mathbf{C}^e &= \int_0^{l^e} c_1^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e dx^e \\ \mathbf{M}^e &= \int_0^{l^e} c_2^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e dx^e \\ \mathbf{F}^e &= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T f^e dx^e + \mathbf{P}^e \end{aligned} \quad (6.159)$$

Równanie macierzowe MES dla elementu skończonego otrzymamy podstawiając (6.159) do (6.157)

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}^e \quad (6.160)$$

Jak widać, półdiskretny model skończenie elementowy jest układem równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego.

### 6.7.3. Aproksymacja w czasie

Układ równań różniczkowych (6.160) można rozwiązać metodą różnic skończonych, opisaną w rozdziale trzecim. W zależności od wartości parametrów  $c_1^e$  i  $c_2^e$  mamy różne typy równań.

Jeśli  $c_2^e = 0$ , to równanie (6.160) sprowadza się do *równania parabolicznego*

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}^e \quad (6.161)$$

Jeśli natomiast  $c_1^e = 0$ , to równanie (6.160) jest *równaniem hiperbolicznym*

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}^e \quad (6.162)$$

Agregacja tych równań w globalny układ równań dla całego obszaru rozwiązania oraz uwzględnienie warunków brzegowych jest dokonywane w typowy sposób, wcześniej omówiony. Dodatkowym elementem jest wymóg znajomości warunków początkowych dla funkcji  $u(x, t)$  i, w przypadku równania (6.162) jej pochodnej.

**Przykład 6.9.** Rozważmy nieustalony przepływ ciepła opisany równaniem parabolicznym

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (6.163a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (6.163b)$$

i z warunkiem początkowym

$$u(x, 0) = 1 \quad (6.163c)$$

W tym przypadku mamy  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  i  $f = 0$ . Dokonując dyskretyzacji MES liniowymi elementami, równanie (6.160) sprowadza się do postaci

$$\frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} + \frac{l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^e \\ \dot{u}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix}$$

W tabeli 6.8 podano wyniki obliczeń dla  $u(1, t)$  metodą Cranka-Nicolsona, przyjmując  $\Delta t = 0,05$  i różną liczbę elementów skończonych. Obliczenia porównano z rozwiązaniem analitycznym.

Czas $t$	Rozw.analit. $u(1, t)$	Liczba elementów skończonych			
		2	4	6	8
0,2	0,7723	0,8128	0,7614	0,7738	0,7714
0,4	0,4745	0,4620	0,4648	0,4736	0,4725
0,6	0,2897	0,2626	0,2822	0,2867	0,2873
0,8	0,1769	0,1493	0,1711	0,1735	0,1750
1,0	0,1080	0,0848	0,1037	0,1051	0,1066

Tabela 6.8. Wyniki obliczeń w przykładzie 6.9

**Przykład 6.10.** Rozważmy problem drgań poprzecznych belki utwierdzonej na obu końcach, o stałym przekroju poprzecznym, rządzonej przez równanie hiperboliczne

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (6.164a)$$

z warunkami brzegowymi

$$w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = 1 \quad (6.164b)$$

i z warunkami początkowymi

$$w = \sin \pi x - \pi x(1 - x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{dla } t = 0 \text{ i } 0 < x < 1 \quad (6.164c)$$

gdzie  $w$  jest funkcją ugięcia belki.

Wykorzystując, że  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c_1 = 0$  i  $f = 0$  równanie (6.160) dla elementu skończonego z funkcjami kształtu Hermite'a (element skończony belkowy) ma formę

$$\begin{aligned}
& \frac{l^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l^e & 54 & 13l^e \\ -22l^e & 4l^{e2} & -13l^e & -3l^{e2} \\ 54 & -13l^e & 156 & 22l^e \\ 13l^e & -3l^{e2} & 22l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^e \\ \ddot{u}_2^e \\ \ddot{u}_3^e \\ \ddot{u}_4^e \end{bmatrix} + \\
& + \frac{2}{l^{e3}} \begin{bmatrix} 6 & -3l^e & -6 & -3l^e \\ -3l^e & 2l^{e2} & 3l^e & l^{e2} \\ -6 & 3l^e & 6 & 3l^e \\ -3l^e & l^{e2} & 3l^e & 2l^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \\ P_3^e \\ P_4^e \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

W równaniu tym występuje znana już nam macierz sztywności elementu  $\mathbf{K}^e$  oraz macierz  $\mathbf{M}^e$  nazywana *macierzą mas*.

W tab. 6.9 porównano wyniki obliczeń ugięcia w środku belki  $w(0,5 \ t)$  metodą elementów skończonych, dla  $\Delta t = 0,005$  i różnej liczby elementów skończonych, z wynikami obliczeń metodą Bubnowa-Galerkina z dokładnym całkowaniem po zmiennej czasowej.

Czas $t$	Rozwiązanie Bubnowa-Galerkina	Liczba elementów skończonych	
		4	8
0,01	0,2157	0,2098	0,2097
0,03	0,1716	0,1698	0,1698
0,05	0,0925	0,0931	0,0935
0,08	-0,0553	-0,0460	-0,0455
0,10	-0,1441	-0,1341	-0,1335
0,12	-0,2034	-0,1932	-0,1931
0,15	-0,2129	-0,2112	-0,2110

Tabela 6.9. Wyniki obliczeń w przykładzie 6.10

## Rozdział 7

# Wprowadzenie do bezelementowej metody Galerkina (BMG)

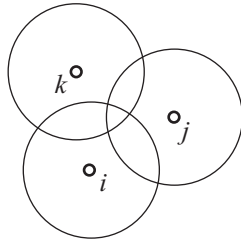
### 7.1. Uwagi wstępne

W rozdziałach trzecim i szóstym przedstawiliśmy dwie metody numerycznego rozwiązywania problemów brzegowych, opisanych zwyczajnymi lub cząstkowymi równaniami różniczkowymi, a mianowicie klasyczną metodę różnic skończonych i metodę elementów skończonych. Wspólną cechą tych metod jest, że nieznana funkcja  $u$  jest aproksymowana przez funkcję  $u_h$ , która jest wyznaczana w skończonej liczbie węzłów rozważanego obszaru. Proces wyznaczania  $u_h$  w tych punktach oraz zastępowania równania różniczkowego przez układ równań algebraicznych jest procesem dyskretyzacji. Na przykład w metodzie różnic skończonych było to realizowane przez zastąpienie równania różniczkowego przez układ równań różnicowych. W metodzie elementów skończonych natomiast definiujemy elementy pomiędzy węzłami i w tych elementach interpolujemy funkcję  $u$  przy pomocy odpowiednio określonej bazy funkcji kształtu.

W obu rozważanych metodach należało zawsze określić powiązanie węzłów pomiędzy sobą. W metodzie różnic skończonych wymagało to określenia dla każdego węzła węzłów sąsiednich, aby można było sformułować równanie różnicowe. W metodzie elementów skończonych z kolei oznaczało to konieczność podawania w danych macierzy topologii (incydencji), ustalającej, z jakimi wę-

złami jest powiązany każdy element, co jest konieczne przy obliczaniu funkcji kształtu. W rezultacie takie powiązanie węzłów definiuje siatkę elementów skończonych, dyskretyzujących obszar rozwiązania. Dodatkowo, funkcja kształtu dla określonego węzła jest różna od zera tylko w elementach zawierających ten węzeł, i równa zero w pozostałych częściach obszaru.

Przeciwieństwem metod, w których występują elementy skończone są metody komputerowe, które nie wymagają definiowania macierzy topologii. Metody te są nazywane *metodami bezelementowymi* (lub metodami bezsiatkowymi, jeśli przetłumaczymy bezpośrednio nazwę angielską *meshless methods*), ponieważ w metodach tych nie korzystamy z siatki elementów w procesie dyskretyzacji wyjściowego problemu brzegowego [1]. Zamiast tego z każdym węzłem wiążemy tzw. *obszar wpływu*, niezależny od rozmieszczenia węzłów, rys. 7.1. Z obszarem wpływu wiążemy funkcję wagową i wówczas obszar wpływu definiujemy jako obszar, w którym funkcja wagowa jest  $w > 0$  wewnątrz obszaru wpływu i jest równa zero na zewnątrz obszaru wpływu. Funkcje wagowe są wykorzystywane w metodach bezelementowych do budowania funkcji kształtu.



Rys.7.1. Kołowe obszary wpływu dla węzłów  $i$ ,  $j$ ,  $k$

W dalszym ciągu opiszemy krótko najpopularniejszą z metod bezelementowych jaką jest *bezelementowa metoda Galerkina* (ang. *element-free Galerkin method*) (BMG). Należy podkreślić, że metody bezelementowe nie są jeszcze konkurencyjne w stosunku do metody elementów skończonych. Wymagają one dłuższego czasu obliczeń i procedury programów komputerowych, są bardziej skomplikowane. Na przykład poważnym utrudnieniem jest fakt, że funkcje kształtu w metodzie bezelementowej nie są wielomianami interpolacyjnymi, co oznacza, że podstawowe (kinematyczne) warunki brzegowe nie mogą być wprowadzone bezpośrednio. Również samo obliczanie funkcji kształtu jest znacznie bardziej skomplikowane niż w metodzie elementów skończonych.

Można jednakże wskazać takie problemy mechaniki, których rozwiązanie metodą bezelementową jest jakościowo lepsze. Typowym przykładem jest analiza propagacji fal. Obecnie rozwijane są metody, które efektywnie łączą ze sobą metodę elementów skończonych z metodą bezelementową.

## 7.2. Problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu

### 7.2.1. Ruchoma, ważona metoda najmniejszych kwadratów

W p. 4.4 przedstawiliśmy metodę najmniejszych kwadratów dla aproksymacji punktowej. Obecnie uogólnimy tę metodę, przyjmując, że wektor nieznanymi parametrów aproksymacji jest funkcją zmiennej  $x$ , tzn.  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(x)$ . W ten sposób, odpowiednikiem wzoru (4.11) dla aproksymacji funkcji  $u$ , zdefiniowanej w przedziale  $0 \leq x \leq L$ , jest wzór

$$u \approx u_h = \mathbf{p}(x)\mathbf{a}(x) \quad (7.1)$$

Błąd aproksymacji wyrazimy wzorem analogicznym do (4.12)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n [\mathbf{p}(x_i)\mathbf{a}(x) - u_i]^2 \quad (7.2)$$

w którym  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  są współrzędnymi węzłów. Tak zdefiniowany błąd  $\varepsilon$  określa *ruchomą metodę najmniejszych kwadratów* w tym sensie, że, jak to wyżej podano,  $\mathbf{a}(x)$  jest funkcją względem aproksymacji zbudowanej wokół węzła  $x_i$ . Stosownie do (7.2)  $u_h(x)$  jest związana ze wszystkimi wartościami węzłowymi  $u_i \equiv u(x_i)$ . Wykorzystanie takiej aproksymacji prowadziłoby do zbudowania od razu globalnej macierzy sztywności. Jest to wysoce nieefektywne postępowanie i dlatego błąd  $\varepsilon$  „ważymy”, otrzymując błąd *ruchomej, ważonej metody najmniejszych kwadratów*, z błędem lokalnej aproksymacji wokół węzła  $x_i$  w postaci

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n w(x - x_i) [\mathbf{p}(x_i)\mathbf{a}(x) - u_i]^2 \quad (7.3)$$

gdzie funkcje wagowe można zawsze dobrać w taki sposób, aby miały one zwarty nośnik, tzn. aby było  $w(x - x_i) \neq 0$  tylko w małym otoczeniu  $x_i$ .

Minimalizując  $\varepsilon$  ze względu na  $\mathbf{a}(x)$  otrzymamy

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} : \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \left[ 2\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{a}(x) - 2\mathbf{p}^T(x_i) u_i \right] = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

Oznaczając  $w_i \equiv w(x-x_i)$  oraz przyjmując macierz funkcji bazowych w formie  $\mathbf{p}(x) = [1 \ x \ x^2]$ , równanie (7.4) przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i & \sum_{i=1}^n w_i x_i & \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i & \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i x_i^3 & \sum_{i=1}^n w_i x_i^4 \end{bmatrix} \mathbf{a}(x) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_n \\ w_1 x_1 & w_2 x_2 & w_3 x_3 & \dots & w_n x_n \\ w_1 x_1^2 & w_2 x_2^2 & w_3 x_3^2 & \dots & w_n x_n^2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7.5a)$$

lub w bardziej zwartej formie

$$\mathbf{A}(x) \mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (7.5b)$$

gdzie

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n]^T$$

oraz

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{p}(x_i) \quad (7.5c)$$

$$\mathbf{B}(x) = [w_1 \mathbf{p}^T(x_1) \quad w_2 \mathbf{p}^T(x_2) \quad w_3 \mathbf{p}^T(x_3) \quad \dots \quad w_n \mathbf{p}^T(x_n)] \quad (7.5d)$$

Rozwiązanie równania (7.5b) wynosi

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (7.6)$$

Podstawiając następnie (7.6) do (7.1) otrzymamy

$$u_h = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (7.7)$$

Teraz funkcje kształtu  $\mathbf{N}$  identyfikujemy jako

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \quad (7.8)$$



co formalnie jest identycznym wzorem jak (4.17).

Wzór (7.7) jest obecnie

$$u_h = \mathbf{N}(x) \mathbf{u} \quad (7.9)$$

Zauważmy, że funkcje kształtu (7.8) nie są wielomianami interpolacyjnymi tylko wielomianami aproksymacyjnymi, tzn.  $N_i(x_i) \neq 1$ . Stąd wektor  $\mathbf{u}$  nie zawiera wartości węzłowych funkcji  $u^h$ .

Obliczając w metodzie elementów skończonych macierz sztywności, konieczne było obliczanie pochodnych funkcji kształtu, co było stosunkowo proste. Teraz jest to bardziej skomplikowane i pochodną  $\mathbf{N}(x)$  obliczamy z (7.8) według wzoru

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} &= \frac{d\mathbf{p}(x)}{dx} \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) + \mathbf{p}(x) \frac{d\mathbf{A}^{-1}(x)}{dx} \mathbf{B}(x) + \\ &+ \mathbf{p}(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \frac{d\mathbf{B}(x)}{dx} \end{aligned} \quad (7.10a)$$

gdzie

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(x)}{dx} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} \mathbf{A}^{-1}(x) \quad (7.10b)$$

### 7.2.2. Funkcje wagowe

Funkcje kształtu i ich pochodne możemy obliczyć ze wzorów (7.8) i (7.10) pod warunkiem, że przyjęta została funkcja wagowa  $w$ . Nośnik funkcji wagowej wyznaczający obszar wpływu dla węzłów  $i$  określamy przez parametr  $d$ :  $w(x - x_i) \neq 0$  dla  $|x - x_i| < d$ . Dobór funkcji wagowych nie może być dowolny. Przede wszystkim muszą być one odpowiedniej klasy ciągłości, aby można było obliczyć pochodne funkcji kształtu do wymaganego rzędu. Oczywiście, nie mogą być ujemne. I w końcu, nieosobliwość macierzy  $\mathbf{A}(x)$  wymaga, aby dla każdego  $x_i$  co najmniej  $m$  funkcji wagowych było różnych od zera, gdzie  $m$  jest wymiarem wektora  $\mathbf{a}(x)$ .

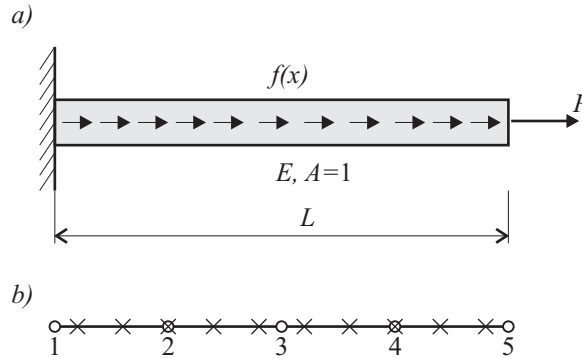
Na przykład funkcję wagową można przyjąć w postaci

$$w(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos(\frac{\pi s}{d})) & \text{dla } s < d \\ 0 & \text{dla } s = d \end{cases} \quad (7.11)$$

gdzie  $s = |x - x_i|$ .

### 7.2.3. Sformułowanie Galerkina

Obecnie sformułujemy bezelementową metodę Galerkina<sup>1</sup> do rozwiązania znanego już nam problemu pręta rozciąganego, rys. 7.2.



Rys.7.2. a) pręt rozciągany, b) o – węzły, x – węzły numerycznego całkowania

Modelem matematycznym dla tego problemu jest równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$-E \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad 0 < x < L \quad (7.12a)$$

z podstawowym warunkiem brzegowym

$$u(x=0) = \bar{u} \quad (7.12b)$$

i naturalnym warunkiem brzegowym

$$E \frac{du(L)}{dx} = P \quad (7.12c)$$

Jak wiemy, w BMG funkcje kształtu nie interpolują wartości węzłowych funkcji  $u(x)$ , dlatego podstawowe warunki brzegowe wprowadzimy do sformułowania wariacyjnego poprzez mnożnik Lagrange'a (podobnie jak to zrobiliśmy w przykładzie 5.8), który to mnożnik obecnie ma interpretację reakcji na kierunku danego przemieszczenia  $\bar{u}$ .

<sup>1</sup>Jest to sformułowanie Bubnowa-Galerkina, nazywane jednakże BMG.

W konsekwencji słabe sformułowanie Galerkinia wyraża równanie

$$\int_0^L E \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx - \left[ v E \frac{du}{dx} \right]_{x=L} - \int_0^L v(x) f(x) dx - [\lambda(u - \bar{u})]_{x=0} - [v\lambda]_{x=0} = 0 \quad (7.13)$$

Przyjmujemy, że aproksymacje  $u$ ,  $\lambda$  i  $v$  wyrażają wzory

$$u = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad \lambda = N_L \Lambda \quad v = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (7.14)$$

gdzie  $\Lambda$  jest mnożnikiem Lagrange'a dla węzła  $x = 0$  i  $N_L$  jest funkcją kształtu tego węzła.

Podstawiając powyższe wzory do (7.13) otrzymamy

$$\mathbf{d}^T \left[ \left( \int_0^L \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} E \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \right) \mathbf{u} - \mathbf{N}^T(L) P - \int_0^L \mathbf{N}^T f(x) dx - \mathbf{N}^T(0) N_L \Lambda \right] + \\ - \Lambda [N_L(\mathbf{N}(0) \mathbf{u} - \bar{u})] = 0 \quad (7.15)$$

Wykorzystując, że  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  i  $\Lambda \neq 0$  otrzymujemy z (7.15) dwa układy równań macierzowych

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{g} \Lambda &= \mathbf{f} \\ \mathbf{g}^T \mathbf{u} &= q \end{aligned} \quad (7.16)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia macierzy i wektorów

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_0^L \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} E \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \\ \mathbf{g} &= -\mathbf{N}^T(0) N_L \\ \mathbf{f} &= \mathbf{N}^T(L) P + \int_0^L \mathbf{N}^T f(x) dx \\ q &= -N_L \bar{u} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Układ równań (7.16) możemy również zapisać w zwartej postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ q \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

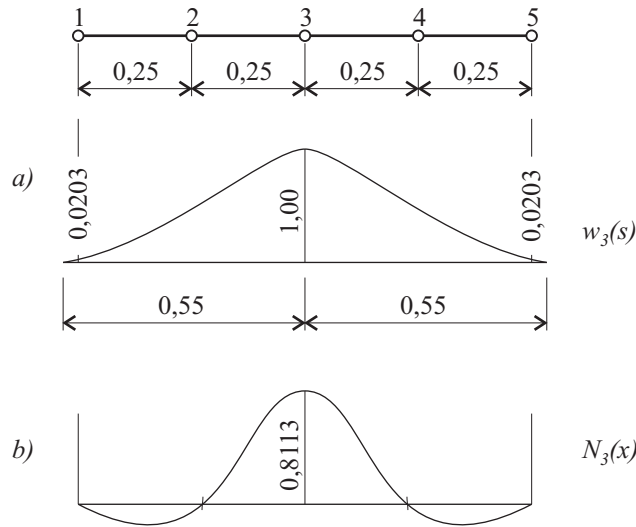
Całkowanie w równaniach (7.18) jest wykonywane numerycznie, na przykład wykorzystując kwadraturę Gaussa tak, że funkcje wagowe, które występują w  $\mathbf{A}(x)$  i  $\mathbf{B}(x)$  (wzory (7.5)), są obliczane w węzłach numerycznego całkowania. Również i wektor  $\mathbf{p}(x)$  w (7.8) jest obliczany w tych węzłach.

Zauważmy, że macierz równania (7.18) nie jest pasmowa oraz nie jest dodatnio określona. Po rozwiązaniu (7.18) funkcję  $u_h$  obliczymy z (7.9) i następnie

odkształcenie ze wzoru  $\varepsilon_h = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{u}$  oraz naprężenie ze wzoru  $\sigma_h = E\varepsilon_h$ . Funkcje kształtu i ich pochodne są obliczane w węzłach numerycznego całkowania dlatego również  $u_h$ ,  $\varepsilon_h$  i  $\sigma_h$  są obliczane w tych węzłach.

**Przykład 7.1.** Obliczymy funkcję  $u(x)$  dla pręta rozciąganego pokazanego na rys. 7.2a, przyjmując  $L = 1m$ ,  $E = 10MPa$ ,  $f = 20MN/m$ ,  $P = -5MN$  i  $\bar{u} = 0$ . Do rozwiązania przyjęto 5 węzłów, równomiernie rozmieszczonych po długości pręta, oraz obszar wpływu funkcji wagowej (7.11)  $d = 0,55$ . Obszar rozwiązania  $0 \leq x \leq 1$  podzielono na 10 równych podprzedziałów z jednym węzłem całkowania (wzór prostokątów całkowania), rys. 7.2b.

Na rys. 7.3 pokazano dla przykładu wykresy funkcji wagowej  $w(s)$  i funkcji kształtu  $N(x)$  dla węzła 3. Dane do tych wykresów zestawiono w tab. 7.1.

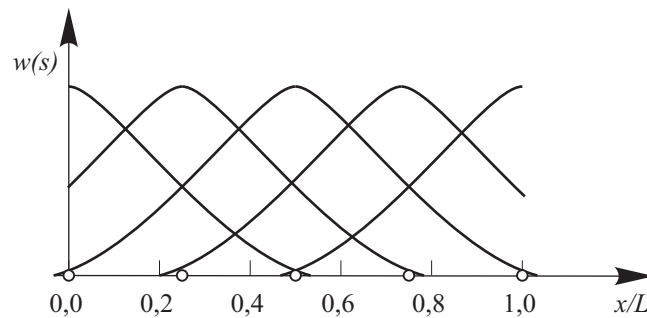


Rys.7.3. a) funkcja wagowa  $w_i$ , b) funkcja kształtu dla węzła 3

$x$	$w_3(s)$	$N_3(x)$
0,0	0,0203	0,0
0,1	0,173	-0,120
0,2	0,429	-0,080
0,3	0,708	0,333
0,4	0,921	0,626
0,5	1,000	0,8113

Tabela 7.1. Dane do wykresów na rys. 7.3

Dodatkowo na rys. 7.4 zestawiono funkcje wagowe dla wszystkich pięciu węzłów. Układ równań (7.18) rozwiązywano, sprowadzając go do postaci górnotrójkątnej



Rys.7.4. Funkcje wagowe dla pięciu węzłów

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ -q + \mathbf{g}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

i następnie stosując postępowanie wstecz Gaussa.

Obliczając

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 41,57 & -41,27 & -1,40 & 1,10 & 0,00 \\ -41,27 & 80,92 & -38,45 & -2,30 & 1,10 \\ -1,40 & -38,45 & 79,70 & -38,45 & -1,40 \\ 1,10 & -2,30 & -38,45 & 80,92 & -41,27 \\ 0,00 & 1,10 & -1,40 & -41,27 & 41,57 \end{bmatrix}, \quad q = 0,0$$

$$\mathbf{g}^T = [-1,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0]$$

$$\mathbf{f}^T = [1,84 \quad 5,84 \quad 4,64 \quad 5,85 \quad -3,16]$$

otrzymano wynik

$$\mathbf{u}^T = [0,0 \quad 0,32 \quad 0,50 \quad 0,57 \quad 0,50]$$

$$\lambda = -15$$

Poszukiwane przemieszczenie  $u_n(x)$  obliczymy ze wzoru

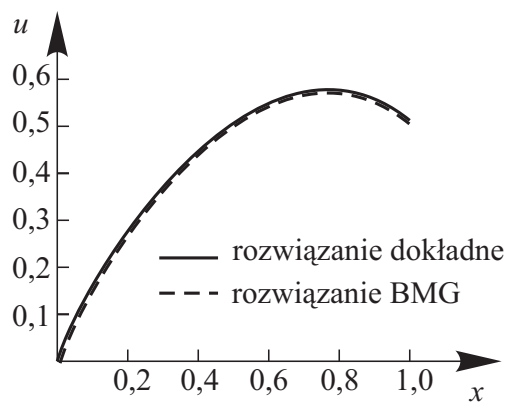
$$u_h(x) = \sum_{i=1}^5 N_i(x) u_i$$

Na przykład dla  $x = 0,75$  otrzymano

$$u_h(0,75) \cong 0,8113 \cdot 0,57 + 2 \cdot 0,110 \cdot 0,5 = 0,572$$

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$u(x) = -x^2 + 1,5x$$



Rys.7.5. Porównanie wyników obliczeń w przykładzie 7.1

Na rys. 7.5 porównano wyniki obliczeń, jak widać zgodność obliczeń jest bardzo dobra.

## 7.3. Uogólnienie – BMG dla liniowego problemu teorii sprężystości

### 7.3.1. Funkcje kształtu dla wielu wymiarów

W ogólnym, trójwymiarowym przypadku funkcje i macierze funkcyjne zależne są od współrzędnych przestrzennych  $x, y$  i  $z$ . Aproksymacja funkcji  $u$  jest teraz zdefiniowana wzorem

$$u_h = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (7.20)$$

Minimalizacja błędu aproksymacji ze względu na  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (7.21)$$

prowadzi do równania

$$\mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (7.22a)$$

gdzie wektor  $\mathbf{u}$  zawiera  $u_i$  oraz

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n)] \quad (7.22b)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}[w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \quad (7.22c)$$

Przyjmując definicje  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}$  i  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})$  otrzymamy z (7.22a)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (7.23)$$

Podstawiając następnie tak obliczone  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  do (7.20), dostaniemy

$$u_h = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (7.24)$$

z funkcjami kształtu zawartymi w macierzy jednowierszowej

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (7.25)$$

Pochodne funkcji kształtu obliczymy ze wzoru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \\ &+ \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (7.26)$$

gdzie wykorzystano wzór (7.10b).

### 7.3.2. Sformułowanie Galerkina

Komplet równań LPTS został sformułowany w p. 6.6.1, a w p. 6.6.2 podano równanie (6.128) sformułowania wariacyjnego. Przyjmując, że wariacji podlega pole przemieszczeń i mnożnik Lagrange'a odpowiednikiem (6.128) jest obecnie równanie

$$\begin{aligned} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, dv - \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}^0 \, ds - \int_{S_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \, ds + \\ - \int_{S_u} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

gdzie wariacje  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  i  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  są odpowiednikami funkcji testowych, stowarzyszonymi z  $\mathbf{u}$  i  $\boldsymbol{\lambda}$ . Podobnie jak to miało miejsce w analizie jednowymiarowej, również i tutaj podstawowy warunek brzegowy został wprowadzony do funkcjonału. Wykorzystując prawo Hooke'a  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$  oraz wzory wynikające z przyjętej aproksymacji pola przemieszczeń<sup>2</sup>  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$  oraz aproksymacji wektora mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_L\boldsymbol{\Lambda}$ , równanie (7.27) możemy napisać w formie

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dv \right) \mathbf{Q} - \delta \mathbf{Q}^T \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^0 \, ds - \delta \mathbf{Q}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, dv + \\ - \delta \boldsymbol{\Lambda}^T \int_{S_u} \mathbf{N}_L^T (\mathbf{N}\mathbf{Q} - \mathbf{u}^0) \, ds - \delta \mathbf{Q}^T \left( \int_{S_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_L \, ds \right) \boldsymbol{\Lambda} = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

Wykorzystując, że powyższe równanie jest słuszne dla dowolnych  $\delta \mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$  i  $\delta \boldsymbol{\Lambda} \neq \mathbf{0}$ , otrzymamy układ równań w postaci analogicznej do (7.18)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (7.29a)$$

<sup>2</sup>Zauważmy, że obecnie macierz  $\mathbf{N}$  jest macierzą  $k$ -wierszową, gdzie  $k$  jest liczbą funkcji przemieszczeń, zawartych w wektorze przemieszczeń  $\mathbf{u}$ . Wektor stopni swobody  $\mathbf{u}$  jest oznaczony jako  $\mathbf{Q}$ .



gdzie zdefiniowano

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dv \quad (7.29b)$$

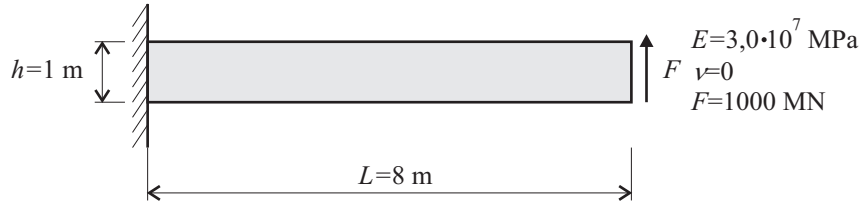
$$\mathbf{G} = - \int_{S_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_L \, ds \quad (7.29c)$$

$$\mathbf{f} = \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^0 \, ds + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, dv \quad (7.29d)$$

$$\mathbf{q} = - \int_{S_u} \mathbf{N}_L^T \mathbf{u}^0 \, ds \quad (7.29e)$$

Końcowy wynik otrzymamy, rozwiązując (7.29a), i wykorzystując  $\mathbf{Q}$  we wzorze (7.24), dla obliczenia aproksymacji odpowiednich funkcji przemieszczeń.

**Przykład 7.2.** Obliczymy przemieszczenia dla tarczy wspornikowej pokazanej na rys. 7.6.



Rys.7.6. Tarcza analizowana w przykładzie 7.2

Tarcza była analizowana w płaskim stanie naprężenia. Przyjęto siatkę węzłów równomiernie rozłożonych – 5 węzłów w kierunku wysokości i 11 węzłów w kierunku długości tarczy. Całkowanie numeryczne wykonywano za pomocą wzoru prostokątów, przyjmując podział obszaru całkowania na  $10 \times 10$  podobszarów.

Przyjęto funkcję wagową w postaci

$$w(s) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{s^2}{(\alpha d)^2}\right) - \exp\left(-\frac{d^2}{(\alpha d)^2}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{d^2}{(\alpha d)^2}\right)} & \text{jeśli } s \leq d \\ 0 & \text{jeśli } s > d \end{cases} \quad (7.30)$$

gdzie obecnie  $s = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \|$  oraz  $\alpha = \frac{1}{3}$  i  $d = 2m$ .

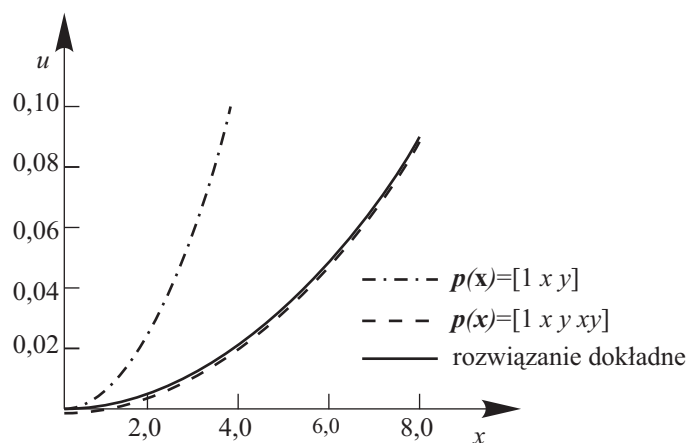
Obliczenia wykonano dla dwóch wektorów bazowych:

kompletnej bazy liniowej

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y] \quad (7.31)$$

i bazy wzbogaconej o jednomian  $xy$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ xy] \quad (7.32)$$



Rys.7.7. Ugięcie tarczy obliczonej w przykładzie 7.2

Wyniki obliczeń ugięcia tarczy przedstawiono na rys. 7.7. Bardzo dobry rezultat osiągnięto dla bazy wzbogaconej. Przy przyjęciu bazy liniowej wyniki znacznie różnią się od rozwiązania dokładnego, co można wytłumaczyć faktem, że taka baza nie może opisać efektu sztywności tarczy na ścinanie (pochodna funkcji kształtu ze względu na jedną zmienną nie zależy od drugiej zmiennej).

# Bibliografia

- [1] H. Askes. *Everything you always wanted to know about the Element-Free Galerkin method and more*. TU Delft, Report No. 03.21.1.31.29, 1997.
- [2] C.A. Brebbia, J. Dominguez. *Boundary Elements, an Introductory Course*. Comp. Mech. Publications, Southampton 1989.
- [3] T. Burczyński. *Wspomaganie komputerowe CAD/CAM. Metoda elementów brzegowych*. WNT, Warszawa 1995.
- [4] R.L. Burden, J.D. Douglas. *Numerical Analysis*. PWS Kent Publ.Comp., Boston 1985.
- [5] Cz. Cichoń, W. Cecot, J. Krok, P. Pluciński. *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wybrane zagadnienia*. Politechnika Krakowska, Kraków 2002.
- [6] M. Dryja, J. i M. Jankowscy. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, Część 1 i 2*. WNT, Warszawa 1988.
- [7] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley&Sons and Inc., 1993.
- [8] B. Olszowski. *Metody numeryczne*. Skrypt Politechniki Krakowskiej, (w opracowaniu), Kraków.
- [9] N.S. Ottosen, H. Peterson. *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall Inc., 1992.
- [10] J.N. Reddy. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw-Hill Book Company, 1986.

# Skorowidz

- Agregacja w MES, 144
- Algorytm metody elementów skończonych(MES), 128
- Aproksymacja:
  - ciągła, 51
  - optymalna, 50
  - punktowa, 51
- Bezelementowa metoda Galerkina, 231
- Element skończony:
  - kratowy, 160
  - ramowy, 183
  - trójkątny stałego odkształcenia, 216
- Funkcja wagowa, 232
- Funkcje bazowe Lagrange'a:
  - dla prostokąta, 73
  - dla trójkąta, 71
- Funkcje bazowe liniowo niezależne, 55
- Funkcje interpolacyjne:
  - Lagrange'a, 63
- Funkcje wagowe (testowe), 55
- Gwiazda różnicowa, 34
- Interpolacja funkcji, 61
- Interpolacja sklejana, 68
- Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych, 21
- Kryteria zbieżności MES dla problemów mechaniki, 214
- Metoda Bubnowa-Galerkina, 99
- Metoda Cranka-Nicolsona, 42
- Metoda kollokacji punktowej, 122, 123
- Metoda najmniejszych kwadratów, 51, 118, 120
- Metoda Petrowa-Galerkina, 98, 118
- Metoda różnic skończonych(MRS), 32
- Metoda Rayleigha-Ritza, 87
- Metoda residuów ważonych, 98
- Metody adaptacji MES, 134
- Metody rozwiązań przybliżonych, 30
- Mnożnik Lagrange'a, 114, 235
- Model:
  - fizyczny, 10
  - matematyczny, 10
- Modele skończenie elementowe, 135
- Niewiadome pierwotne w MES, 136
- Niewiadome wtórne w MES, 136
- Półdyskretny model skończenie elementowy, 225
- Płaski stan naprężenia/odkształcenia, 209
- Problem brzegowy liniowej teorii sprężystości (LPTS), 205
- Problem samosprężony, 29
- Przepływ ciepła:
  - 1D, 11
  - 2D i 3D, 15
- Przestrzeń energii  $H_A$ , 85
- Równanie operatorowe, 14
- Równanie różnicowe, 34
- Równanie różniczkowe cząstkowe:

- eliptyczne, 33
- hiperboliczne, 47
- paraboliczne, 40
- Rozwiązanie LPTS, 208
- Rozwiązanie MES:
  - płaskiej kratownicy, 159
  - płaskiej ramy, 183
  - przepływu ciepła w 2D, 196
  - równania różniczkowego czwartego rzędu, 176
  - równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, 135
  - tarczy, 215
  - zagadnienia płaskiego LPTS, 211
- Ruchoma metoda najmniejszych kwadratów, 232
- Ruchoma, ważona metoda najmniejszych kwadratów, 232
  
- Słabe (wariacyjne) i silne sformułowanie Bubnowa-Galerkina, 100
- Schemat różnicowy, 35
- Sformułowanie:
  - globalne, 10, 29
  - lokalne, 10, 29
- Stopnie swobody:
  - fizyczne, 57
  - matematyczne, 57
  
- Tablica topologii, 128
- Trójkąt Pascala, 74
- Transformacja w MES, 162
- Twierdzenie:
  - Gaussa o dywergencji, 18
  - Greena-Gaussa, 18
  - o funkcjach liniowo niezależnych, 55
  - o minimum funkcjonału, 83
  - o wielomianie Hermita, 76
  - Weierstrassa, 52
  
- Układ współrzędnych:
  - globalny, 160
  - lokalny, 137
- Ustalony przepływ ciepła, 205
  
- Warunek brzegowy:
  - kinematyczny, 14, 24
  - naturalny, 24
  - podstawowy, 24
  - statyczny, 14, 25
- Wzór różnicowy:
  - drugiego rzędu, 34
  - pierwszego rzędu, 33
  
- Zbieżność MES, 133

## Dodatek A

# Podstawowe pojęcia i definicje w analizie funkcjonalnej

- A1. **Przestrzeń wektorowa liniowa** nad zbiorem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  jest to zbiór wektorów abstrakcyjnych (np. sekwencji liczb lub funkcji  $u, v, w, \dots$ ), w którym wprowadzono dwa działania dodawania wektorów i mnożenia wektora przez liczbę.
- A2. **Transformacja  $T$**  (nazywana też równoważnie *odwzorowaniem*, *operatorem*, *funkcją abstrakcyjną*) z przestrzeni wektorowej  $U$  do innej przestrzeni wektorowej  $V$  jest to przypisanie każdemu elementowi  $u \in U$  w sposób jednoznaczny elementu  $v \in V$ , co zapisujemy  $u = Tv$  lub  $T : U \rightarrow V$ .  
Transformacja  $T : U \rightarrow V$  nazywa się liniową wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2) \quad (\text{A.1})$$

- A3. **Formą liniową** lub **funkcjonałem liniowym** nazywamy transformację liniową  $l$  z liniowej przestrzeni wektorowej  $U$  do przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

**Przykład A.1.** Funkcjonał liniowy w  $V$

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

gdzie  $v(x) \in V = L_2[0, 1]$  – zbiór funkcji całkownych z kwadratem ( $\int_0^1 |v(x)|^2 dx < \infty$ ) w przedziale domkniętym  $[0, 1]$ , a  $f$  jest dowolną funkcją.

**Przykład A.2.** Forma liniowa dla  $v$  należącego do przestrzeni skończonej wymiarowej  $L_2[0, 1]$  z bazą  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i$$

ma postać

$$l(v) = \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

gdzie

$$b_i = \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx$$

A4. **Formą dwuliniową**, oznaczoną jako  $B(u, v)$ , nazywamy operator  $B : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , który odwzorowuje pary  $(u, v)$ ,  $u \in U, v \in V$  w  $\mathbb{R}$  i spełnia warunek analogiczny do (A.1) (zbiór  $U \times V$  nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów  $U$  i  $V$ ).

**Przykład A.3.** Formę dwuliniową  $B(u, v)$ ,  $u, v \in C^2(\Omega)$  dla równania różniczkowego

$$-\nabla^2 u = f \quad \text{w } \Omega \in \mathbb{R}^3$$

definiujemy wzorem

$$B(u, v) = - \int_{\Omega} \nabla^2 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v \, d\Omega - \oint_{\Gamma} (\nabla u)^T \mathbf{n} v \, ds$$

gdzie  $\nabla$  jest oznaczeniem wektora gradientu i  $\mathbf{n}$  jest wektorem jednostkowym, normalnym do brzegu  $\Gamma$  obszaru  $\Omega$ . Forma  $B(u, v)$  jest liniowa

ze względu na  $u$  i  $v$ . Jest ona również *symetryczna*, jeśli druga całka znika na brzegu  $\Gamma$ . Wówczas

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v \, d\Omega$$

jest symetryczną formą dwuliniową.

**Przykład A.4.** Formę dwuliniową możemy też napisać w przestrzeni skończenie wymiarowej wykorzystując bazy przestrzeni  $U$  i  $V : \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$  oraz  $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ . Elementy  $u$  i  $v$  tych przestrzeni wyrażają wówczas wzory

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \quad v = \sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j$$

i forma dwuliniowa jest w postaci

$$\begin{aligned} B(u, v) &= B \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i, \sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j B(\Phi_i, \Psi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j b_{ij} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\beta} \quad \text{gdzie} \quad b_{ij} = B(\Phi_i, \Psi_j) \end{aligned}$$

Macierz  $\mathbf{B}$  przedstawia formę dwuliniową ze względu na bazy  $\{\Phi_i\}$  i  $\{\Psi_j\}$ .

A5. **Forma kwadratowa** jest to funkcjonal  $Q(u), u \in U$ , taki że  $Q(\alpha u) = \alpha^2 Q(u)$ , gdzie  $U$  jest liniową przestrzenią wektorową, a  $\alpha$  jest skalarą. Na przykład  $Q(u) = B(u, u)$ .

A6. **Norma w liniowej przestrzeni wektorowej.**

Niech  $V$  będzie liniową przestrzenią wektorową na zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Norma w przestrzeni wektorowej  $V$  jest to funkcja, która transformuje każdy element  $u \in V$  w liczbę rzeczywistą  $\|u\|$ , taką że  $\|u\|$  spełnia następujące warunki:

- (1)  $\|u\| \geq 0$  i  $\|u\| = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $u = 0$
- (2)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- (3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad u, v \in V$

(A.2)



**Przykład A.5.** Przykładami norm są:

$$\text{norma } L_\infty : \|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : 0 \leq t \leq t_0\}$$

$$\text{norma } L_2 : \|x\|_0 = \left[ \int_0^{t_0} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

A7. **Iloczyn skalarny** w liniowej przestrzeni wektorowej  $V$  jest formą dwuliniową określoną na iloczynie kartezjańskim  $V \times V$ , która z każdą parą wektorów  $u, v \in V$  wiąże skalar, oznaczony  $(u, v)$ , i spełnia następujące warunki

$$\begin{aligned} (1) \quad & (u, v) = (v, u) \\ (2) \quad & (\alpha u, v) = \alpha(u, v) \\ (3) \quad & (u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \\ (4) \quad & (u, u) > 0 \text{ i } (u, u) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy jeśli } u = 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

dla każdego  $u, u_1, u_2, v \in V$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Przykład A.6.** Iloczyn skalarny  $L_2(\Omega)$  funkcji  $u, v \in V = L_2(\Omega)$  całkowlanych z kwadratem

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv d\Omega$$

Iloczyn skalarny jest związany z normą wzorem

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{A.4}$$

Tak obliczona norma nosi nazwę *metryki naturalnej generowanej przez iloczyn skalarny*.

A8. **Przestrzeń Hilberta** jest to przestrzeń unormowana zupełna, w której zdefiniowana jest metryka naturalna generowana przez iloczyn skalarny.

**Przykład A.7.** Przestrzeń euklidesowa  $n$ -wymiarowa jest przestrzenią Hilberta. Przestrzeń Hilberta pierwszego rzędu  $H^1(\Omega)$  jest przestrzenią z iloczynem skalarnym uwzględniającym także pochodne pierwszego rzędu

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega$$

Przez analogię do powyższego wzoru będziemy definiowali przestrzeń Hilberta  $m$  rzędu, włączając do definicji iloczynu skalarnego pochodne do rzędu  $m$  włącznie. Dodatkowo oznaczymy przez  $H_0^m(\Omega)$  przestrzeń Hilberta, będącą podprzestrzenią funkcji z  $H^m(\Omega)$ , które znikają razem ze swoimi pochodnymi aż do rzędu  $m - 1$  na granicy obszaru  $\Omega$ .

A9. **Operator liniowy  $A$  nazywamy symetrycznym** w  $\mathcal{D}_A \subset H$ , jeśli dla każdej pary elementów  $u, v \in \mathcal{D}_A$  zachodzi równość

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (\text{A.5})$$

*Operator symetryczny nazywamy dodatnim* w  $\mathcal{D}_A$ , jeśli dla wszystkich  $u$  w  $\mathcal{D}_A$  spełnione są relacje

$$(Au, u) \geq 0 \quad \text{i} \quad (Au, u) = 0 \text{ oznacza, że } u = 0 \text{ w } \mathcal{D}_A \quad (\text{A.6})$$

Jeśli jeszcze możemy dobrać stałą  $\gamma > 0$  taką, że dla wszystkich  $u \in \mathcal{D}_A$  zachodzi relacja

$$(Au, u) \geq \gamma \|u\|^2 \quad (\text{A.7})$$

to mówimy, że operator  $A$  jest dodatnio określony w  $\mathcal{D}_A$ .

**Przykład A.8.** Rozważmy operator  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ . Niech  $\mathcal{D}_A$  jest przestrzenią funkcji  $u(x)$  z ciągłą pierwszą pochodną w  $x \in (0, 1)$ , z warunkami  $u(0) = u(1) = 0$ . Obliczmy

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^1 \left( -\frac{d^2 u}{dx^2} \right) v \, dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \left( -\frac{du}{dx} v \right) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 u \left( -\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \left[ -\frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u \right] \Big|_0^1 = \\ &= (u, Av) + \left[ -\frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u \right] \Big|_0^1 = (u, Av) \end{aligned}$$

z warunkami  $v(0) = v(1) = 0$ . Warunek  $(Au, v) = (u, Av)$  oznacza, że operator jest samosprzężony.

Operator  $A$  jest również dodatni. Jeśli bowiem w pierwszym całkowaniu przez części przyjmiemy  $u = v$  oraz  $v(0) = v(1) = 0$ , to otrzymamy

$$A(u, v) = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \quad \text{i} \quad (Au, u) = 0 \quad \text{dla} \quad u = 0$$

Można wykazać, że operator  $A$  jest też dodatnio określony.

Operator  $A \equiv -\nabla^2 \equiv -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  jest innym przykładem operatora dodatnio określonego w przestrzeni  $\mathcal{D}_A$ , będącej zbiorem funkcji należących do  $C^2(\Omega)$  i znikających na brzegu  $\Gamma$ .

## Dodatek B

# Wzory Rungego-Kutty do numerycznego rozwiązania problemu początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych

B1. **Problem początkowy dla równania pierwszego rzędu.** Przyjmujemy, że *problem początkowy jest dobrze postawiony*.

### Definicja

Problem początkowy

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'(x) = f(x, y) \quad a < x < b \quad (\text{B.1})$$

jest dobrze postawiony, jeśli:

- 1) *istnieje jednoznaczne rozwiązanie*  $y(x)$  problemu
- 2) zawsze można dobrać takie stałe dodatnie  $\varepsilon$  i  $k$ , że jednoznaczne rozwiązanie  $z(x)$  problemu

$$\begin{aligned} z'(x) &= f(x, z) + \delta(x) & a < x < b \\ z(a) &= \alpha + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

spełnia warunek

$$|z(x) - y(x)| < k\varepsilon \quad \text{dla każdego } a \leq x \leq b$$

gdzie  $|\varepsilon_0| < \varepsilon$  i  $|\delta(x)| < \varepsilon$  (rozwiązanie jest stabilne).

**B2. Wzory Rungego-Kutty IV rzędu** dla przybliżonego rozwiązania równania pierwszego rzędu. Dla każdego  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  obliczamy:

$$\begin{aligned} y(a) &\equiv y_0 = \alpha \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{B.3}$$

gdzie  $h$  wyznacza węzły rozwiązania dyskretnego.

Lokalny błąd obcięcia metody jest rzędu  $O(h^4)$  pod warunkiem, że rozwiązanie ma ciągłą pochodną aż do stopnia piątego.

**Przykład B.1.** Rozwiążemy problem początkowy

$$\begin{aligned} y'(x) &= x + y(x) \\ y(0) &\equiv y_0 = 1 \end{aligned}$$

przyjmując  $h = 0,2$  i wykonując dwa kroki obliczeń

$i=0$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = h \cdot (x_0 + y_0) = 0,2 \cdot (0 + 1) = 0,200$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot \left[\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2\right) + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2\right)\right] = 0,240$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,2 \cdot \left[\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2\right) + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,240\right)\right] = 0,244$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0,2 \cdot [(0 + 0,2) + (1 + 0,244)] = 0,289$$

$$y_1 \equiv y(0,2) = 1,0 + \frac{1}{6}(0,200 + 2 \cdot 0,240 + 2 \cdot 0,244 + 0,289) = 1,243$$

$\underline{i=1}$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0,200 + 1,243) = 0,289$$

$$k_2 = 0,2 \cdot [0,300 + (1,243 + 0,144)] = 0,337$$

$$k_3 = 0,2 \cdot [0,300 + (1,243 + 0,168)] = 0,342$$

$$k_4 = 0,2 \cdot [0,400 + (1,243 + 0,342)] = 0,397$$

$$y_2 \equiv y(0,4) = 1,243 + \frac{1}{6}(0,289 + 2 \cdot 0,337 + 2 \cdot 0,342 + 0,397) = 1,584$$

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

skąd mamy  $y(0,4) = 1,58364$ .

**B3. Problem początkowy dla równania drugiego rzędu.** Również i w tym przypadku przyjmujemy, że problem początkowy

$$\begin{aligned} z''(x) &= f(x, y, y') & a < x < b \\ y(a) &= \alpha \\ y'(a) &= \beta \end{aligned} \tag{B.4}$$

jest dobrze postawiony, tzn. że rozwiązanie  $y(x)$  istnieje, jest jednoznaczne i stabilne.

**B4. Metoda Rungego-Kutty-Nyströma** dla przybliżonego rozwiązania równania drugiego rzędu. Dla każdego  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  obliczamy:

$$\begin{aligned} y(a) &\equiv y_0 = \alpha \\ y'(a) &\equiv y'_0 = \beta \\ k_1 &= \frac{1}{2}hf(x_i, y_i, y'_i) \\ k_2 &= \frac{1}{2}hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + K, y'_i + k_1) \quad \text{gdzie } K = \frac{1}{2}h(y'_i + \frac{1}{2}k_1) \tag{B.5} \\ k_3 &= \frac{1}{2}hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + K, y'_i + k_2) \\ k_4 &= \frac{1}{2}hf(x_i + h, y_i + L, y'_i + 2k_3) \quad \text{gdzie } L = h(y'_i + k_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &= x_i + h \\
 y_{i+1} &= y_i + h(y'_i + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)) \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

**Przykład B.2.** Rozwiążemy problem początkowy

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \frac{1}{2}(x + y(x) + y'(x) + 2) \\
 y(0) &= 0 \\
 y'(0) &= 0
 \end{aligned}$$

przyjmując  $h = 0,2$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 0,05(x_n + y_n + y'_n + 2) \\
 k_2 &= 0,05(x_n + 0,1 + y_n + K + y'_n + k_1 + 2) \quad K = 0,1(y'_n + \frac{1}{2}k_1) \\
 k_3 &= 0,05(x_n + 0,1 + y_n + K + y'_n + k_2 + 2) \\
 k_4 &= 0,05(x_n + 0,2 + y_n + L + y'_n + 2k_3 + 2) \quad L = 0,2(y'_n + k_3)
 \end{aligned}$$

Wykonując odpowiednie podstawienia obliczymy

$$\begin{aligned}
 k_2 &= 0,05(1,0525(x_n + y_n) + 1,152y'_n + 2,205) \\
 k_3 &= 0,05(1,055125(x_n + y_n) + 1,160125y'_n + 2,21525) \\
 k_4 &= 0,05(1,11606375(x_n + y_n) + 1,32761375y'_n + 2,4436775)
 \end{aligned}$$

co prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + 0,0103588(x_n + y_n) + 0,2110421y'_n + 0,0214008 \\
 y'_{n+1} &= y'_n + 0,1055219(x_n + y_n) + 0,1158811y'_n + 0,2214030
 \end{aligned}$$

Wykorzystanie tych wzorów dla kolejnych wartości  $x_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , daje wyniki

$n = 1$	$x_1 = 0,2$	$y_1 = 0,0214008$	$y'_1 = 0,2214030$
$n = 2$	$x_2 = 0,4$	$y_2 = 0,0918204$	$y'_2 = 0,4918250$
$n = 3$	$x_3 = 0,6$	$y_3 = 0,2221117$	$y'_3 = 0,8221190$

B5. **Zastosowanie systemu MATHCAD** do rozwiązania przybliżonego problemu początkowego dla równania różniczkowego rzędu  $n$ .

Równanie różniczkowe rzędu  $n$  rozwiązujemy, zamieniając je uprzednio na  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu z odpowiednimi warunkami początkowymi.

Następnie korzystamy z komendy:

$$W := rkfixed(v_0, a, b, N, F) \quad (\text{B.6})$$

gdzie:

$v_0$  – wektor kolumnowy  $n$  warunków początkowych,

$a, b$  – brzegi obszaru rozwiązania,

$N$  – liczba podziałów obszaru rozwiązania na podprzedziały,

$F$  – wektor prawych stron układu  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu  $F_i(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$W$  – macierz rozwiązania, gdzie pierwsza kolumna ( $W^{<1>}$ ) zawiera współrzędne  $x$  węzłów, a kolumny następne zawierają wartości funkcji  $y_1, \dots, y_n$  w węzłach i kolejnych pochodnych funkcji problemu wyjściowego.

**Przykład B.3.** Problem początkowy dla równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x)x + y(x)x^2 &= 0 \\ y(3) &= 1 \\ y'(3) &= 0 \end{aligned}$$

zamieniamy na dwa problemy początkowe dla równań różniczkowych pierwszego rzędu podstawiając  $y_1(x) = y(x)$  i  $y_2(x) = y'(x)$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_1(3) &= 1 \\ y_2'(x) &= 2y_2(x)x - y_1(x)x^2 \\ y_2(3) &= 0 \end{aligned}$$



Rozwiązując powyższy układ dwóch równań, należy zdefiniować (dla  $N = 10$ )

$$ORIGIN \equiv 1$$

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ 2y_2x - y_1x^2 \end{bmatrix}$$

$$W := rkfixed \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 3, 0, 10, f \right)$$

Wydruk macierzy  $W$  ma postać

	1	2	3
1	3	1	0
2	2.7	0.767	0.966
3	2.4	0.49	0.787
4	2.1	0.296	0.506
5	1.8	0.177	0.305
6	1.5	0.105	0.182
7	1.2	0.062	0.111
8	0.9	0.036	0.071
9	0.6	0.018	0.049
10	0.3	$5.222 \cdot 10^{-3}$	0.038
11	0	$-5.486 \cdot 10^{-3}$	0.035

W kolejnych kolumnach tabeli znajdują się wartości  $x$ ,  $y(x)$  i  $y'(x)$ .

## Dodatek C

# Metoda strzału do numerycznego rozwiązywania problemu brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu

C1. **Definicja problemu.** Przyjmiemy, że problem brzegowy

$$\begin{aligned}y''(x) &= f(x, y, y') & a < x < b \\y(a) &= \alpha \\y(b) &= \beta\end{aligned}\tag{C.1}$$

ma rozwiązanie  $y(x)$ , które istnieje, jest jednoznaczne i stabilne. Założymy dalej, że równanie (C.1)<sub>1</sub> jest *liniowe*, co oznacza, że  $f(x, y, y')$  może być przedstawione w formie

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)\tag{C.2}$$

Jeśli dodatkowo,  $p(x)$ ,  $q(x)$  i  $r(x)$  są ciągłe w  $[a, b]$  oraz  $q(x) > 0$  w  $[a, b]$ , to wyjściowy problem brzegowy ma rozwiązanie jednoznaczne. Rozwiązanie przybliżone możemy otrzymać metodą strzału.

C2. **Metoda strzału (ang. *linear shooting method*).** Rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{aligned} y''(x) &= p(x)y' + q(x)y + r(x) & a < x < b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

otrzymujemy rozwiązując dwa problemy początkowe

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) & a < x < b \\ y_1(a) &= \alpha \\ y_1'(a) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

oraz

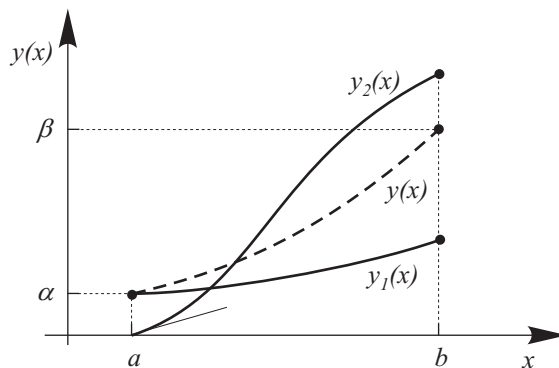
$$\begin{aligned} y_2''(x) &= p(x)y_2' + q(x)y_2 & a < x < b \\ y_2(a) &= 0 \\ y_2'(a) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Rozwiązanie wyjściowego problemu (C.3) ma postać

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \quad (\text{C.6})$$

pod warunkiem, że  $y_2(b) \neq 0$ .

Graficzna interpretacja metody jest pokazana na rys. C.1.



Rys.C.1. Interpretacja graficzna metody strzału

**Przykład C.1.** Rozwiążemy problem brzegowy

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + \frac{\sin(\ln x)}{x^2} \quad 1 < x < 2$$

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = 2$$

który ma dokładne rozwiązanie

$$y(x) = 1,139207x - \frac{0,0392070}{x^2} - 0,3 \sin(\ln x) - 0,1 \cos(\ln x)$$

$x_i$	$y_{1,i}$	$y_{2,i}$	$y_i$
1,0	1,000	0,000	1,000
1,1	1,009	0,091	1,093
1,2	1,032	0,169	1,187
1,3	1,067	0,236	1,283
1,4	1,109	0,297	1,381
1,5	1,158	0,352	1,481
1,6	1,212	0,403	1,582
1,7	1,271	0,451	1,685
1,8	1,333	0,497	1,789
1,9	1,398	0,541	1,894
2,0	1,465	0,583	2,000

Tabela C.1. Wyniki obliczeń przykładu

Dwa problemy początkowe mają postać

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y_1'(x) + \frac{2}{x^2}y_1(x) + \frac{\sin(\ln x)}{x^2} \quad 1 < x < 2$$

$$y_1(1) = 1$$

$$y_1'(1) = 0$$

oraz

$$y_2''(x) = -\frac{2}{x}y_2'(x) + \frac{2}{x^2}y_2(x) \quad 1 < x < 2$$

$$y_2(1) = 0$$

$$y_2'(1) = 1$$

W tab. C.1 zestawiono wyniki obliczeń  $y_1(x), y_2(x)$  metodą Rungego-Kutty-Nyströma (dla  $h = 0,1$ ) i  $y(x)$  (według wzoru (C.6)). Obliczenia były wykonywane z dokładnością do 9 cyfr znaczących. Różnice pomiędzy obliczeniami przybliżonymi a dokładnymi wystąpiły dopiero na ósmym miejscu znaczącym.

Jeśli w problemie brzegowym (C.1) zamiast podstawowych warunków na obu brzegach mamy mieszane warunki brzegowe w postaci

$$\begin{aligned}y(a) &= \alpha \\ y'(b) &= \beta\end{aligned}\tag{C.7}$$

to dwa problemy początkowe mają formę

$$\begin{aligned}y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) &= 0 & a < x < b \\ y_1(b) &= 0 \\ y_1'(b) &= \beta\end{aligned}\tag{C.8}$$

oraz

$$\begin{aligned}y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0 & a < x < b \\ y_2(b) &= 1 \\ y_2'(b) &= 0\end{aligned}\tag{C.9}$$

Rozwiązanie wyjściowego problemu brzegowego z warunkami brzegowymi (C.7) ma postać

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\alpha - y_1(a)}{y_2(a)} y_2(x)\tag{C.10}$$

pod warunkiem, że  $y_2(a) \neq 0$ .

## Dodatek D

# Podstawowe działania w rachunku macierzowym

D1. **Macierze.** Macierz prostokątną  $\mathbf{A}$  o wymiarach  $m \times n$  ( $m$  wierszy w  $n$  kolumnach) definiujemy:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

gdzie  $a_{ij}$  jest elementem  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny macierzy.

D2. **Wiersze i kolumny macierzy.** Macierz składająca się z jednego wiersza jest *macierzą jednowierszową*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Macierz składająca się z pojedynczej kolumny jest *macierzą kolumnową* (nazywaną też *wektorem*):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \equiv [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1}]^T \quad (\text{D.3})$$

D3. **Dodawanie i odejmowanie macierzy.** Dodawanie i odejmowanie macierzy może zostać wykonane *tylko na macierzach o takich samych wymiarach*. Działanie to polega na wykonaniu dodawania lub odejmowania właściwych elementów macierzy, jak w przykładzie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy jest *przemienne*:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{D.5})$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy jest *łączne*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \quad (\text{D.6})$$

D4. **Mnożenie macierzy przez skalar.** Macierz liczbowa o wymiarach  $1 \times 1$  jest *skalarem*. Niech  $k$  będzie skalar, wtedy:

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Na przykład jeśli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

wtedy:

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 4\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 24 & 30 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

D5. **Mnożenie macierzy.** Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  ma wymiar  $m \times p$ , macierz  $\mathbf{B}$  ma wymiar  $p \times n$ , to macierz  $\mathbf{C}$ , będąca wynikiem mnożenia  $\mathbf{AB}$ , ma wymiar  $m \times n$ . Element  $i$ -tego wiersza oraz  $j$ -tej kolumny macierzy  $\mathbf{C}$ , możemy zapisać wzorem:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \quad (\text{D.8})$$

Na przykład mnożenie

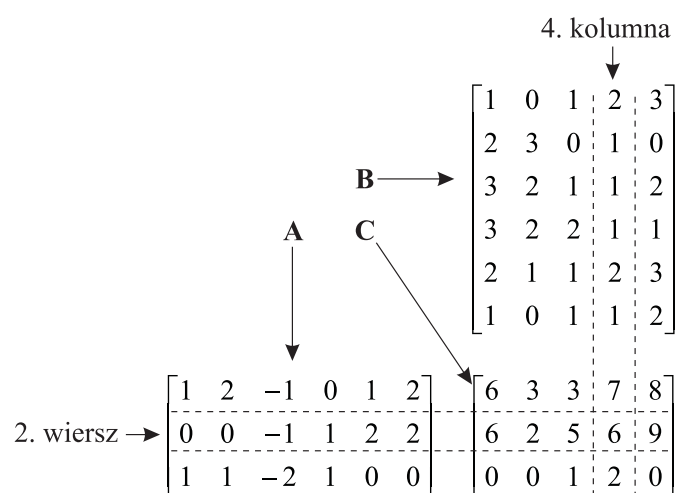
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (\text{D.9a})$$

$(2 \times 2) \quad (2 \times 3) \quad (3 \times 2)$

w rozbiciu na poszczególne elementy macierzy ma postać

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9b})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$



Rys.D.1. Ilustracja mnożenia macierzy  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$

Sposób mnożenia macierzy jest zilustrowany na rys. D.1. Jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10a})$$



wtedy

$$\begin{matrix} \mathbf{C} & = & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (3 \times 5) & & (3 \times 6) & (6 \times 5) \end{matrix} \quad (\text{D.10b})$$

Na rys. D.1 pokazano jak obliczany jest każdy element macierzy w powiązaniu z wierszem i kolumną, z których powstaje. Na przykład:

$$c_{24} = \sum_{k=1}^6 a_{2k} b_{k4} = 6 \quad (\text{D.10c})$$

### Reguły dotyczące mnożenia macierzy

1. Mnożenie macierzy nie jest przemienne

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{D.11})$$

Na przykład

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Dwie macierze  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  mogą zostać pomnożone przez siebie tylko wtedy, gdy są *konforemne*, tzn. liczba kolumn macierzy  $\mathbf{A}$  musi być równa liczbie wierszy macierzy  $\mathbf{B}$ .

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (m \times p) & (l \times n) & = & (m \times n) \end{matrix} \quad \text{tylko jeśli } p = l \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & = & \mathbf{D} \\ (m \times p) & (l \times q) & (r \times x) & = & (m \times n) \end{matrix} \quad \text{tylko jeśli } q = r \text{ i } p = l \quad (\text{D.13})$$

3. Mnożenie macierzy jest łączne

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{D.14})$$

Na przykład

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

D6. **Transpozycja macierzy.** *Transpozycja* macierzy polega na przestawieniu wierszy macierzy w miejsce kolumn (i odwrotnie) z zachowaniem ich kolejności. Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  ma wymiar  $m \times n$ , to  $\mathbf{A}^T$  ma wymiar:  $n \times m$ . Na przykład jeżeli

$$\mathbf{A} \quad (2 \times 3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

wtedy

$$\mathbf{A}^T \quad (3 \times 2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Z definicji transpozycji macierzy jest oczywiste, że

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (\text{D.17})$$

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T \quad (\text{D.18})$$

Niech macierz  $\mathbf{C}$  będzie wynikiem mnożenia  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  oraz  $\mathbf{D}$  będzie wynikiem mnożenia  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  jak na rys. D.2.

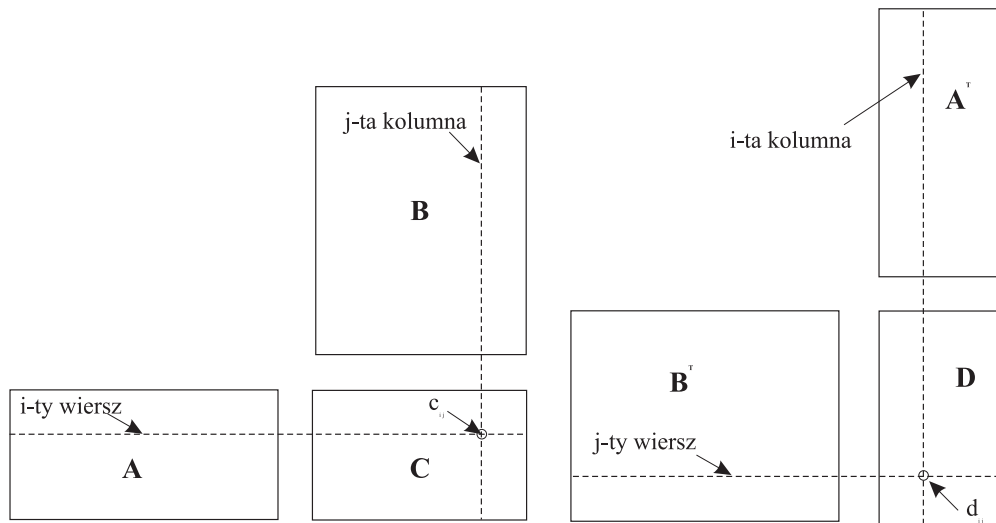
Jak widać na rys. D.2 elementy  $c_{ij}$  i  $d_{ji}$  są sumą iloczynów elementów pochodzących z tych samych wierszy i kolumn (lub kolumn i wierszy), co powoduje, że są sobie równe. Zatem możemy zapisać

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{D} \quad (\text{D.19})$$

czyli

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{D.20})$$

Powyższe równanie może zostać uogólnione tak, aby można było transponować wynik mnożenia więcej niż dwu macierzy. Poniżej przedstawiono

Rys.D.2. Ilustracja mnożenia macierzy  $C = AB$  oraz  $D = B^T A^T$ 

przykład dla czterech macierzy używając reguły łączności

$$\begin{aligned}
 (ABCD)^T &= D^T(ABC)^T \\
 &= D^T C^T (AB)^T \\
 &= D^T C^T B^T A^T
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Na przykład dla macierzy  $C = AB$  obliczymy  $C^T$ , gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Rozwiązanie 1

$$\begin{aligned}
 C = AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 C^T &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Rozwiązanie 2

$$C^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

## D7. Macierze specjalne

**Macierz kwadratowa.** Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  ma wymiar  $m \times n$  i  $m = n$ , to nazywamy ją *macierzą kwadratową*.

Jeżeli macierz kwadratowa jest *symetryczna*, to spełnione są zależności

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ dla } i \neq j \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{D.23})$$

Przykład macierzy symetrycznej  $\mathbf{A}$  o wymiarze  $3 \times 3$

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & = & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \\ (3 \times 3) & & \end{matrix} \quad (\text{D.24})$$

Jeżeli macierz kwadratowa jest *antysymetryczna (skośnie symetryczna)*, to spełnione są zależności

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ dla } i \neq j \quad (\text{D.25})$$

Przykład macierzy antysymetrycznej  $\mathbf{A}$  o wymiarze  $3 \times 3$

$$\begin{matrix} \mathbf{A} \\ (3 \times 3) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ -5 & 6 & 2 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

**Macierz zerowa.** Jeżeli wszystkie elementy macierzy  $\mathbf{A}$  wynoszą zero, wtedy  $\mathbf{A}$  nazywamy *macierzą zerową*.

**Macierz diagonalna (tylko dla macierzy kwadratowych).** Jeżeli dla macierzy  $\mathbf{A}$  spełniona jest zależność

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \text{ dla } i \neq j \\ a_{ij} &\neq 0 \text{ dla } i = j \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

wtedy  $\mathbf{A}$  nazywamy *macierzą diagonalną*. Przykład macierzy diagonalnej  $\mathbf{A}$  o wymiarze  $5 \times 5$ :

$$\begin{matrix} \mathbf{A} \\ (5 \times 5) \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{D.28})$$

**Macierz jednostkowa.** Jeżeli wszystkie elementy macierzy diagonalnej leżące na jej przekątnej są równe 1, to macierz taką nazywamy *macierzą jednostkową*. Przykład macierzy jednostkowej  $\mathbf{I}$  o wymiarze  $5 \times 5$

$$\begin{matrix} \mathbf{I} \\ (5 \times 5) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  oraz macierz  $\mathbf{I}$  mają ten sam wymiar, to spełniona jest zależność

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad (\text{D.30})$$

**Macierz skalarna.** Jeżeli wszystkie elementy macierzy diagonalnej leżące na jej przekątnej są równe określonemu skalarowi (liczbie), to macierz taką nazywamy *macierzą skalarną*. Przykład macierzy skalarnej  $\mathbf{A}$

o wymiarze  $5 \times 5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{I} \quad (\text{D.31})$$

**Macierz trójkątna (tylko dla macierzy kwadratowych).** Jeżeli wszystkie elementy macierzy leżące nad jej główną przekątną są równe zero

$$a_{ij} = 0 \text{ dla } i < j \quad (\text{D.32})$$

to macierz taką nazywamy *macierzą dolnotrójkątną*. Przykład macierzy dolnotrójkątnej  $\mathbf{A}$  o wymiarze  $5 \times 5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.33})$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy leżące pod jej główną przekątną są równe zero

$$a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j \quad (\text{D.34})$$

to macierz taką nazywamy *macierzą górnątrójkątną*. Przykład macierzy górnątrójkątnej  $\mathbf{A}$  o wymiarze  $5 \times 5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.35})$$

**D8. Podział macierzy na podmacierze.** Macierz może zostać podzielona na mniejsze macierze nazywane *podmacierzami*. Przykład

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{D.36})$$

gdzie podmacierze mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= a_{33} \end{aligned}$$

D9. **Macierz ortogonalna.** Jeżeli macierz transponowana  $\mathbf{A}^T$  jest równa macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}^{-1}$ , to  $\mathbf{A}$  nazywamy *macierzą ortogonalną*

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{D.37})$$

Z własności macierzy ortogonalnej wynika:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{D.38})$$

D10. **Wyznacznik macierzy.** Wyznacznik macierzy możemy obliczyć dla macierzy kwadratowej  $\mathbf{A}_{m \times m}$  i jest nim liczba, którą oznaczamy na 3 sposoby

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad (\text{D.39})$$

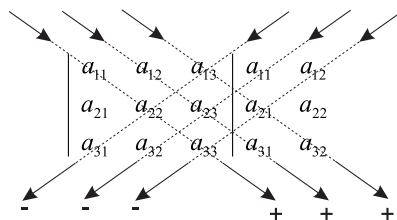
Macierz, której wyznacznik jest równy 0, nazywa się macierzą osobliwą.

**Obliczanie wyznacznika dla macierzy o wymiarze  $2 \times 2$**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{D.40})$$

**Obliczanie wyznacznika z zastosowaniem schematu Sarrusa dla macierzy o wymiarze  $3 \times 3$ .** Jak łatwo zauważyć na rys. D.3, iloczyny potrzebne do obliczenia wyznacznika możemy uzyskać z zastosowaniem tzw. *schematu Sarrusa*

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$



Rys.D.3. Wybór elementów iloczynów w schemacie Sarrusa

### Obliczanie wyznacznika z zastosowaniem twierdzenia Laplace'a

Definicje uzupełniające:

**Podwyznacznikiem** danego wyznacznika nazywamy każdy wyznacznik, który otrzymujemy usuwając z macierzy danego wyznacznika pewną liczbę wierszy i taką samą liczbę kolumn, zachowując kolejność pozostałych elementów.

**Minorem wyznacznika przynależnym do elementu  $a_{ik}$  macierzy** mazywamy podwyznacznik danego wyznacznika, który otrzymamy usuwając z macierzy danego wyznacznika wiersz oraz kolumnę, na przecięciu których znajduje się ten element.

**Dopełnieniem algebraicznym  $\bar{A}_{ik}$  elementu  $a_{ik}$  wyznacznika** nazywamy iloczyn minora tego wyznacznika, przynależnego do elementu  $a_{ik}$ , oraz czynnika  $(-1)^{i+k}$ .

**Twierdzenia Laplace'a.** Wyznacznik jest równy sumie iloczynów każdego elementu dowolnego wiersza lub kolumny i odpowiadającego temu elementowi dopełnienia algebraicznego

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \bar{A}_{ik} \quad (\text{D.42})$$

Rozwinięcie wyznacznika macierzy o wymiarze  $3 \times 3$ , według twierdzenia Laplace'a, względem elementów pierwszego wiersza przyjmuje postać



$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
&= a_{11}\overline{A}_{11} + a_{12}\overline{A}_{12} + a_{13}\overline{A}_{13} = \\
&= a_{11}(-1^{1+1}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1^{1+2}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&+ a_{13}(-1^{1+3}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}
\end{aligned} \tag{D.43}$$

### Właściwości wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy wyznacznikowi macierzy względem niej transponowanej

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \tag{D.44}$$

2. Wyznacznik z iloczynu macierzy równy jest iloczynowi wyznaczników

$$|(\mathbf{A}\mathbf{B})| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \tag{D.45}$$

3. Przystawienie dwóch wierszy (lub kolumn) w macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika tej macierzy na przeciwny.
4. Wyznacznik macierzy o dwu jednakowych wierszach (lub kolumnach) jest równy zero.
5. Mnożąc wiersz (lub kolumnę) macierzy przez liczbę, mnożymy przez tę liczbę cały jej wyznacznik.
6. Wyznacznik macierzy mającej wiersz (lub kolumnę) zerową jest równy zero.
7. Jeżeli w macierzy jeden z wierszy (lub jedna z kolumn) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (lub kolumn), to wyznacznik tej macierzy jest równy zero.
8. Wyznacznik macierzy nie zmieni wartości, jeżeli do jej wiersza (lub kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn).