

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Czesław Cichoń, Witold Cecot, Józef Krok, Piotr Pluciński

**METODY KOMPUTEROWE
W LINIOWEJ MECHANICE KONSTRUKCJI**
Wybrane zagadnienia

Wydanie drugie zmienione



Podręcznik akademicki

Kraków 2009

Spis treści

Rozdział 1. Wstęp	9
(Cz. Cichoń)	
1.1. Zakres podręcznika	9
1.2. Co to jest metoda komputerowa?	10
1.3. Przykład sformułowania silnego i sformułowania słabego	13
1.4. Przykład sformułowania brzegowego	16
(W. Cecot)	
Rozdział 2. Pewne pojęcia i definicje z analizy funkcjonalnej	21
(Cz. Cichoń)	
2.1. Liniowa przestrzeń wektorowa	21
2.2. Transformacja liniowa	22
2.3. Formy: liniowa, dwuliniowa i kwadratowa	25
2.4. Normy w przestrzeni wektorowej	30
2.5. Iloczyn skalarny	33
2.6. Przestrzeń Hilberta	34
2.7. Uogólnione całkowanie przez części	35
Rozdział 3. Modele matematyczne w mechanice	38
(Cz. Cichoń)	
3.1. Twierdzenie Frecheta-Riesz	38
3.2. Operatory: symetryczny, dodatni i dodatnio określony	42
3.3. Sformułowanie słabe (wariacyjne)	43
3.4. Minimum funkcjonału kwadratowego	49
3.5. Przestrzeń energii	51
3.6. Naturalne i podstawowe warunki brzegowe	53
3.7. Niejednorodne warunki brzegowe	58

3.8. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania wariacyjnego	60
3.9. Rozwiązanie przybliżone	61
Rozdział 4. Metody wariacyjne rozwiązań przybliżonych	63
(Cz. Cichoń)	
4.1. Uwagi wstępne	63
4.2. Metoda Rayleigha-Ritza	64
4.3. Metoda residuów ważonych	84
4.3.1. Metoda Bubnowa-Galerkina	86
4.3.2. Metoda najmniejszych kwadratów	100
4.3.3. Metoda kollokacji punktowej	104
4.3.4. Metoda Trefftza	109
(W. Cecot)	
4.4. Uwagi o kompletności funkcji bazowych	110
Rozdział 5. Metoda elementów skończonych	114
(Cz. Cichoń, P. Pluciński)	
5.1. Uwagi wstępne – etapy rozwiązywania problemów za pomocą MES	114
5.2. Podstawowe etapy procedury MES	116
5.2.1. Dyskretyzacja obszaru rozwiązania	116
5.2.2. Interpolacja w elemencie skończonym	117
5.2.3. Składanie rozwiązań z elementów skończonych	119
5.2.4. Istnienie i zbieżność rozwiązania skończenie elementowego	120
5.3. Równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu	126
5.3.1. Model skończenie elementowy w sformułowaniu wariacyjnym	126
5.3.2. Model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina	148
5.4. Analiza statyczna prostej kratownicy	159
5.4.1. Element skończony kratowy	159
5.5. Równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu	167
5.5.1. Model skończenie elementowy w sformułowaniu wariacyjnym	167
5.6. Analiza statyczna belki ciągłej	174
5.6.1. Element skończony belkowy	174
5.7. Analiza statyczna ramy płaskiej	180
5.7.1. Element skończony ramowy	180

5.8.	Równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego	198
5.8.1.	Model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza	199
5.8.2.	Liniowy element trójkątny	203
5.8.3.	Ustalony przepływ ciepła w obszarze dwuwymiarowym	206
5.8.4.	Model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina	211
5.9.	Układ równań MES dla LPTS	213
5.9.1.	Sformułowanie lokalne	213
5.9.2.	Sformułowanie globalne	216
5.9.3.	Układ równań MES	217
5.9.4.	Kryteria zbieżności	221
5.10.	Analiza stanu naprężeń w tarczy	224
5.10.1.	Element skończony trójkątny stałego odkształcenia	225
Rozdział 6. Metoda elementów brzegowych		239
(W. Cecot)		
6.1.	Uwagi wstępne	239
6.2.	Idea MEB na przykładzie problemu dwuwymiarowego	240
6.3.	Metoda brzegowa w zagadnieniu jednowymiarowym	250
6.4.	Metoda brzegowa dla wybranych zagadnień dwuwymiarowych i trójwymiarowych	254
6.4.1.	Wyprowadzenie rozwiązania fundamentalnego	255
6.4.2.	Wyprowadzenie tożsamości Somigliany	256
6.4.3.	Wariacyjne sformułowanie całkowego równania brzegowego	258
6.4.4.	Aproksymacja funkcji brzegowych w narożach	261
6.4.5.	MEB w zagadnieniach teorii sprężystości	262
6.4.6.	MEB dla obszarów nieograniczonych	264
6.5.	Całkowanie w metodzie elementów brzegowych	265
6.6.	Adaptacja w MEB	273
6.7.	Inne metody brzegowe	278
6.7.1.	Pośrednia metoda elementów brzegowych	278
6.7.2.	Metoda Trefftza	280
Rozdział 7. Metoda różnic skończonych		281
(J. Krok)		
7.1.	Uwagi wstępne	281
7.2.	Wprowadzenie do metody różnic skończonych	283
7.2.1.	Uwagi ogólne	283

7.2.2.	Lokalne sformułowanie MRS	285
7.2.3.	Globalne sformułowanie MRS	286
7.3.	Klasyczna MRS	289
7.3.1.	Istota klasycznej MRS	289
7.3.2.	Dobór gwiazd i generacja schematów różnicowych . .	290
7.3.3.	Generacja równań MRS	302
7.3.4.	Uwzględnienie warunków brzegowych	303
7.4.	Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych II rzędu . . .	305
7.5.	Przykłady rozwiązań problemów mechaniki klasyczną MRS .	306
7.5.1.	Rozwiązanie zagadnienia deformacji pręta	306
7.5.2.	Deformacja wolno podpartej belki – lokalna i wariacyjna MRS	315
7.5.3.	Rozwiązanie zagadnienia skręcania pręta – lokalna i wariacyjna MRS	320
7.5.4.	Rozwiązanie równania biharmonicznego – równanie zginania płyty	330
7.5.5.	Rozwiązania równań parabolicznych za pomocą MRS	333
7.5.6.	Rozwiązania równań hiperbolicznych za pomocą MRS	340
7.5.7.	Zalety i wady klasycznej MRS	346
7.6.	Uogólniona MRS	348
7.6.1.	Algorytmiczna struktura UMRS	348
7.6.2.	Generacja siatek węzłów aproksymacyjnych	353
7.6.3.	Kryteria selekcji gwiazd	355
7.6.4.	Aproksymacja MES a aproksymacja bezsiatkowa . . .	358
7.6.5.	Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów – MNK, baza w układzie lokalnym, związek z MRS	361
7.6.6.	Porównania aproksymacji UMRS i MES w obszarze jednowymiarowym	375
7.6.7.	Aproksymacja UMRS w obszarze dwuwymiarowym . .	377
7.7.	Metody bezsiatkowe – zagadnienia zaawansowane	397
7.8.	Uwagi wstępne	397
7.9.	Uogólnienie aproksymacji funkcji	398
7.9.1.	Metoda ustalonych wielokrotnych najmniejszych kwadratów	398
7.9.2.	Aproksymacja globalna	404
7.9.3.	Rząd aproksymacji funkcji kształtu i warunki kompletności	407

Spis treści	7
7.10. Bezelementowa metoda Galerkina	409
7.10.1. Uwagi ogólne	409
7.10.2. BMG w zagadnieniach jednowymiarowych	410
7.10.3. BMG w zagadnieniach dwuwymiarowych	417
7.11. Efektywna generacja funkcji kształtu i ich pochodnych	421
Literatura	424
Literatura podstawowa	424
Literatura do dalszego studiowania	425
Skorowidz	428

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Zakres podręcznika

Nowe wydanie podręcznika jest dość gruntownie zmienioną wersją pierwszego wydania z 2002 roku. Zachowano zasadę, że podręcznik ma przede wszystkim spełniać wymogi programu studiów na kierunku budownictwo. Powinien on być również przydatny na innych kierunkach studiów technicznych, a nawet na studiach doktoranckich.

W nowej wersji podręcznika starano się przede wszystkim usunąć zauważone błędy. Następnie, przychyłając się do uwag wykładowców i studentów, iż treści podręcznika nie zawsze są łatwe do przyswojenia dla przeciętnego studenta, dokonano pewnych zmian polegających głównie na ograniczeniu formalnego aparatu matematycznego. Dlatego też zrezygnowano z niektórych rozważań teoretycznych, ważnych, lecz nie najistotniejszych dla przyswojenia sobie najważniejszych partii przedstawianego materiału wykładowego, jakimi są szeroko pojęte metody wariacyjne rozwiązywania problemów liniowej mechaniki konstrukcji. Ponadto niektóre przykłady rozbudowano dla ułatwienia śledzenia procedury ich rozwiązywania oraz dodano szereg nowych przykładów. Drobne poprawki edytorskie wprowadzono do trzech pierwszych rozdziałów omawiających podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej, ogólne sformułowanie problemów brzegowych oraz wybrane metody wariacyjne.

Skutkiem zmian jest również pewna modyfikacja rozdziału piątego, zawierającego omówienie podstaw metody elementów skończonych, nie wprowadzająca jednakże istotniejszych zmian w porównaniu z podobnym rozdziałem w pierwszym wydaniu.

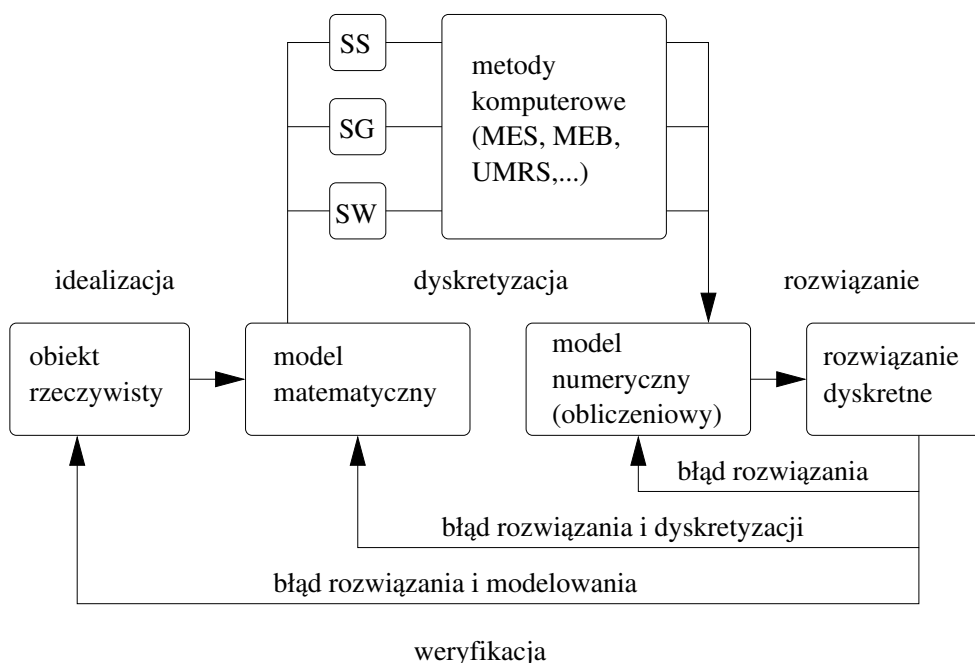
Rozdział szósty, omawiający metodę elementów brzegowych, został poprawiony o zauważone błędy edytorskie. Istotne zmiany dotyczą rozdziału siódmego i ósmego z pierwszego wydania. Obecnie zostały one połączone w jeden rozdział siódmy. Zasadnicze zmiany w tym rozdziale dotyczą ograniczenia opisu uogólnionej metody różnic skończonych i rozbudowy (głównie o przykłady) klasycznej metody różnic skończonych. Całkowicie zrezygnowano z dodatków A (LUKAW – program do rozwiązywania zagadnień brzegowych metodami wariacyjnymi) i B (programy do analizy zagadnień brzegowych różnymi metodami).

Podręcznik akademicki nie jest monografią i dlatego przy jego pisaniu korzystano często z cytowanej literatury. W szczególności dotyczy to rozdziałów drugiego i piątego, przy opracowaniu których w szerokim zakresie odwoływano się do pięknie napisanej monografii: J.N. Reddy, *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1986. Wzbogacono literaturę, zachowując podział na część zawierającą pozycje podstawowe oraz część obejmującą literaturę do dalszego, pogłębionego, studiowania.

Nowe wydanie podręcznika zostało opracowane w tym samym zespole autorskim co wydanie pierwsze, pod opieką merytoryczną prof. Cz. Cichonia, aktualnie kierownika Katedry Informatyki Stosowanej na Wydziale Zarządzania i Modelowania Politechniki Świętokrzyskiej. Pozostali współautorzy pracują w Instytucie Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej na Politechnice Krakowskiej. Podobnie jak poprzednio również w tym wydaniu dr inż. P. Pluciński zadbał o dobrą edycję podręcznika. Autorzy mają nadzieję, że poczynione zmiany spotkają się z akceptacją Czytelników i przyczynią się do podniesienia jakości uczenia i studiowania zawartej w nim wiedzy, niezbędnej dla kompletnego wykształcenia współczesnego inżyniera.

1.2. Co to jest metoda komputerowa?

Termin: *metody komputerowe* często jest używany w dwóch znaczeniach. W pierwszym znaczeniu metoda komputerowa jest rozumiana jako pewien proces analizy konstrukcji z wykorzystaniem metod obliczeń przybliżonych, zaimplementowanych do komputera w formie programów napisanych w różnych językach programowania. Dzięki łatwej algorytmizacji współczesnych metod obliczeniowych i dużym możliwościom komputerów możliwe jest wykonywanie *symulacji komputerowej* dla otrzymania rozwiązania optymalnego.



Rys.1.1. Schemat komputerowej analizy konstrukcji

W drugim znaczeniu metodami komputerowymi nazywa się współczesne metody obliczeń przybliżonych i metody te są zasadniczą treścią podręcznika. Na rys.1.1 pokazano schemat analizy komputerowej konstrukcji z zaznaczeniem miejsca występowania metod komputerowych. Jak to jest widoczne, symulacja komputerowa obliczeń składa się z czterech etapów. W etapie pierwszym ma miejsce *idealizacja* obiektu rzeczywistego poprzez przyjęcie uzasadnionych założeń upraszczających oraz wyspecyfikowanie zmiennych najlepiej opisujących obiekt. Założenia dotyczą przede wszystkim geometrii obiektu, materiału z którego jest wykonany, obciążeń i przyszłych warunków użytkowania (warunków środowiskowych i okresu planowanej eksploatacji obiektu). Na tej podstawie budowany jest *model matematyczny* obiektu.

Drugim etapem jest *dyskretyzacja*, przetwarzająca ciągły model matematyczny, na ogół w postaci układów równań różniczkowych, lub pewnego funkcjonału, w *model numeryczny* w formie układów równań algebraicznych. Trzecim etapem symulacji komputerowej jest *rozwiązanie*, przez co rozumiemy napisanie stosownego programu komputerowego, przetestowanie i wykonanie

obliczeń. I w końcu mamy najważniejszy – czwarty etap, jakim jest *weryfikacja* wyników obliczeń. Możliwości popełnienia błędów jest wiele, mogą one wystąpić na każdym z trzech pierwszych etapów. W rezultacie poprawiania tych błędów powinniśmy w końcu otrzymać rozwiązanie optymalne. Jak to już stwierdziliśmy, modelem matematycznym mogą być odpowiednio sformułowane problemy brzegowe (lub początkowo brzegowe) dla równań różniczkowych (zwykłych lub cząstkowych) lub pewne funkcjonały podlegające minimalizacji. W pierwszym przypadku będziemy mówili o *sformułowaniu lokalnym* (lub *silnym*) (SS na rys.1.1), w drugim natomiast o *sformułowaniu globalnym* problemu (SG na rys.1.1). W budowie komputerowej metody analizy konstrukcji preferujemy sformułowanie globalne, co zostanie uzasadnione w dalszych częściach podręcznika. Trudność jednakże polega na tym, że nie wszystkie problemy, a tylko tzw. *problemy samosprężone* możemy równoważnie opisać w sformułowaniu lokalnym lub globalnym. Przykładem problemu samosprężonego jest liniowy problem teorii sprężystości (LPTS) opisany 15. równaniami różniczkowo-algebraicznymi z warunkami brzegowymi. Funkcjonałem będzie w tym przypadku *funkcjonał całkowitej energii potencjalnej* układu. Dlatego istotne jest poznanie pewnych metod, pozwalających na zbudowanie sformułowań całkowitych dla danego sformułowania lokalnego oraz metod ich rozwiązania. Sformułowania te zostały nazywane *sformułowaniami słabymi* lub *wariacyjnymi* (SW na rys.1.1), a metody ich rozwiązywania *metodami wariacyjnymi*. Opisane zagadnienia są treścią rozdziałów trzeciego i czwartego.

Przyjmując teraz, że mamy problem opisany modelem matematycznym w sformułowaniach SG lub SW budujemy model numeryczny (lub obliczeniowy), wykorzystując opisane w rozdziałach piątym, szóstym i siódmym metody komputerowe, którymi są *metoda elementów skończonych* (MES), *metoda elementów brzegowych* (MEB) i *uogólniona metoda różnic skończonych* (UMRS). Jak to dalej zobaczymy, metody te z matematycznego punktu widzenia są po prostu pewnymi procedurami rozwiązań wariacyjnych, dostosowanymi do nowych możliwości obliczeniowych, jakie powstały wraz z rozwojem maszyn cyfrowych i technik informatycznych. Metody te, przystosowane algorytmicznie do możliwości komputera, pozwalają obecnie rozwiązywać efektywnie ogromne problemy techniczne, wymagające rozwiązywania nawet układu kilkudziesięciu milionów liniowych równań algebraicznych¹.

¹W Japonii wykonana została analiza komputerowa ruchu skorupy ziemskiej, w której równolegle rozwiązywano 100 milionów liniowych równań algebraicznych (*iacm expressions*, No.9, July 2000).

Należy zauważyć, że najprostszymi wariantem UMRS, czyli klasyczna *metoda różnic skończonych* (MRS) jest wykorzystywana do bezpośredniego rozwiązywania problemów sformułowanych lokalnie.

Na zakończenie tego punktu – krótko o założeniach. W podręczniku omawiać będziemy metody komputerowe w zastosowaniu do wybranych problemów liniowej mechaniki ciała stałego. Wspomnimy tylko, że możliwymi źródłami nieliniowości mogą być nieliniowości geometryczne i/lub fizyczne. W pierwszym przypadku są one uwzględniane w analizie, jeśli istotne jest rozróżnienie pomiędzy konfiguracjami równowagi: nieobciążoną i zdeformowaną konstrukcji. Nieliniowości fizyczne mogą wynikać np. z konieczności uwzględnienia własności sprężysto-plastycznych materiału. Metody komputerowe dla takich problemów są już bardziej złożone i w celu ich studiowania odsyłamy Czytelnika do literatury specjalistycznej. Założymy ponadto, że konstrukcje są wykonane z materiałów jednorodnych i izotropowych.

1.3. Przykład sformułowania silnego i sformułowania słabego

Sformułowanie silne

Ustalony przepływ ciepła w obszarze dwuwymiarowym jest opisany problemem brzegowym w formie

$$-\frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + f = 0 \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1.1)$$

gdzie

q_1, q_2 – współrzędne wektora intensywności strumienia przepływu ciepła,

f – intensywność generacji ciepła wewnątrz ciała na jednostkę powierzchni w jednostce czasu.

Warunek brzegowy Dirichleta dla równania (1.1) ma postać

$$T(x_1, x_2) = \bar{T} \quad (1.2)$$

gdzie \bar{T} jest daną temperaturą na brzegu Γ_T , natomiast warunek brzegowy Neumanna przedstawiony został w formie²

$$q_n = q_1 n_1 + q_2 n_2 = q_i n_i = \bar{q}_n \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

²Powtarzający się wskaźnik w iloczynie oznacza sumowanie.

gdzie \bar{q}_n jest daną intensywnością strumienia przepływu ciepła przez brzeg Γ_q , a n_1 i n_2 są współrzędnymi wektora normalnej zewnętrznej do brzegu.

Powyższe równanie należy uzupełnić równaniem wiążącym gradient temperatury ze strumieniem ciepła (nazywanym równaniem konstytutywnym dla ciepła). Jest to równanie Fouriera w postaci

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (1.4)$$

gdzie k_{ij} jest symetrycznym tensorem rzędu drugiego przewodnictwa ciepła.

Dla materiału izotropowego

$$k_{ij} = k \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (1.5)$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

W tym przypadku równanie Fouriera ma formę

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2 \quad (1.6)$$

Podstawiając (1.6) do (1.1), otrzymamy równanie różniczkowe rzędu drugiego wyrażone przez funkcję temperatury

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + f = 0 \quad (1.7)$$

Jeśli przyjmiemy, że $k = \text{const}$, to równanie (1.7) sprowadza się do prostej postaci

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) + f = 0 \quad (1.8)$$

Zauważmy, że dla otrzymania rozwiązania przybliżonego konieczne jest obliczanie drugich pochodnych funkcji temperatury. W dalszym ciągu pokażemy, że formułując to równanie w postaci słabej konieczna będzie tylko aproksymacja pierwszej pochodnej funkcji temperatury, co upraszcza proces rozwiązywania.

Równane różniczkowe typu (1.8) wraz z warunkami brzegowymi nazywa się sformułowaniem silnym problemu.

Sformułowanie słabe

Sformułowanie słabe jest konstruowane w czterech krokach:

- (1) Przemnożenie równania różniczkowego przez dowolną funkcję.
- (2) Przecalkowanie wyniku kroku 1 po rozważanym obszarze Ω .
- (3) Całkowanie przez części z wykorzystaniem twierdzenia Greena-Gausa w celu zredukowania pochodnych do minimalnego rzędu.
- (4) Wprowadzenie do funkcjonału warunków brzegowych Neumanna.

Wymienione kroki postępowania zastosujemy do równania różniczkowego (1.1).

Krok 1. Mnożymy równanie (1.1) przez dowolną, odpowiednio regularną funkcję $w(x_i)$, która transformuje równanie różniczkowe do postaci (wcześniej równanie to zapisujemy po jednej stronie równości)

$$w(x_i)(-f + q_{i,i}) = 0 \quad (1.9)$$

gdzie przyjęto oznaczenie $q_{i,i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$.

Krok 2. Całkujemy (1.9) po obszarze Ω

$$\int_{\Omega} w(x_i)(-f + q_{i,i})d\Omega = 0 \quad (1.10)$$

Krok 3. Całkujemy przez części składniki z pochodnymi względem zmiennych przestrzennych (w tym przypadku składnikami tymi są współrzędne wektora intensywności strumienia przepływu ciepła), otrzymując równanie

$$-\int_{\Omega} w(x_i)f d\Omega - \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma = 0 \quad (1.11)$$

Krok 4. Wprowadzając intensywności strumienia przepływu ciepła q_n , możemy całkę na brzegu rozdzielić na sumę dwóch całek

$$\int_{\Gamma} w q_n d\Gamma = \int_{\Gamma_T} w q_n d\Gamma + \int_{\Gamma_q} w q_n d\Gamma \quad (1.12)$$

Warunek brzegowy (1.3) uwzględnimy dla części brzegu Γ_q ($q_n = \bar{q}_n$), natomiast dla brzegu Γ_T przyjmiemy $w = 0$. Podkreślimy bardzo ważny fakt, że przyjęcie $w = 0$ nie oznacza utraty ogólności rozwiązania, ponieważ funkcja w jest dowolna, to znaczy, że rozważane równanie musi być również słuszne, nawet jeśli w jest równe zeru na pewnej części obszaru rozwiązania.

Wykorzystując to w równaniu (1.11), otrzymamy

$$-\int_{\Omega} w(x_i) f \, d\Omega - \int_{\Omega} w_{,i} q_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w \bar{q}_n \, d\Gamma = 0 \quad (1.13)$$

Przyjmując teraz, że równanie Fouriera jest słuszne w każdym punkcie obszaru Ω , otrzymamy końcową postać sformułowania słabego

$$-\int_{\Omega} w f \, d\Omega + \int_{\Omega} w_{,i} k T_{,i} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w \bar{q}_n \, d\Gamma = 0 \quad (1.14)$$

Rozwiązaniem jest funkcja temperatury T spełniająca dla każdego w jednorodny warunek brzegowy $w = 0$ na brzegu Γ_T .

Zauważmy, że w powyższym równaniu występują już tylko pierwsze pochodne, a nie drugie, jak to ma miejsce w wyjściowym równaniu różniczkowym (1.1). Oznacza to osłabienie warunków koniecznych do spełnienia przez rozwiązanie, co uzasadnia nazwę: sformułowanie słabe. Równanie (1.14) nazywamy *nieredukowalnym*, ponieważ nie ma już dodatkowych równań, które mogłyby być wykorzystane do dalszej redukcji. Sformułowanie słabe jest podstawowym modelem matematycznym dla budowania wielu rozwiązań aproksymacyjnych.

1.4. Przykład sformułowania brzegowego

Zamiast kroku (4) opisanego w punkcie 1.3 można wykonać inne przekształcenia, prowadzące do ogólnego wzoru na rozwiązanie zagadnienia (1.8), (1.2), (1.3) i jednocześnie do jego sformułowania w postaci *brzegowego równania całkowego*. Będzie do tego potrzebna pewna funkcja, zwana *rozwiązaniem fundamentalnym* równania różniczkowego. Oznaczmy ją przez T^* (nie mylić z operatorem sprzężonym T^*) i zdefiniujemy w następujący sposób:

Definicja (rozwiązania fundamentalnego). *Rozwiązanie fundamentalne równania (1.8) jest to funkcja $T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ spełniająca je dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ po podstawieniu za „obciążenie” $f(x_1, x_2)$ delty Diraca $\delta_{(\xi_1, \xi_2)}$*

modelującej jednostkowe, dodatnie źródło punktowe, umieszczone w dowolnym punkcie $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie fundamentalne spełnia więc równanie

$$k \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^2} \right) + \delta_{(\xi_1, \xi_2)} = 0 \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.15)$$

i może być interpretowane jako funkcja wpływu w punkcie (x_1, x_2) rozwiązania równania różniczkowego dla obszaru rozciągniętego do całej płaszczyzny, bez narzuconych dodatkowych warunków, np. zanikania tej funkcji w nieskończoności. Jest ono dla równania (1.8) następującą funkcją:

$$T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4\pi k} \ln r^2 \quad (1.16)$$

gdzie $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$.

Faktycznie argumentem logarytmu we wzorze (1.16) powinno być wyrażenie $(r/r_0)^2$, gdzie r_0 jest arbitralnie przyjętą odległością służącą do uzyskania bezwymiarowości. Wprowadzenie wielkości r_0 jest równoważne dodaniu stałej do rozwiązania fundamentalnego, a więc zachowuje spełnianie warunku (1.15). W praktyce stosuje się wzór (1.16) w takiej postaci jak powyżej, rozumiejąc domyślnie, że r_0 jest długością jednostkową. W obliczeniach numerycznych, ze względu na dokładność obliczeń, zaleca się takie przyjęcie wartości r_0 , aby funkcja *logarytm* nie zmieniała znaku w całym obszarze obliczeniowym.

Równania (1.8) i (1.15) są tylko symbolicznie podobne, gdyż $\delta_{(\xi_1, \xi_2)}$ nie jest funkcją, a rozwiązanie fundamentalne, będące logarytmem z odległości, nie ma w punkcie (ξ_1, ξ_2) pochodnej. W celu wyjaśnienia jak należy rozumieć równanie (1.15) zajmiemy się bliżej deltą Diraca i pochodną dystrybucyjną.

Pojęcie *pseudofunkcji delta* wprowadził intuicyjnie, bez rygorów matematycznych, fizyk P. Dirac w 1929 r., do modelowania jednostkowej siły skupionej przyłożonej w punkcie (ξ_1, ξ_2) jako granicy ciągu pewnych funkcji $D_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta_{(\xi_1, \xi_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \quad (1.17)$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a każda funkcja D_n przyjmuje wartość zero, poza kołem o środku w punkcie (ξ_1, ξ_2) i o promieniu długości $\frac{1}{n}$, oraz stałą wartość w tym kole, równą odwrotności jego pola. Funkcje D_n są więc zdefiniowane

w następujący sposób:

$$D_n(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{n^2}{\pi}, & \text{gdy } \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{gdy } \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (1.18)$$

i mają własność

$$\int_{\mathbb{R}^2} D_n(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad \forall n \in N \quad (1.19)$$

Przy malejącym promieniu $\frac{1}{n}$ ich wartości w punkcie (ξ_1, ξ_2) dążą do nieskończoności, a w pozostałych punktach płaszczyzny do zera. Warto tu wspomnieć, że istnieje jeszcze wiele innych ciągów funkcji zbieżnych do $\delta_{(\xi_1, \xi_2)}$.

Delta Diraca faktycznie nie jest funkcją, tylko dystrybucją, czyli funkcjonałem liniowym i ciągłym na zbiorze funkcji klasy C^∞ w \mathbb{R}^2 . Funkcjonał ten przyporządkowuje funkcji $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ pewną liczbę, oznaczymy ją przez $\langle \delta_{(\xi_1, \xi_2)}, \varphi \rangle$, będącą wartością φ w punkcie (ξ_1, ξ_2) . Można powiedzieć, że funkcje φ służą do testowania własności dystrybucji. W dalszych rozważaniach przyjmiemy standardowe oznaczenie wartości funkcjonału Diraca za pomocą symbolu całki, czyli

$$\langle \delta_{(\xi_1, \xi_2)}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{(\xi_1, \xi_2)} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \varphi(\xi_1, \xi_2) \quad (1.20)$$

Delta Diraca ma tę samą własność co funkcje ciągu, którego jest granicą, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta_{(\xi_1, \xi_2)} dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} D_n dx_1 dx_2 = 1 \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.21)$$

Ściśle rzecz biorąc, pierwszą z powyższych całek należy rozumieć w sposób symboliczny, jako szczególny przypadek równania (1.20).

Bliższego wyjaśnienia wymaga jeszcze pochodna z funkcji T^* we wzorze (1.15). Jest ona pochodną dystrybucyjną i definiuje się ją przez działanie na funkcjach testowych φ w następujący sposób:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^n T^*}{\partial x_i^n} \varphi dx_1 dx_2 = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^2} T^* \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_i^n} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2), n \in N, i = 1, 2 \quad (1.22)$$

a równanie (1.15) należy rozumieć zgodnie z wprowadzonymi pojęciami dystrybucji Diraca i pochodnej dystrybucyjnej, czyli że zachodzi

$$k \int_{\mathbb{R}^2} T^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 + \varphi(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (1.23)$$

Wróćmy teraz do wzoru (1.11) i zastosujmy jeszcze raz całkowanie przez części do drugiego składnika po lewej stronie. Otrzymamy w ten sposób następującą równość:

$$- \int_{\Omega} w f d\Omega - \int_{\Omega} k w_{,ii} T d\Omega + \int_{\Gamma} k w_{,i} n_i T d\Gamma + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma = 0 \quad \forall w \in V \quad (1.24)$$

gdzie V oznacza przestrzeń funkcji odpowiednio regularnych. Jest to równanie analogiczne do występującego w zasadzie wzajemności prac Bettiego-Maxwella stosowanej w mechanice. Funkcje T , f , $q_i n_i$ opisują jeden stan ciała Ω (odpowiednio temperaturę oraz „obciążenia” objętościowe i brzegowe), a funkcje w , $k w_{,ii}$, $k w_{,i} n_i$ drugi stan.

W dalszych przekształceniach będziemy chcieli dokonać podstawienia $w = T^*$. Nie można tego jednak zrobić bezpośrednio, gdyż wzór (1.24) został wyprowadzony przez dwukrotne całkowanie przez części, a więc przy założeniu, że funkcje w mają drugie pochodne. Nie zachodzi to dla rozwiązania fundamentalnego w punkcie (ξ_1, ξ_2) . Dlatego najpierw należy odjąć od obszaru Ω koło o pewnym promieniu długości ε i o środku w punkcie osobliwości, a następnie dokonać przejścia granicznego, zmierzając z liczbą ε do zera. W rezultacie otrzymamy następującą tożsamość, będącą odpowiednikiem tożsamości Somigliany z mechaniki

$$\begin{aligned} c T(\xi_1, \xi_2) = & \int_{\Omega} f(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{\Gamma} \left[T(x_1, x_2) q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + \right. \\ & \left. - q_n(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \right] dt_{(x_1, x_2)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

gdzie symbol $dt_{(x_1, x_2)}$ oznacza, że x_1, x_2 są zmiennymi całkowania

$$q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = -k \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial T^*}{\partial x_2} n_2 \right) \quad (1.26)$$

$$c = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (\xi_1, \xi_2) \text{ należy do wnętrza } \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } (\xi_1, \xi_2) \text{ należy do gładkiego brzegu } \Gamma \end{cases} \quad (1.27)$$

Inne położenia punktu (ξ_1, ξ_2) oraz pewne szczegóły wyprowadzenia wzoru (1.25) będą omówione w rozdziale szóstym.

Najważniejszym rezultatem przekształceń wykonanych w tym punkcie jest tożsamość Somigliany (1.25), czyli ogólna postać rozwiązania zagadnienia (1.8), (1.2), (1.3), spełniająca równanie różniczkowe (1.1) dla dowolnych wartości funkcji $T(t)$, $q_n(t)$ wzdłuż brzegu Γ . Jeżeli dodatkowo tak dobierzemy $T(t)$ na Γ_q i $q_n(t)$ na Γ_T , aby pole temperatur spełniało warunki brzegowe (1.2) i (1.3), to uzyskamy poszukiwane rozwiązanie całego problemu.

Przykładowo przyjmując dla uproszczenia, że zadane są tylko warunki brzegowe Dirichleta, czyli że wzdłuż całego brzegu Γ znamy temperaturę, którą oznaczymy przez $\bar{T}(t)$, warunek na niewiadomą intensywność strumienia ciepła $q_n(t)$ na tym brzegu z warunku uzyskanego przez zapisanie równania (1.25) dla punktów brzegowych przyjmie postać:

Znaleźć funkcję $q_n(t) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q_n(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} = \\ = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dx_1 dx_2 + \\ + \int_{\Gamma} \bar{T}(x_1, x_2) q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} - c \bar{T}(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma \end{aligned} \quad (1.28)$$

Równanie (1.28) jest brzegowym równaniem całkowym dla rozważanego problemu. Po jego rozwiązaniu, np. metodą elementów brzegowych, wzór (1.25) pozwala obliczyć wartość temperatury w dowolnym punkcie obszaru Ω .

Rozdział 2

Pewne pojęcia i definicje z analizy funkcjonalnej

2.1. Liniowa przestrzeń wektorowa

Uogólniając koncepcję zwykłych wektorów geometrycznych w przestrzeni euklidesowej wprowadzimy pojęcie przestrzeni wektorowej, której elementy (sekwencje liczb lub funkcji) będziemy nazywać wektorami abstrakcyjnymi (krótko: wektorami). W szczególności dla naszych celów są ważne przestrzenie wektorowe liniowe, unormowane.

Liniową przestrzenią wektorową (którą, jeśli nie będzie to budziło wątpliwości, krótko nazywać będziemy też przestrzenią wektorową) nad ciałem liczb rzeczywistych¹ \mathbb{R} nazywamy zbiór wektorów u, v, w, \dots , w którym wprowadzono dwa działania (zwane też odwzorowaniami): dodawania wektorów i mnożenia wektora przez liczbę.

Przestrzeń musi być domknięta ze względu na oba działania, co w mechanice oznacza, że dodając dwa *pola przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych*, musimy otrzymać pole, które jest również kinematycznie dopuszczalne. Dlatego, przykładowo rozważając w rozdziale 4 metody rozwiązań przybliżonych problemów opisanych przez równania różniczkowe, będziemy w pierwszym rzędzie przyjmowali *jednorodny warunki brzegowe*. W przypadku bowiem niejednorodnych warunków brzegowych mamy już do czynienia z warunkami brzegowymi, które nie mają struktury liniowej przestrzeni wektorowej. Uwzględnienie

¹Jest to zbiór liczb rzeczywistych wyposażony w stosowne struktury algebraiczne.

takich warunków wymagać będzie dodatkowych rozważań (patrz punkt 3.7).

Przykład 2.1. Niech P będzie zbiorem wielomianów algebraicznych stopnia nie większego niż n zmiennej x nad ciałem liczb rzeczywistych.

Dodawanie wektorów jest teraz zwykłym dodawaniem wielomianów, a mnożenie wektorów przez skalary zwykłym mnożeniem wielomianów przez elementy zbioru \mathbb{R} . P jest więc liniową przestrzenią wektorową. Typowy element zbioru P ma postać: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Zauważmy, że zbiór wielomianów stopnia dokładnie równego n nie jest przestrzenią liniową, bo suma takich wielomianów może mieć stopień mniejszy.

Przykład 2.2. Zbiór $C[a, b]$ wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych w przedziale $[a, b]$, z prawami dodawania wektorów i mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &\equiv f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &\equiv \alpha f(x)\end{aligned}$$

jest liniową przestrzenią wektorową.

Przykład 2.3. Niech V będzie zbiorem wszystkich funkcji z ciągłymi drugimi pochodnymi, zdefiniowanych w przedziale $[0, L]$ i spełniających równanie różniczkowe

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} - 3u = 0$$

Zbiór V jest liniową przestrzenią wektorową ze względu na prawa dodawania i mnożenia przez skalar, podane w przykładzie 2.2.

2.2. Transformacja liniowa

Transformacja T (nazywana też równoważnie *odwzorowaniem*, *operatorem*, *funkcją abstrakcyjną*) z przestrzeni wektorowej U do innej przestrzeni wektorowej V jest to przypisanie każdemu elementowi $u \in U$ w sposób jednoznaczny elementu $v \in V$, co zapisujemy $v = Tu$ lub $T : U \rightarrow V$.

Transformacja $T : U \rightarrow V$ nazywa się liniową wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2) \quad (2.1)$$

dla każdych $u_1, u_2 \in U$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. W przeciwnym przypadku transformacja jest nieliniowa.

Przykład 2.4. Niech $U = C^2[a, b]$ będzie zbiorem funkcji dwukrotnie różniczkowalnych w $[a, b]$ i $V = C[a, b]$ będzie zbiorem funkcji ciągłych w $[a, b]$.

Wykażemy, że transformacja

$$Tu = c_1u + c_2 \frac{d^2u}{dx^2} + c_3 \int_a^b K(x, y) u(y) dy$$

gdzie c_1, c_2 i c_3 są funkcjami x , jest liniowa.

Dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$ i liczb rzeczywistych α, β mamy

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1 + \beta u_2) &= c_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + c_2 \frac{d^2}{dx^2}(\alpha u_1 + \beta u_2) + \\ &+ c_3 \int_a^b K(x, y)[\alpha u_1(y) + \beta u_2(y)] dy = \\ &= c_1\alpha u_1 + c_2\alpha \frac{d^2u_1}{dx^2} + c_3\alpha \int_a^b K(x, y)u_1(y) dy + \\ &+ c_1\beta u_2 + c_2\beta \frac{d^2u_2}{dx^2} + c_3\beta \int_a^b K(x, y)u_2(y) dy = \\ &= \alpha T(u_1) + \beta T(u_2) \end{aligned}$$

Zauważmy, że operator T jest sumą trzech operatorów liniowych

$$T_1(u) = c_1u \quad T_2(u) = c_2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad T_3(u) = c_3 \int_a^b K(x, y)u(y) dy$$

W metodach przybliżonego rozwiązywania problemów brzegowych wykorzystujemy transformację liniową w przestrzeni skończenie wymiarowej. Taka transformacja jest wówczas reprezentowana przez macierze.

Niech U i V będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi i niech $T: U \rightarrow V$ będzie operatorem liniowym. Przez $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ oraz $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ oznaczymy bazy przestrzeni U i V . Elementy tych przestrzeni $u \in U$ i $v \in V$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \quad v = \sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j \quad (2.2)$$

W ten sposób, dla dowolnego $u \in U$, transformacja $T(u) = v$ może być przedstawiona jako

$$T(u) \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\Phi_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j \quad (2.3)$$

Ponieważ $T(\Phi_i) \in V$, to możemy napisać

$$T(\Phi_i) = \sum_{j=1}^m t_{ji} \Psi_j \quad (2.4)$$

Wykorzystując (2.4) w (2.3), mamy

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m t_{ji} \Psi_j \right) = 0 \quad (2.5)$$

lub dla każdego wektora bazy $\Psi_j \neq 0$

$$\sum_{j=1}^m (\beta_j - \sum_{i=1}^n t_{ji} \alpha_i) = 0 \quad (2.6)$$

Powyższe równanie ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Macierz $[t_{ij}]$ reprezentuje transformację liniową w relacji do baz $\{\Phi_i\}^n$ i $\{\Psi_i\}^m$.

Przykład 2.5. Rozważmy transformację T będącą obrotem płaszczyzny (x, y) wokół osi z o kąt θ .

Punkt (x, y, z) jest odwzorowany w punkt (x', y', z) . Transformację $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wyraża zależność

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Możemy też napisać, że

$$T(\bar{e}_1) \equiv T(1, 0, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3$$

$$T(\bar{e}_2) \equiv T(0, 1, 0) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = -\sin \theta \bar{e}_1 + \cos \theta \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3$$

$$T(\bar{e}_3) \equiv T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 0 \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + 1 \bar{e}_3$$

Stąd macierz \mathbf{T} w relacji do bazy $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ jest dana wzorem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3. Formy: liniowa, dwuliniowa i kwadratowa

Formą liniową lub funkcjonałem liniowym nazwiemy transformację liniową l z liniowej przestrzeni wektorowej U do przestrzeni liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Przykład 2.6. Przykładem funkcjonału liniowego w \mathbb{R}^n jest

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

gdzie x_i są współrzędnymi wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a f_i współrzędnymi wektora \mathbf{f} . Oczywiście, iloczyn skalarny zwykłych wektorów jest tylko przypadkiem szczególnym powyższego wyrażenia. Każdy bowiem funkcjonał liniowy w \mathbb{R} można zapisać w formie iloczynu skalarnego

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}, \mathbf{x})$$

Przykład 2.7. 1. Niech $V = L_2[0, 1]^2$ i funkcjonał liniowy w V zdefiniowany będzie wzorem

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

² $L_2(\Omega)$ jest przestrzenią wektorową wszystkich funkcji $v \in L_2(\Omega)$ całkowalnych z kwadratem w obszarze Ω : $\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty$.

gdzie f jest dowolną funkcją.

Funkcjonał l jest liniowy, ponieważ jest jednorodny

$$l(\alpha v) = \int_0^1 f(x)\alpha v(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)v(x)dx = \alpha l(v)$$

i addytywny

$$\begin{aligned} l(v_1 + v_2) &= \int_0^1 f(x)(v_1 + v_2)dx = \int_0^1 f(x)v_1(x)dx + \int_0^1 f(x)v_2(x)dx = \\ &= l(v_1) + l(v_2) \end{aligned}$$

Innymi przykładami funkcjonału liniowego są

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + qv(b), \quad l(u, v) = \int_{\Omega} (f(x, y)u + q(x, y)v)dx dy$$

Zauważmy, że funkcjonały

$$l(v) = \int_a^b v \frac{dv}{dx} dx, \quad l(v) = \int_a^b f(x)v dx + c, \quad c \text{ jest stałą}$$

nie są funkcjonałami liniowymi.

2. Niech S będzie n -wymiarową podprzestrzenią $L_2[0, 1]$ z bazą $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ oraz niech l będzie funkcjonałem liniowym, zdefiniowanym jak w punkcie 1. Wówczas, dla $v \in S$, możemy napisać

$$\begin{aligned} l(v) &= \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \end{aligned}$$

gdzie

$$b_i = \int_0^1 f(x)\Phi_i(x)dx$$

Równanie to jest reprezentantem funkcjonału liniowego $l(\bullet)$ na zbiorze S .

W mechanice szczególną rolę spełnia *forma kwadratowa*, jaką jest wyrażenie na całkowitą energię potencjalną, odwzorowujące przestrzeń przemieszczeń w skalar będący miarą energii układu. Pierwsza wariacja formy kwadratowej jest przykładem *formy dwuliniowej*. Formalna definicja formy dwuliniowej jest następująca:

Niech U i V będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Formą dwuliniową, oznaczoną jako $B(u, v)$, nazywamy operator $B : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, który odwzorowuje pary (u, v) , $u \in U$, $v \in V$ w \mathbb{R} i spełnia warunek analogiczny do (2.1)

$$\begin{aligned} B(\alpha u_1 + \beta u_2, \mu v_1 + \lambda v_2) &= \\ &= \alpha\mu B(u_1, v_1) + \alpha\lambda B(u_1, v_2) + \beta\mu B(u_2, v_1) + \beta\lambda B(u_2, v_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dla wszystkich $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ i skalarów $\alpha, \beta, \mu, \lambda$.

Podobnie do transformacji liniowej, formę dwuliniową można również przedstawić w przestrzeni skończenie wymiarowej w postaci macierzowej. Wykorzystując (2.2), możemy napisać

$$\begin{aligned} B(u, v) &= B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i, \sum_{j=1}^m \beta_j \Psi_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j B(\Phi_i, \Psi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j b_{ij} = \alpha^T \mathbf{B} \beta \quad \text{gdzie} \quad b_{ij} = B(\Phi_i, \Psi_j) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Macierz \mathbf{B} przedstawia formę dwuliniową ze względu na bazy $\{\Phi_i\}$ i $\{\Psi_j\}$.

Formę dwuliniową $B(\bullet, \bullet) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *symetryczną*, jeśli $B(u, v) = B(v, u)$ dla wszystkich $u, v \in U$ (czyli, że $b_{ij} = b_{ji}$). Jeśli $B(u, u) = 0$ dla każdego $u \in U$, to taką formę dwuliniową nazywamy *skośnie symetryczną* (i wówczas $b_{ij} = -b_{ji}$). Każdą formę dwuliniową można jednoznacznie przedstawić jako sumę formy dwuliniowej symetrycznej i formy dwuliniowej skośnie symetrycznej.

³Zbiór $U \times V$ nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów U i V .

Przykład 2.8. Rozważmy równanie operatorowe

$$Au \equiv -\nabla^2 u = f \quad \text{w } \Omega \in \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

gdzie $A : C^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$. Formę dwuliniową $B(u, v)$, $u, v \in C^2(\Omega)$, zdefiniujemy wzorem

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} A u v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla^2 u v \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v \, dx - \oint_{\Gamma} (\nabla u)^T \mathbf{n} v \, ds \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono zapis macierzowy

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} - \text{operator wektora gradientu,}^4$$

\mathbf{n} – wektor jednostkowy, normalny do brzegu Γ ,

T – jest oznaczeniem transpozycji.

Forma $B(u, v)$ jest liniowa ze względu na u i v , lecz w ogólności nie jest symetryczna. Jeśli jednakże $A : S \subset C^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, gdzie S zawiera funkcje, które znikają na brzegu Γ obszaru Ω , to wówczas

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v \, dx \quad (2.11)$$

jest symetryczną formą dwuliniową. Stwierdzamy więc, że dwuliniowy funkcjonal $B(u, v)$ jest symetryczny ze względu na swoje argumenty, jeśli $B(u, v) = B(v, u)$ dla wszystkich u i v . Zauważmy, że funkcjonal

$$B(u, v) = \int_a^b \left(p(x) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + q(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \cdot \mathbf{v} \right) dx$$

jest dwuliniowy, lecz nie jest symetryczny.

⁴W nawiasach klamrowych $\{\dots\}$ będziemy pisać poziomo wektor kolumnowy.

Jeśli S jest podprzestrzenią skończenie wymiarową z bazą $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$, to możemy napisać wzory $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i$, $v = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi_j$ oraz

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \alpha_i \beta_j \quad (2.12a)$$

gdzie

$$b_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j) \quad (2.12b)$$

Zauważmy, że aby $B(u, v)$ mogło być wyrażone przez równanie (2.11), to wszystkie funkcje Φ_i powinny zniknąć na brzegu Γ .

Przenosząc f w równaniu (2.10) na lewą stronę i mnożąc wynik przez $\Phi_i \in S$ oraz całkując po obszarze Ω , otrzymamy

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_i)^T \nabla u \, dx - \int_{\Omega} \Phi_i f \, dx = 0$$

lub

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} \alpha_j - f_i = 0 \quad (2.13)$$

gdzie b_{ij} jest dane wzorem (2.12b), a f_i wyraża wzór

$$f_i = \int_{\Omega} f \Phi_i \, dx$$

W ten sposób rozwiązanie równania (2.10) z warunkiem, że $u = 0$ na brzegu Γ , w skończenie wymiarowej podprzestrzeni S , wynosi

$$u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \quad (2.14)$$

gdzie α_j otrzymamy, rozwiązując układ równań algebraicznych (2.13). Przykład ten prezentuje ideę metod wariacyjnych rozwiązań przybliżonych, omawianych w rozdziale 4.

Niech U będzie przestrzenią wektorową, a $B(\bullet, \bullet)$ formą dwuliniową w U . Formą kwadratową nazwiemy funkcjonał $Q(u)$ zdefiniowany w U i taki, że

$$Q(\alpha u) = \alpha^2 Q(u) \quad (2.15)$$

Dla przykładu $Q(u)$ otrzymamy, podstawiając $v = u$ w (2.11): $Q(u) = B(u, u)$. W ogólności, jeśli $B(\bullet, \bullet)$ jest sumą części symetrycznej i części skośnie symetrycznej, to $Q(u) = B(u, u)$ oznacza, że $Q(u)$ jest całkowicie określone przez część symetryczną formy dwuliniowej. W ten sposób stwierdzamy, że dwie różne formy dwuliniowe z tą samą częścią symetryczną generują tą samą formę kwadratową.

2.4. Normy w przestrzeni wektorowej

W analizie problemów inżynierskich przestrzeniami wektorowymi są przeważnie przestrzenie funkcyjne. W celu badania istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemów brzegowych i ich aproksymacji musimy określić w tej przestrzeni miarę *dlugości* wektora, *odległości* pomiędzy dwoma wektorami i *iloczyn skalarny* dwóch wektorów. Są to pojęcia analogiczne do tych, które występują przy rozważaniu wektorów geometrycznych.

Przestrzeń wektorowa, w której jest zdefiniowana norma nazywa się *przestrzenią wektorową unormowaną*. Każda przestrzeń unormowana to *przestrzeń metryczna*, w której jest zdefiniowane odwzorowanie nazywane *metryką* lub *odległością*. Ważną własnością przestrzeni unormowanej jest jej *zupełność*. Formalna definicja przestrzeni zupełnej wymaga wprowadzenia pojęcia ciągu Cauchy'ego.

Ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni unormowanej V jest ciągiem $\{u_n\}$ takim, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $N > 0$ taka, że

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n, m > N \quad (2.16)$$

gdzie $\|\bullet\|$ jest oznaczeniem normy.

Nie wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne, można jednak udowodnić, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni unormowanej jest ciągiem Cauchy'ego.

Przestrzeń unormowaną nazywamy *zupełną*, jeśli *każdy* ciąg Cauchy'ego jest w niej zbieżny (do punktu, który nazywamy punktem granicznym). Przestrzeń unormowaną zupełną nazywamy *przestrzenią Banacha*.

Zupełność przestrzeni wektorowej jest wykorzystywana w teorii aproksymacji do dowodzenia zbieżności rozwiązania przybliżonego, łatwiej bowiem udowodnić, że dany ciąg jest ciągiem Cauchy'ego niż że jest zbieżny. Rozwiązując więc dane równanie, konstruujemy ciąg rozwiązań aproksymacyjnych i wykazujemy, że jest to ciąg Cauchy'ego. Następnie, ponieważ przestrzeń jest zupełna, wnioskujemy, że ciąg ten jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

Przyjmijmy następującą definicję normy w przestrzeni wektorowej:

Niech V będzie liniową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Norma w przestrzeni wektorowej V jest to funkcja, która transformuje każdy element $u \in V$ w liczbę rzeczywistą $\|u\|$, taką że $\|u\|$ spełnia następujące warunki:

- (1) $\|u\| \geq 0$ i $\|u\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $u = 0$ (dodatniość)
- (2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (jednorodność)
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $u, v \in V$ (nierówność trójkąta)

(2.17)

Z każdą normą jest związana metryka (lub odległość)

$$d(u, v) \equiv \|u - v\| \quad (2.18)$$

Tak zdefiniowana metryka nazywa się *metryką naturalną indukowaną przez normę*.

Zauważmy, że norma $\|\bullet\|$ w przestrzeni wektorowej V jest specjalnym funkcjonałem, który odwzorowuje przestrzeń iloczynu kartezjańskiego $V \times V$ w przestrzeń liczb rzeczywistych

$$\|\bullet\| : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Oczywiście aksjomaty normy są spełnione przez długość wektora geometrycznego, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| \equiv |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

W tym przypadku długość wektora \mathbf{x} jest dana przez $d(\mathbf{x}, 0) = \|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|$.

Możemy więc precyzyjnie powiedzieć, że przestrzeń metryczna jest to para złożona z pewnego zbioru V i funkcji $d(u, v)$ o wartościach rzeczywistych, określonej na produkcie $V \times V$ i spełniającej warunki (2.17).

Przykład 2.9. Niech $V = C[0, t_0]$ będzie zbiorem funkcji rzeczywistych, ciągłych w przedziale $[0, t_0]$.

Przykładami norm są:

$$\text{norma } L_\infty : \|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : 0 \leq t \leq t_0\}$$

$$\text{norma } L_2 : \|x\|_0 = \left[\int_0^{t_0} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

Jeśli $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ jest zdefiniowana w $C(\Omega)$, gdzie Ω jest kwadratem jednostkowym

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

to norma L_2 wynosi

$$\|u\|_0 = \left[\int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \, dx \, dy \right]^{1/2} = \frac{1}{2}$$

natomiast norma L_∞ jest równa

$$\|u\|_\infty = \sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \{|\sin \pi x \sin \pi y|\} = u(1/2, 1/2) = 1$$

Odległość pomiędzy dwiema funkcjami $u = \sin \pi x \sin \pi y$ i $v = \frac{1}{2}$ w sensie normy L_2 wynosi

$$\|u - v\|_0 = \left[\int_0^1 \int_0^1 \left(\sin \pi x \sin \pi y - \frac{1}{2} \right)^2 \, dx \, dy \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \right]^{1/2} = 0.3077$$

natomiast w sensie normy L_∞

$$\|u - v\|_\infty = \sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \left\{ \left| \sin \pi x \sin \pi y - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2}$$

Wartość $\|u - v\|_\infty = 1/2$ występuje w punktach $(x, y) = (0, y), (x, 0), (1/2, 1/2)$.

Podzbiór S przestrzeni unormowanej nazywamy domkniętym, jeśli zawiera wszystkie swoje punkty graniczne. Podzbiór domknięty jest wykorzystywany przy rozwiązywaniu równań metodami polegającymi na konstruowaniu rozwiązań przybliżonych, z których każde należy do zbioru funkcji S posiadających pewne własności. Jeśli S jest zbiorem domkniętym i jeśli udowodnimy, że sekwencja tych rozwiązań jest zbieżna, to jej granica także należy do S .

Niech S_1 i S_2 będą dwoma podzbiórmi przestrzeni unormowanej V takimi, że $S_1 \subset S_2$. Mówimy, że S_1 jest *zwarty* wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony, to znaczy, jeśli dla każdego $v \in S_2$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $u \in S_1$ takie, że

$$\|u - v\|_V < \varepsilon$$

Przestrzeń unormowaną V nazywamy *rozłączną*, jeśli istnieje w niej zbiór przeliczalny (tzn. z elementami, które można ułożyć sekwencyjnie), który jest zwarty w V . Przestrzeń $L_2(\Omega)$ stanowi przykład podprzestrzeni rozłącznej, ponieważ w przestrzeni tej zbiór wszystkich wielomianów z wymiernymi współczynnikami jest zwarty i przeliczalny.

2.5. Iloczyn skalarny

Wprowadzona w poprzednim punkcie definicja normy umożliwia określenie różnicy pomiędzy dwoma wektorami w przestrzeni wektorowej, w sensie ich długości lub odległości pomiędzy nimi. Teraz, dla określenia „kąta” lub „orientacji” pomiędzy dwoma wektorami, wprowadzimy koncepcję iloczynu skalarnego w przestrzeni wektorowej, analogicznie do iloczynu skalarnego, zdefiniowanego dla wektorów geometrycznych.

Iloczyn skalarny w liniowej przestrzeni wektorowej V jest formą dwuliniową określoną na iloczynie kartezjańskim $V \times V$, która z każdą parą wektorów $u, v \in V$ wiąże skalar, oznaczony (u, v) , i spełnia następujące warunki:

- (1) $(u, v) = (v, u)$ (symetria)
 - (2) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ (jednorodność)
 - (3) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ (addytywność)
 - (4) $(u, u) > 0$ i $(u, u) = 0, \iff u = 0$ (dodatnia określoność)
- (2.19)

dla każdego $u, u_1, u_2, v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Iloczyn skalarny jest związany z normą wzorem

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad (2.20)$$

Tak obliczona norma nosi nazwę *metryki naturalnej generowanej przez iloczyn skalarny*.

Ważną własnością iloczynu skalarnego jest tzw. nierówność Cauchy’ego-Schwarza

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)(v, v)} = \|u\| \|v\| \quad (2.21)$$

Znak równości ma miejsce tylko wtedy, jeśli u i v są liniowo zależne.

Przestrzeń wektorowa, w której jest zdefiniowany iloczyn skalarny nazywa się *przestrzenią iloczynu skalarnego* (lub *przestrzenią unitarną*).

Przykład 2.10. Niech $V = \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Iloczyn skalarny

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.22)$$

spełnia aksjomaty (2.19), \mathbf{x} i \mathbf{y} są wektorami w n -wymiarowej przestrzeni Euklidesa i stąd wynikiem jest liczba.

Przykład 2.11. Iloczyn skalarny $L_2(\Omega)$. Niech $V = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definiujemy

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} \quad (2.23)$$

dla wszystkich $u, v \in L_2(\Omega)$. Jest widoczne, że iloczyn skalarny $(u, v)_0$ spełnia własności (1),(2) i (3) w (2.19). Dla sprawdzenia własności (4) podstawimy $v = u$ do (2.23)

$$(u, u)_0 = \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \geq 0$$

Równość ma miejsce tylko wtedy, jeśli $u = 0$. Tak więc $(u, v)_0$ jest iloczynem skalarnym i nazywamy go *iloczynem skalarnym* L_2 . Normą naturalną generowaną przez iloczyn skalarny jest norma L_2 , $\|u\|_0$.

Dla przykładu – iloczyn skalarny L_2 funkcji $u = \sin \pi x \sin \pi y$ i $v = x$ w kwadracie jednostkowym wynosi

$$(u, v)_0 = \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi x \sin \pi y \cdot x \, dx dy = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\pi} = 0.2026$$

2.6. Przestrzeń Hilberta

Przestrzeń Hilberta nazywamy przestrzeń zupełną z metryką naturalną generowaną przez iloczyn skalarny.

Przykład 2.12. Przestrzeń euklidesowa \mathbb{R}^n

Przestrzeń euklidesowa n -wymiarowa jest przestrzenią Hilberta. Iloczyn skalarny w \mathbb{R} został zdefiniowany przez (2.22). Wykorzystując, że \mathbb{R} jest zupełna, można udowodnić, że \mathbb{R}^n też jest zupełna. Zupełność \mathbb{R}^n implikuje z kolei zupełność wszystkich skończenie wymiarowych liniowych przestrzeni wektorowych.

Przykład 2.13. Przestrzeń Hilberta $H^m(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Najważniejszym przykładem przestrzeni Hilberta jest przestrzeń $H^0(\Omega)$ z iloczynem skalarnym $L_2(\Omega)$. Przestrzeń Hilberta pierwszego rzędu $H^1(\Omega)$ jest specjalnym przypadkiem tzw. *przestrzeni Sobolewa* z iloczynem skalarnym uwzględniającym także pochodne pierwszego rzędu

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Przez analogię do powyższego wzoru będziemy definiowali i rozumieli przestrzeń Hilberta m rzędu, włączając do definicji iloczynu skalarnego pochodne do rzędu m włącznie. Dodatkowo wprowadzimy oznaczenie przestrzeni $H_0^m(\Omega)$ dla przestrzeni Hilberta, będącej liniową podprzestrzenią funkcji z $H^m(\Omega)$, które znikają razem ze swoimi pochodnymi aż do rzędu $m - 1$ na granicy obszaru Ω .

2.7. Uogólnione całkowanie przez części

Całkowanie przez części jest często wykorzystywane przy budowaniu sformułowania całkowego dla równań różniczkowych. Poniżej podamy stosowne wzory, które często będziemy wykorzystywali.

Całkowanie przez części funkcji jednej zmiennej

Przyjmijmy, że u i v są wystarczająco ciągłymi funkcjami zmiennej x . Wzór całkowania przez części ma postać

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b w dv = - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \quad (2.24)$$

co bezpośrednio wynika ze scałkowania w przedziale (a, b) identyczności

$$\frac{d}{dx}(w \cdot v) = \frac{dw}{dx}v + w \frac{dv}{dx}$$

Rozważając wyrażenie całkowe

$$\int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int_a^b w \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \int_a^b w \frac{dv}{dx}$$

gdzie $v = du/dx$, otrzymamy po wykorzystaniu (2.24) tożsamość

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2 u}{dx^2} dx &= - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) = \\ &= - \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(b) \frac{du}{dx} \Big|_b - w(a) \frac{du}{dx} \Big|_a \end{aligned} \quad (2.25)$$

Podobnie, stosując dwukrotnie całkowanie przez części, dostaniemy

$$\begin{aligned} \int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx &= \int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_a \frac{dv}{dx} \Big|_a - \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_b \frac{dv}{dx} \Big|_b + \\ &+ v(b) \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_b - v(a) \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_a \end{aligned} \quad (2.26)$$

Uogólnione całkowanie przez części funkcji dwóch zmiennych

Całkowanie przez części w dwóch i trzech wymiarach wykonuje się, wykorzystując twierdzenie Gaussa o dywergencji. Pokażemy to dla przypadku dwuwymiarowego.

Twierdzenie 1 (Gaussa o dywergencji)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.27)$$

gdzie $\operatorname{div} \mathbf{q}$ jest dywergencją wektora \mathbf{q} zdefiniowaną wzorem

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (2.28)$$

oraz Ω jest oznaczeniem obszaru o powierzchni Ω , a Γ – jego brzegiem o normalnej zewnętrznej do brzegu \mathbf{n} . T oznacza transpozycję.

Twierdzenie 2 (Greena-Gaussa – uogólnione całkowanie przez części)

$$\int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} d\Omega \quad (2.29)$$

gdzie $\phi(x, y)$ jest funkcją, a $\nabla\phi$ wektorem gradientu

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Przykład 2.14. Dany jest problem brzegowy w formie

$$2\frac{d^2u}{dx^2} - 3\frac{d^2u}{dy^2} + (x+y)u + \frac{x}{y} = 0$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi, zdefiniowany na prostokącie $\Omega(x, y)$, $1 < x < 3$, $1 < y < 2$.

Całkowanie przez części równania całkowego

$$\int_{\Omega} \phi \left(2\frac{d^2u}{dx^2} - 3\frac{d^2u}{dy^2} + (x+y)u + \frac{x}{y} \right) d\Omega = 0$$

prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} 2\frac{\partial u}{\partial x} \phi n_x d\Gamma - \int_{\Omega} 2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma} 3\frac{\partial u}{\partial y} \phi n_y d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} 3\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \left((x+y)u + \frac{x}{y} \right) \phi d\Omega = 0 \end{aligned}$$

gdzie n_x , n_y są współrzędnymi wektora \mathbf{n} .

Rozdział 3

Modele matematyczne w mechanice

3.1. Twierdzenie Frecheta-Riesza

W rozdziale tym będziemy rozważali sformułowania wariacyjne równań operatorowych w formie

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.1)$$

gdzie A jest operatorem liniowym lub nieliniowym z przestrzeni unitarnej U do innej przestrzeni unitarnej V . Równanie (3.1) jest abstrakcyjną postacią wielu równań występujących przy rozwiązywaniu problemów inżynierskich.

Jest to model matematyczny w sformułowaniu lokalnym i na przykład w teorii sprężystości równania takiego modelu otrzymujemy w rezultacie rozpatrzenia własności ciała sprężystego w punkcie materialnym.

Przykład 3.1. Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\nabla^2 u \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.2a)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma \quad (3.2b)$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną, a Γ – brzegiem obszaru Ω . Jest to tzw. problem Dirichleta dla równania Poissona.

Założymy, że $f \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$. Klasycznym rozwiązaniem problemu (3.2) jest funkcja $u(x, y)$, która jest ciągła w obszarze domkniętym $\bar{\Omega}$, spełnia

równanie (3.2a) w obszarze otwartym Ω i jest równa zeru na brzegu Γ . Przez założenie, że $f \in C(\overline{\Omega})$, rozwiązanie $u(x, y)$ należy do $C^2(\overline{\Omega})$ przestrzeni funkcji ciągłych, wraz z pochodnymi aż do drugiego rzędu, oraz równych zeru na brzegu Γ . Zbiór tych *funkcji dopuszczalnych*

$$\mathcal{D}_A = \{u(\mathbf{x}) \in C^2(\overline{\Omega}), \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ na } \Gamma\}$$

tworzy przestrzeń liniową, ponieważ jeśli u_1 i u_2 są dowolnymi funkcjami z \mathcal{D}_A , to wówczas ich kombinacja liniowa $\alpha u_1 + \beta u_2$, dla dowolnych skalarów α i β , również należy do \mathcal{D}_A . Należy zwrócić uwagę, że dla niejednorodnych warunków brzegowych, np. $u = g$ na Γ zbiór \mathcal{D}_A nie jest przestrzenią liniową, ponieważ dla $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_A$ mamy $u_1 + u_2 = 2g$ na brzegu Γ tak, że warunek $u_1 + u_2 = g$ na brzegu Γ nie jest spełniony.

Powyższy problem można sformułować następująco: należy znaleźć $u \in \mathcal{D}_A$ takie, które spełnia równanie (3.2a). Zauważmy, że warunek brzegowy (3.2b) jest włączony do specyfikacji przestrzeni \mathcal{D}_A .

Przestrzeń \mathcal{D}_A nazywamy *dziędziną (domeną) operatora A*. Operator $A = -\nabla^2$ przypisuje do każdej funkcji $u \in \mathcal{D}_A$ funkcję $v = -\nabla^2 u$ ciągłą w Ω . Zbiór wszystkich funkcji $v = -\nabla^2 u$ jest również przestrzenią liniową i nazwiemy go zakresem operatora $A = -\nabla^2$ oraz oznaczymy przez $\mathcal{R}(A)$.

Oprócz operatorów różniczkowych rozważać będziemy również operatory macierzowe. Na przykład rozwiązanie równania różniczkowego metodą wariacyjną prowadzi do konieczności rozwiązywania układu równań algebraicznych, przedstawionego w formie macierzowej. Dlatego też zainteresowani jesteśmy podaniem warunków, pod którymi równanie operatorowe (3.1) ma rozwiązanie, przy czym założymy, że dokładne metody rozwiązania nie mogą być zastosowane i musimy skorzystać z metod przybliżonych. Takimi metodami są metody wariacyjne, omówione w rozdziale 4, które wykorzystują sformułowania wariacyjne równań.

Funkcjonał liniowy zdefiniowany w punkcie 2.3 jest specjalnym rodzajem operatora liniowego i wprowadzone tam definicje są również ważne dla operatorów liniowych. W podobny sposób definiuje się funkcyjonały liniowe w przestrzeni Hilberta.

Rozważmy przestrzeń unitarną V i niech v_0 będzie ustalonym elementem w V .

Operator l zdefiniowany jako

$$l(u) = (v_0, u) \quad \text{dla każdego } u \in V$$

jest funkcjonałem liniowym, ponieważ

$$l(\alpha u + \beta v) = (v_0, \alpha u + \beta v) = \alpha(v_0, u) + \beta(v_0, v) = \alpha l(u) + \beta l(v)$$

Operator $l(u)$ jest też ograniczony, ponieważ z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy, że

$$|l(u)| = |(v_0, u)| \leq \|v_0\| \|u\| = M \|u\|$$

gdzie $M = \|v_0\|$ jest stałą.

Z powyższych wywodów wynika, że liniowy funkcjonał ograniczony można związać z każdym elementem przestrzeni iloczynu skalarnego. Odwrotne stwierdzenie jest prawdziwe tylko w przestrzeni Hilberta. Rozstrzyga o tym twierdzenie o przedstawialności każdego funkcjonału liniowego i ciągłego w przestrzeni Hilberta w postaci iloczynu skalarnego.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Frecheta-Riesz) *Niech l będzie liniowym funkcjonałem ograniczonym, zdefiniowanym w przestrzeni Hilberta H . Wówczas istnieje wektor v_0 w H taki, że*

$$l(w) = (v_0, w) \tag{3.3}$$

dla wszystkich w z przestrzeni H .

Wektor $v_0 \in H$ nazywa się reprezentacją funkcjonału l .

W dalszym ciągu podamy ważne pojęcia operatora sprzężonego i samo-sprzężonego. Rozważmy w tym celu operator ograniczony T w przestrzeni Hilberta H (to znaczy taki, że $T : H \rightarrow H$). Dla ustalonego elementu v z H iloczyn skalarny (Tu, v) w H może być traktowany jako liczba zmieniająca się z u . Stąd $(Tu, v) = l(u)$ jest funkcjonałem liniowym w H . Ponieważ T jest ograniczony, to można wykazać, że $l(u)$ jest ograniczony. Z twierdzenia Frecheta-Riesz wnioskujemy więc, że istnieje element $v_0 \in H$ spełniający równość

$$(Tu, v) = (u, v_0)$$

dla wszystkich $u \in H$. To z kolei implikuje, że dla danego $v \in H$ istnieje jednoznaczny element v_0 związany z elementem v . Innymi słowy możemy powiedzieć, że istnieje odwzorowanie T^* przestrzeni H samej w siebie takie, że $v_0 = T^*v$. Operator T^* nazywamy *operatorem sprzężonym* z operatorem T i wówczas

$$(Tu, v) = (u, T^*v)$$

Liniowy operator T jest *samosprzężony*, jeśli $T = T^*$, czyli

$$(Tu, v) = (u, Tv)$$

Zauważmy, że dowolny operator ograniczony $A: H \rightarrow H$ postaci

$$A = T^* T$$

jest samosprzężony, ponieważ

$$(Au, v) = (T^* Tu, v) = (Tu, Tv) = (u, T^* Tv) = (u, Av)$$

W końcu liniowy operator T nazywamy *normalnym*, jeśli $T^* T = T T^*$. Oczywiście każdy operator samosprzężony jest normalny.

Przykład 3.2. Niech \mathcal{D}_T będzie podprzestrzenią w $L_2[0, 1] \equiv H^0[0, 1]$, zawierającą ciągłe i różniczkowalne funkcje $u(x)$ w $0 \leq x \leq 1$ z warunkiem $u(0) = 0$ i niech T będzie operatorem różniczkowym rzędu pierwszego, $Tu = \frac{du}{dx}$. Obliczymy operator T^* .

Wykonajmy całkowanie

$$(Tu, v) = \int_0^1 Tu v \, dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} v \, dx = \int_0^1 u \left(-\frac{dv}{dx} \right) dx + (uv) \Big|_0^1$$

Pierwszy warunek brzegowy znika, ponieważ $u(0) = 0$. Drugi warunek brzegowy zniknie, jeśli przyjmiemy, że \mathcal{D}_T^* jest podzbiorem w $L_2[0, 1]$ zawierającym ciągłe i różniczkowalne funkcje $v(x)$ w $0 \leq x \leq 1$, spełniające warunek $v(1) = 0$. Otrzymujemy stąd, że $T^* = -\frac{d}{dx}$. Ponieważ $T^* \neq T$ i $\mathcal{D}_T^* \neq \mathcal{D}_T$, to operator T nie jest operatorem samosprzężonym.

Przykład 3.3. Niech \mathcal{D}_T będzie podprzestrzenią w $H^1[0, 1]$ funkcji $u(x)$, z ciągłą pierwszą pochodną w $0 \leq x \leq 1$, z warunkami $u(0) = u(1) = 0$, i niech $T = -\frac{d^2}{dx^2}$. Operator sprzężony T^* obliczymy podobnie jak w poprzednim przykładzie

$$\begin{aligned} (Tu, v) &= \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2}\right) v \, dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx}\right) \, dx + \left(-\frac{du}{dx} v\right) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 u \left(-\frac{d^2v}{dx^2}\right) \, dx + \left[-\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}\right] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że \mathcal{D}_T^* jest podprzestrzenią w $H^1[0, 1]$ funkcji $v(x)$ z ciągłymi pierwszymi pochodnymi w $0 \leq x \leq 1$, z warunkami $v(0) = v(1) = 0$, to mamy

$$(Tu, v) = \int_0^1 u \left(-\frac{d^2v}{dx^2}\right) \, dx = (u, T^*v)$$

lub $T^* = -\frac{d^2}{dx^2} = T$. Oznacza to, że T jest operatorem samosprzężonym.

3.2. Operatory: symetryczny, dodatni i dodatnio określony

Operator A , liniowy w \mathcal{D}_A , nazywamy *symetrycznym* w $\mathcal{D}_A \subset H$, jeśli jest gęsto określony (tj. domknięcie jego dziedziny równa się całej przestrzeni) oraz gdy dla każdej pary elementów u, v z \mathcal{D}_A zachodzi równość

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (3.4)$$

Oczywiście każdy operator samosprzężony ($A = A^*$) jest zawsze operatorem symetrycznym.

Operator symetryczny nazywamy *dodatnim* w \mathcal{D}_A , jeśli dla wszystkich u w \mathcal{D}_A spełnione są relacje

$$(Au, u) \geq 0 \quad \text{i} \quad (Au, u) = 0, \quad \text{co oznacza, że } u = 0 \text{ w } \mathcal{D}_A \quad (3.5)$$

Jeśli jeszcze możemy dobrać stałą $\gamma > 0$ taką, że dla wszystkich u w \mathcal{D}_A zachodzi relacja

$$(Au, u) \geq \gamma \|u\|^2 \quad (3.6)$$

to mówimy, że operator A jest *dodatnio określony* w \mathcal{D}_A .

Przykład 3.4. Operator $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ jest również dodatni. Jeśli bowiem w pierwszym całkowaniu przez części w przykładzie 3.3 przyjmiemy $u = v$ oraz $v(0) = v(1) = 0$, to otrzymamy

$$(Au, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0 \quad \text{i} \quad (Au, u) = 0 \quad \text{dla} \quad u = 0$$

Można też wykazać, że $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ jest dodatnio określony.

Innym przykładem operatora dodatnio określonego jest operator o postaci $A \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \equiv -\nabla^2$ z dziedziną \mathcal{D}_A będącą zbiorem funkcji należących do $C^2(\Omega)$ i znikających na brzegu Γ .

3.3. Sformułowanie słabe (wariacyjne)

Rozważmy problem Dirichleta dla równania Poissona

$$-\nabla^2 u = f \quad \text{w} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.7a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u = g \quad \text{na brzegu} \quad \Gamma \quad (3.7b)$$

Dla $f \in C(\Omega)$ rozwiązanie tego problemu $u \in C^2(\Omega)$ i spełnia niejednorodny warunek brzegowy (3.7b). Jeśli $f \notin C^2(\Omega)$, to równanie (3.7a) nie ma rozwiązania klasycznego (tzn. $u \notin C^2(\Omega)$) i wówczas możliwe jest poszukiwanie rozwiązania w sensie uogólnionym.

W tym celu przemnożymy równanie (3.7a) przez funkcję wagową $v(\mathbf{x})$, wystarczająco gładką i spełniającą jednorodny warunek brzegowy $v = 0$ na brzegu Γ , $v \in H_0^1(\Omega)$, i następnie przecałkujemy wynik, otrzymując tzw. *ważoną formę całkową równania różniczkowego*

$$-\int_{\Omega} v \nabla^2 u \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x} \quad (3.8)$$

Całkując teraz przez części lewą stronę równania (3.8), otrzymamy równanie, które w zapisie macierzowym ma postać

$$-\oint_{\Gamma} (\nabla u)^T \mathbf{n} v \, ds + \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla u \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x} \quad (3.9)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnej zewnętrznej do brzegu Γ w punkcie \mathbf{x} .

Uwzględniając, że $v = 0$ na brzegu Γ , dostaniemy

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla u \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v f \, d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

gdzie $(\nabla v)^T \nabla u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definiując następnie przestrzeń funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{D}_A = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, u \in H^1(\Omega) \text{ i } \forall \mathbf{x} \in \Gamma, u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\} \quad (3.11)$$

sformułowanie słabe (lub wariacyjne) problemu brzegowego (3.7) można przedstawić w następującej formie:

$$\begin{aligned} &\text{należy znaleźć funkcję } u \in \mathcal{D}_A \text{ taką, że} \\ &\text{dla } \forall v \in H_0^1(\mathbf{x}) \text{ spełnione będzie równanie (3.10).} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Konkluzją końcową jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4 . *Jeśli $u \in H^2(\Omega)$, to $u(\mathbf{x})$ jest rozwiązaniem problemu brzegowego (3.7) wtedy i tylko wtedy, jeśli $u(\mathbf{x})$ jest rozwiązaniem problemu wariacyjnego (3.12).*

Zauważmy, że rozwiązanie (3.7) spełnia oczywiście równanie całkowite (3.10), natomiast nie można wykluczyć innych funkcji $u(\mathbf{x})$, które nie spełniając równań problemu brzegowego (3.7) będą spełniać (3.10). Stanowi to kolejne uzasadnienie dla nazwy: sformułowanie słabe. Jeśli warunek brzegowy (3.7b) jest jednorodny: $u = 0$ na brzegu Γ , to wówczas w sformułowaniu wariacyjnym $u \in H_0^1(\Omega)$.

Wykorzystując definicję iloczynu skalarnego $L_2(\Omega)$, równanie (3.10) możemy napisać w postaci

$$(\nabla v, \nabla u)_0 = (v, f)_0 \quad \text{dla każdego } v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.13)$$

Na koniec parę uwag. Terminy: sformułowanie słabe i sformułowanie wariacyjne będą używane zamiennie. Ta druga nazwa jest uzasadniona tym, że funkcja wagowa ma znaczenie *zmiany wirtualnej* (albo wariacji) funkcji pierwotnej $v \sim \delta u$. Jeśli więc mamy warunek brzegowy $u = g$ na brzegu Γ , to nakłada to na ten brzeg wymóg, aby funkcja wagowa $v = 0$. Podkreślmy, że forma słaba istnieje dla wszystkich problemów – liniowych lub nieliniowych – które są określone przez równania różniczkowe rzędu drugiego lub wyższego. Jeśli równanie różniczkowe jest liniowe i parzystego rzędu, to jego słaba forma będzie *symetryczną* formą dwuliniową ze względu na funkcję u i funkcję wagową v .

Przykład 3.5. Wyprowadzić sformułowanie słabe dla jednowymiarowego problemu brzegowego

$$x^2 u'' + 2xu' + u + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{d(x^2 u')}{dx} + u + 1 = 0 \quad \text{dla } 1 < x < 2 \quad (3.14a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(1) = 1, \quad u'(2) = 1 \quad (3.14b)$$

Zwróćmy uwagę, że warunki brzegowe są niejednorodne i zadane dla funkcji i jej pierwszej pochodnej. Wyprzedzając uzasadnienie (patrz p.3.6), pierwszy typ warunków brzegowych nazwiemy *podstawowym* warunkiem brzegowym, natomiast drugi typ *naturalnym* warunkiem brzegowym.

Mnożąc równanie różniczkowe (3.14a) przez funkcję wagową $v(x)$ i całkując po obszarze rozwiązania, dostaniemy

$$\int_1^2 v \left(\frac{d(x^2 u')}{dx} + u + 1 \right) dx = 0$$

Następnym krokiem jest wykonanie całkowania przez części w celu zrównania rzędu pochodnych funkcji pierwotnej $u(x)$ i funkcji wagowej $v(x)$

$$(vx^2 u') \Big|_{x=2} - (vx^2 u') \Big|_{x=1} + \int_1^2 (-v' x^2 u' + vu + v) dx = 0$$

lub

$$4v(2)u'(2) - v(1)u'(1) + \int_1^2 (-v'x^2u' + vu + v) dx = 0 \quad (3.15)$$

Wprowadzając do (3.15) warunki brzegowe $v(1) = 0$ i $u'(2) = 1$, otrzymamy końcową postać sformułowania słabego

$$\int_1^2 (-v'x^2u' + vu + v) dx + 4v(2) = 0 \quad (3.16)$$

z podstawowym warunkiem brzegowym $u(1) = 1$. Naturalny warunek brzegowy został wprowadzony do równania (3.16).

Jeśli utożsamimy $v = \delta u$, to równanie (3.15) będziemy mogli napisać w formie

$$4\delta u(2)u'(2) - \delta u(1)u'(1) + \int_1^2 \left(-\delta \left(\frac{1}{2} x^2 u'^2 \right) + \delta \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \delta u \right) dx = 0$$

a po uwzględnieniu warunku brzegowego $u'(2) = 1$ otrzymamy

$$4\delta u(2) - \delta u(1)u'(1) + \delta \left[\int_1^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 u'^2 + \frac{1}{2} u^2 + u \right) dx \right] = 0 \quad (3.17)$$

Uwzględniając teraz, że funkcja pierwotna $u(x)$ musi spełniać warunek brzegowy $u(1) = 1$, równanie (3.17) przyjmie postać

$$\delta(4u(2)) + \delta \left[\int_1^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 u'^2 + \frac{1}{2} u^2 + u \right) dx \right] = 0$$

lub

$$\delta \left[4u(2) + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 u'^2 + \frac{1}{2} u^2 + u \right) dx \right] = 0$$

Oznacza to, że rozwiązaniem (3.14) jest funkcja $u(x)$, dla której znika pierwsza wariacja $\delta Q(u) = 0$, gdzie funkcjonal

$$Q(u) = 4u(2) + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 u'^2 + \frac{1}{2} u^2 + u \right) dx \quad (3.18)$$

Konkludując możemy powiedzieć, że rozważany problem (3.14) jest problemem samosprzężonym; funkcja $u(x)$, która jest rozwiązaniem (3.14), minimalizuje funkcjonal (3.18).

Przykład 3.6. Wyprowadzić sformułowanie słabe dla dwuwymiarowego problemu brzegowego

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \quad \text{w } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.19a)$$

gdzie $\Omega(x, y)$ jest prostokątem: $0 < x < \pi$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, z warunkami brzegowymi na brzegu Γ

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{na brzegach } (x = 0, y) \text{ i } (x = \pi, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x(x - \pi) \quad \text{na brzegach } (x, y = -\pi/2) \text{ i } (x, y = \pi/2) \end{aligned} \quad (3.19b)$$

Ważone równanie całkowe ma postać

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0$$

Wykorzystanie uogólnionego całkowania przez części prowadzi do równania

$$\int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} n_x + v \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \sin x \right) dx dy = 0$$

które, z kolei, po wprowadzeniu warunku $v = 0$ na brzegach, gdzie wyspecyfikowane są warunki dla funkcji u , przyjmuje formę

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} n_x + v \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) \Big|_{y=-\pi/2} dx + \int_0^{\pi} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} n_x + v \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) \Big|_{y=\pi/2} + \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \sin x \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podstawiając teraz do (3.20) $n_x = 0$, $n_y = 1$ – dla górnej krawędzi $y = \pi/2$ i $n_x = 0$, $n_y = -1$ – dla dolnej krawędzi $y = -\pi/2$, oraz wprowadzając

naturalne warunki brzegowe, otrzymamy następujące równanie sformułowania słabego:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} x(x - \pi) v\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx - \int_0^{\pi} x(x - \pi) v\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) dx + \\ & - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \nabla u \, dx \, dy - \int_{\Omega} v \sin x \, dx \, dy = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdzie wykorzystano definicje gradientów funkcji v i u . Przyjmując, że $v = \delta u$ równanie (3.21) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} x(x - \pi) \delta u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx - \int_0^{\pi} x(x - \pi) \delta u\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) dx + \\ & - \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \sin x \right) dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} & \delta \left[\int_0^{\pi} x(x - \pi) u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx - \int_0^{\pi} x(x - \pi) u\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) dx + \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \sin x \right) dx \, dy \right] = 0 \end{aligned}$$

Stąd funkcjonal $Q(u)$ w równaniu wariacyjnym $\delta Q(u) = 0$ wynosi

$$\begin{aligned} Q(u) = & \int_0^{\pi} x(x - \pi) u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx - \int_0^{\pi} x(x - \pi) u\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) dx + \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \sin x \right) dx \, dy \end{aligned} \quad (3.22)$$

Również i w tym przykładzie stwierdzamy, że rozważany problem brzegowy jest problemem samosprzężonym.

3.4. Minimum funkcjonału kwadratowego

Jeśli operator A w równaniu (3.1) z jednorodnymi warunkami brzegowymi jest dodatni (czyli również symetryczny) w przestrzeni funkcji dopuszczalnych \mathcal{D}_A i $f \in H$, to można wykazać, że rozwiązaniem równania (3.1) jest funkcja, która minimalizuje pewien funkcjonal kwadratowy $Q(u)$. Odwrotnie, jeśli potrafimy wyznaczyć funkcję u , która minimalizuje $Q(u)$ w przestrzeni Hilberta H , to funkcja ta jest rozwiązaniem równania (3.1).

Poniższe twierdzenie ustala równoważność pomiędzy równaniem operatorowym (3.1) i stowarzyszonym z nim funkcjonałem kwadratowym.

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o minimum funkcjonału) *Niech operator $A: \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta, będzie operatorem liniowym i dodatnim w \mathcal{D}_A i niech $f \in H$. Wówczas funkcjonal kwadratowy*

$$Q(u) \equiv (Au, u) - 2(f, u) \quad (3.23)$$

gdzie (\bullet, \bullet) jest iloczynem skalarnym w H , przyjmuje dla $u_0 \in \mathcal{D}_A$ wartość minimalną wtedy i tylko wtedy, jeśli u_0 jest także rozwiązaniem równania (3.1).

W dalszym ciągu dla identyfikacji przestrzeni \mathcal{D}_A funkcji dopuszczalnych będziemy przyjmować, że rozważane problemy brzegowe mają jednorodne warunki brzegowe. Niejednorodne warunki brzegowe zostaną rozpatrzone oddzielnie w punkcie 3.7.

Przykład 3.7. Rozważmy równanie różniczkowe

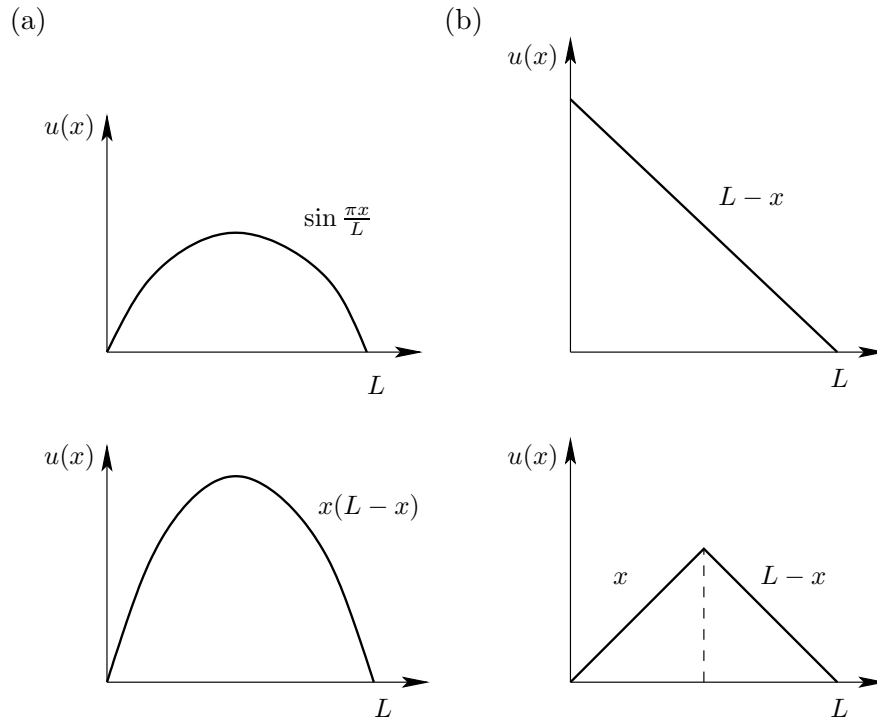
$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (3.24a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (3.24b)$$

Przyjmiemy, że funkcja $a(x)$ i jej pierwsza pochodna są ciągłe w $[0, L]$ i że $a(x) > 0$ w $[0, L]$.

W tym przykładzie przyjmiemy, że $H = L_2[0, L]$ i $A \equiv -\frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} \right)$. Wówczas \mathcal{D}_A jest zwartą przestrzenią liniową funkcji dopuszczalnych, które są ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne w przedziale $[0, L]$ oraz spełniają warunki



Rys.3.1. Funkcje dopuszczalne i niedopuszczalne dla problemu (3.24)

brzegowe (3.24b). Na rys.3.1 pokazano dla przykładu funkcje dopuszczalne (a) i niedopuszczalne (b).

Funkcja $u = L - x$, mimo że należy do przestrzeni $C^2[0, L]$, nie jest dopuszczalna, ponieważ nie znika dla $x = 0$. Druga z funkcji (b) na rys.3.1 spełnia warunki $u(0) = u(L) = 0$, ale nie należy do przestrzeni $C^2[0, L]$ (nie należy nawet do $C^1[0, L]$, ponieważ $\frac{du}{dx}$ jest nieciągła w punkcie $x = L/2$). Jest więc również funkcją niedopuszczalną.

Wykorzystując przykłady 3.3 i 3.4 można wykazać, że operator A jest symetryczny ($(Au, v)_0 = (u, Av)_0$) i dodatni w \mathcal{D}_A , co oznacza, że funkcjonal kwadratowy $Q(u)$, po wycalkowaniu przez części, można napisać w postaci

$$\begin{aligned}
Q(u) &= (Au, u) - 2(f, u) = \int_0^L \left[\left(-\frac{d}{dx} \right) \left(a \frac{du}{dx} \right) u - 2fu \right] dx \\
&= \int_0^L \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2fu \right] dx
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dla problemu deformacji podłużnej pręta pierwsza część całki jest podwojoną energią sprężystą pręta, a druga część przedstawia podwojoną pracę obciążenia f . Jest to bardzo ważne spostrzeżenie mające charakter ogólny, które wielokrotnie będziemy wykorzystywali, formułując funkcjonały kwadratowe dla różnych zagadnień inżynierskich. Twierdzenie 5 wyraża bowiem *zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej*, znaną w teorii sprężystości. Z funkcjonałem całkowitej energii potencjalnej jest związane równanie operatorowe znane w rachunku wariacyjnym jako *równanie Eulera* (lub równanie Ostrogradzkiego dla problemów dwuwymiarowych).

Utożsamienie równania (3.23) z całkowitą energią potencjalną uzasadnia stosowaną często nazwę *sformułowanie globalne* do modelu matematycznego zbudowanego na podstawie rozważenia energii układu.

3.5. Przestrzeń energii

Twierdzenie 5 nie rozstrzyga, czy równanie (3.1) ma rozwiązanie lub czy $Q(u)$ ma minimum w \mathcal{D}_A , podaje tylko relacje pomiędzy równaniem operatorowym i stowarzyszonym z nim funkcjonałem kwadratowym. Innymi słowy twierdzenie 5 jest ważne przy założeniach, że równanie operatorowe (3.1) ma rozwiązanie u_0 w \mathcal{D}_A lub że funkcjonał kwadratowy (3.23) ma minimum w \mathcal{D}_A .

Założenia te nie zawsze są spełnione. Jeśli w przykładzie 3.7 funkcja f nie byłaby ciągła w $[0, L]$, powiedzmy równa pewnej stałej w $(0, a)$ i zeru w (a, L) , to wówczas rozwiązanie równania (3.24) nie będzie należało do zdefiniowanej w tym przykładzie przestrzeni \mathcal{D}_A , ponieważ dla każdego $u \in \mathcal{D}_A$ Au jest funkcją ciągłą w $[0, L]$. Stąd funkcjonał $Q(u)$ nie przyjmie swojego minimum w \mathcal{D}_A . Opisaną trudność pokonuje się, identyfikując nową przestrzeń, taką aby mogła ona objąć również funkcje nieciągłe z $L_2[0, L]$, przy zachowaniu w tej przestrzeni warunku minimum $Q(u)$. Ogólnie można powiedzieć, że przestrzeń ta, będąca nową domeną operatora A , powinna być wystarczająco

duża, tak aby można było nią objąć rozwiązania problemów z „pewnymi” nieciągłościami w danych. Sposób budowy takiej przestrzeni wyjaśnimy na przykładzie.

Rozważając przykład 3.7 stwierdziliśmy, że operator A jest symetryczny i dodatni, zatem

$$(u, v)_A = (Au, v) = \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx, \quad a > 0$$

jest iloczynem skalarnym w \mathcal{D}_A .

Normę naturalną generowaną przez iloczyn skalarny $(\bullet, \bullet)_A$ wyraża w tym przypadku wzór

$$\|u\|_A = (u, u)_A = \int_0^L a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (3.26)$$

Powyższe wzory definiują nową liniową przestrzeń wektorową z iloczynem skalarnym. Ta nowa przestrzeń, oznaczona przez H_A , jest również przestrzenią Hilberta i nazywa się *przestrzenią energii*. Nazwa ta jest specjalnie uzasadniona w mechanice, ponieważ, jak już wiemy, norma (3.26) w H_A jest podwojoną energią sprężystą problemu fizycznego, określonego przez równanie operatorowe $Au = f$.

Przestrzeń energii H_A jest znacznie „szersza” niż przestrzeń \mathcal{D}_A . Elementy przestrzeni H_A , razem z ich pochodnymi aż do rzędu m , gdzie $2m$ jest rzędem dodatnio określonego operatora A , są ciągłe i całkowalne z kwadratem, podczas gdy elementy \mathcal{D}_A są ciągłe wraz z pochodnymi aż do rzędu $2m$.

Rozważmy dalej operator A z przykładu 3.7. Obecnie $H = L_2[0, L]$ i \mathcal{D}_A zawiera funkcje $u(x)$, które są ciągłe wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale domkniętym $[0, L]$ oraz spełniają warunki brzegowe $u(0) = u(L) = 0$.

Funkcjonał kwadratowy $Q(u)$ ma postać

$$Q(u) = (u, u)_A - 2(f, u) = \int_0^L \left[\left(-\frac{d}{dx} \right) \left(a \frac{du}{dx} \right) u - 2fu \right] dx \quad u \in \mathcal{D}_A$$

Przestrzeń energii H_A natomiast zawiera funkcje z $H = L_2[0, L]$ nie należące do \mathcal{D}_A , lecz do szerszej przestrzeni funkcji u , których pierwsze pochodne są całkowalne z kwadratem w $(0, L)$ i spełniają warunki brzegowe $u(0) = u(L) = 0$; to znaczy $H_A = H_0^1(0, L)$.

Ponieważ $(\bullet, \bullet)_A$ i (\bullet, \bullet) są zdefiniowane dla wszystkich $u \in H_A \subset H$, to możemy rozszerzyć definicję $Q(u)$ na całą przestrzeń H_A , pisząc

$$Q(u) = (u, u)_A - 2(f, u) = \int_0^L \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2fu \right] dx \quad u \in H_A$$

Nie będziemy tego robić, ale można udowodnić, że funkcjonal rozszerzony w ten sposób ma swoje minimum w H_A i funkcja u_0 , dla której ma miejsce to minimum, jest określona w sposób jednoznaczny przez $f \in H$.

Ważne jest również i to, że rozwiązanie u_0 zależy w sposób ciągły od danej funkcji f . Oznacza to, że jeśli f jest dane w postaci przybliżonej (na przykład na skutek aproksymacji obszaru Ω) i zmiana ta jest „mała” w sensie normy w H , to również i rozwiązanie uogólnione różni się będzie „mało” od rozwiązania ścisłego, w sensie normy w H_A .

3.6. Naturalne i podstawowe warunki brzegowe

W poprzednich punktach podręcznika intuicyjnie rozróżnialiśmy podstawowe i naturalne warunki brzegowe. Obecnie takie rozróżnienie warunków brzegowych uzasadnimy matematycznie. Rozważmy w tym celu problem minimalizacji funkcjonału

$$Q(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx, \quad u' \equiv \frac{du}{dx} \quad (3.27)$$

w liniowej przestrzeni wektorowej \mathcal{D} funkcji ciągłych wraz z drugimi pochodnymi w przedziale $[a, b]$ i spełniających jednorodne warunki brzegowe

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (3.28)$$

Z rachunku wariacyjnego wiadomo, że funkcja $u_0 \in \mathcal{D}$, która minimalizuje funkcjonal (3.27) jest rozwiązaniem *równania Eulera*

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_0} \right) = 0 \quad (3.29)$$

Przyjmijmy teraz alternatywny warunek brzegowy tylko w postaci

$$u(a) = 0 \quad (3.30)$$

W tym przypadku dziedzina \mathcal{D} funkcjonału Q zawiera funkcje u z drugimi pochodnymi ciągłymi w $[a, b]$ i spełniającymi warunek (3.30).

Założmy, że $Q(u)$ przyjmuje swoje minimum dla $u_0 \in \mathcal{D}$. Wówczas dla dowolnego $u \in \mathcal{D}$ mamy

$$Q(u) \geq Q(u_0) \quad (3.31)$$

W szczególności nierówność (3.31) jest słuszna dla $u = u_0 + \alpha v, v \in \mathcal{S}$ przestrzeni dopuszczalnych wariacji

$$\mathcal{S} = \{v \in H^2(a, b) : v(a) = 0\} = \mathcal{D}$$

Warunkiem koniecznym minimum funkcjonału $I(u)$ dla $u_0 \in \mathcal{D}$ jest zerowanie się pierwszej wariacji Q dla $u = u_0$

$$\delta Q(u_0; v) \equiv \left[\frac{d}{d\alpha} I(u_0 + \alpha v) \right]_{\alpha=0} = 0$$

Powyższy warunek dla rozważanego problemu prowadzi do równania

$$\begin{aligned} 0 = \delta Q &= \int_a^b \delta F dx = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u_0} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_0'} \delta u' \right) dx = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) \right] \delta u dx + \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u_0'} \right]_a^b = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) \right] \delta u dx + \delta u(b) \frac{\partial F}{\partial u_0'}(b) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ponieważ wariacja δu jest dowolna zarówno w (a, b) , jak i dla $x = b$ i δu w (a, b) jest niezależna od $\delta u(b)$ (można powiedzieć, że δu spełnia różne warunki wewnątrz obszaru i na brzegu), to z (3.32) wynika, że współczynniki przy δu w (a, b) i dla $x = b$ powinny być oddzielnie równe zeru

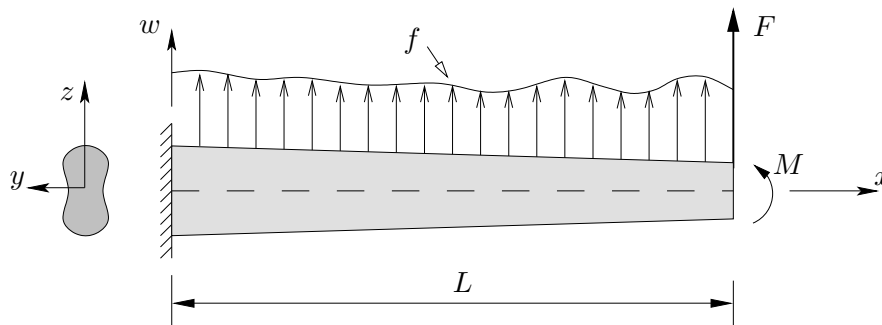
$$\frac{\partial F}{\partial u_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_0'} \right) = 0 \quad \text{dla } a < x < b \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_0'}(b) = 0 \quad (3.33b)$$

Warunek brzegowy (3.33b) jest drugim równaniem Eulera, otrzymanym z warunku minimalizacji funkcjonału i nazywa się *naturalnym warunkiem brzegowym*. Warunek brzegowy (3.30), który jest włączony do wyspecyfikowania przestrzeni \mathcal{D} , nazywamy *podstawowym warunkiem brzegowym*. Naturalne warunki brzegowe natomiast, jeśli występują, to są zawsze włączone do funkcjonału kwadratowego (lub sformułowania wariacyjnego) rozpatrywanego problemu.

Podstawowe warunki brzegowe są też nazywane warunkami brzegowymi Dirichleta (w mechanice: *kinematycznymi warunkami brzegowymi*), a naturalne warunki brzegowe – warunkami brzegowymi Neumanna (w mechanice: *statycznymi warunkami brzegowymi*).

Przykład 3.8. Rozważmy problem minimalizacji całkowitej energii potencjalnej belki wspornikowej (rys.3.2).



Rys.3.2. Belka wspornikowa z obciążeniem f , F i M

Funkcjonał energii ma postać

$$Q(w) = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx - \left(\int_0^L f w dx + w(L)F + \frac{dw}{dx}(L)M \right) \quad (3.34)$$

Zgodnie z *zasadą minimum całkowitej energii potencjalnej* spośród wszystkich dopuszczalnych stanów przemieszczeń belki w stanie równowagi trwałej mają miejsce tylko te przemieszczenia, dla których całkowita energia potencjalna belki osiąga minimum.

Przestrzeń energii H_A jest w tym przypadku zdefiniowana jako

$$H_A = \left\{ w : w, \frac{dw}{dx} \text{ i } \frac{d^2w}{dx^2} \text{ są ciągle w } [0, L] \text{ i należą do } L_2(0, L) \right. \\ \left. \text{ oraz } w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0 \right\} \quad (3.35)$$

i jest ona przestrzenią funkcji dopuszczalnych. Warunek zerowania się pierwszej wariacji $\delta Q = 0$ daje równanie

$$0 = \int_0^L \left[EI \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} - \delta w f \right] dx - \delta w(L)F - \delta \left(\frac{dw}{dx}(L) \right) M$$

Równanie powyższe przecałkujemy dwukrotnie przez części

$$0 = \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) - f \right] \delta w dx + \\ + \left[EI \frac{d^2w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) \delta w \right]_0^L + \\ - \delta w(L)F - \delta \left(\frac{dw}{dx}(L) \right) M \quad (3.36)$$

Równanie Eulera otrzymamy, przyrównując do zera wyrażenie przy δw pod całką

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (3.37)$$

które jest równaniem różniczkowym dla belki zginanej. Operator A ma postać

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right)$$

i jest on dodatni w H_A (dla $EI > 0$). Iloczyn skalarny dla tego problemu jest zdefiniowany wzorem

$$(w, v)_A \equiv (Aw, v) = \int_0^L EI \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx \quad (3.38)$$

Rozpiszemy i uporządkujemy teraz wyrażenia brzegowe w (3.36), otrzymując równanie

$$0 = \delta w(0) \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=0} + \delta w(L) \left[-F - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} + \\ + \delta \left(\frac{dw}{dx}(0) \right) \left[-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=0} + \delta \left(\frac{dw}{dx}(L) \right) \left[-M + EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=L}$$

Ponieważ $\delta w(0) = \delta \left(\frac{dw}{dx}(0) \right) = 0$, to przyrównując oddzielnie do zera wyrażenia przy $\delta w(L)$ i $\delta \left(\frac{dw}{dx}(L) \right)$, otrzymamy dodatkowe równania Eulera

$$\delta w(L): -F - \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0 \quad (3.39a)$$

$$\delta \left(\frac{dw}{dx}(L) \right): -M + \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.39b)$$

W rozważanym problemie podstawowe warunki brzegowe (wynikające z więzów geometrycznych) są następujące:

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0$$

natomiast naturalne warunki brzegowe (wynikające z działania uogólnionych sił F i M , przyłożonych w $x = L$) są dane równaniami (3.39).

Reasumując, w analizie dowolnych problemów możliwe są następujące trzy kombinacje warunków brzegowych:

- (a) wszystkie są typu podstawowego (*problemy Dirichleta* lub *warunki brzegowe pierwszego rodzaju*),
- (b) wszystkie są typu naturalnego (*problemy Neumanna* lub *warunki brzegowe drugiego rodzaju*),
- (c) część warunków jest podstawowych, a część naturalnych (*problemy mieszane* lub *warunki brzegowe trzeciego rodzaju*).

3.7. Niejednorodne warunki brzegowe

W dotychczas przeprowadzanych rozważaniach przyjmowaliśmy, że warunki brzegowe są jednorodne, co pozwalało nam łatwo identyfikować liniową przestrzeń wektorową (patrz przykłady 3.1 i 3.7) zapewniającą jednoznaczność rozwiązania. Konsekwencje analizy problemu z niejednorodnymi warunkami brzegowymi prześledzimy na przykładzie.

Przykład 3.9. Rozważmy równanie różniczkowe Poissona

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.40a)$$

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (3.40b)$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a Γ jest brzegiem obszaru Ω .

Założymy, że $f \in C(\Omega)$. Rozwiązaniem problemu brzegowego (3.40) jest funkcja $u \in C^2(\Omega)$, która spełnia (3.40a) i jest równa zero na brzegu Γ .

Przestrzeń funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{D}_A = \{u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega), \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ na } \Gamma\} \quad (3.41)$$

tworzy przestrzeń liniową, ponieważ spełnia aksjomaty dodatniości i mnożenia przez skalar (jest domknięta). Jeśli bowiem u_1 i u_2 są dowolnymi funkcjami z \mathcal{D}_A , to wówczas ich kombinacja liniowa $\alpha u_1 + \beta u_2$, dla dowolnych α i β , również należy do \mathcal{D}_A . Jeśli natomiast warunki brzegowe są niejednorodne, np. $u = g$ na brzegu Γ , to rozwiązania musimy poszukiwać w innej przestrzeni, ponieważ dla $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_A$ mamy $u_1 + u_2 = 2g$ na brzegu, tak że warunek $u_1 + u_2 = g$ na brzegu Γ nie jest spełniony.

Najbardziej oczywistym sposobem postępowania w przypadku rozwiązywania problemów z niejednorodnymi warunkami brzegowymi jest przetransformowanie problemu do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Procedura postępowania jest następująca:

Rozważmy liniowe równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.42a)$$

z liniowymi, niejednorodnymi, warunkami brzegowymi

$$Bu = g \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (3.42b)$$

gdzie $f \in L_2(\Omega)$ i $g \in L_2(\Gamma)$. Załóżmy, że znana jest funkcja w , która spełnia warunek brzegowy $Bw = g$ na brzegu Γ i jest wystarczająco gładka tak, że $Aw \in L_2(\Omega)$. Funkcja $z = u - w$ spełnia równanie

$$Az = f - Aw \quad \text{w } \Omega \quad (3.43a)$$

$$Bz = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (3.43b)$$

Rozwiązanie równania (3.43) daje rozwiązanie problemu wyjściowego (3.42) w postaci $u = z + w$.

Jak to wcześniej stwierdziliśmy, w takim przypadku, w słabym sformułowaniu wariacyjnym problemu brzegowego, naturalne warunki brzegowe są włączone do funkcjonału, a tylko podstawowe warunki brzegowe są włączone do definicji przestrzeni rozwiązania. Stąd wystarczająca jest tylko transformacja problemu brzegowego z niejednorodnymi warunkami brzegowymi do problemu z jednorodnymi, podstawowymi, warunkami brzegowymi (patrz przykład 4.2).

Przykład 3.10. Rozważmy problem Dirichleta dla równania Laplace'a, zdefiniowanego na prostokącie $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$

$$-\nabla^2 u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

z warunkami brzegowymi

$$u = b \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{dla } y = b \text{ i } 0 < x < a$$

$$u = 0 \quad \text{na pozostałych krawędziach prostokąta}$$

W tym przypadku funkcja w jest dana wzorem

$$w = y \sin \frac{\pi x}{a}$$

i jest ona różniczkowalna ze względu na x i y oraz spełnia warunki brzegowe.

Problem wyjściowy po transformacji ma postać

$$-\nabla^2 z = \nabla^2 w$$

$$-\nabla^2 z = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{w } \Omega$$

$$z = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma$$

3.8. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania wariacyjnego

Obecnie krótko omówimy warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania wariacyjnego (słabego) problemów opisanych przez równanie operatorowe (3.1), które przepiszemy

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.44)$$

gdzie A jest liniowym operatorem różniczkowym, który odwzorowuje elementy przestrzeni liniowej \mathcal{D}_A z przestrzeni Hilberta H w elementy tej przestrzeni, oraz $f \in L_2(\Omega)$. W ogólności, równanie (3.44) jest rozwiązywane razem z odpowiednimi warunkami brzegowymi, zadanymi dla funkcji u i jej pochodnych na brzegu Γ obszaru Ω .

Ogólna postać sformułowania słabego równania (3.44) (i jego warunków brzegowych) jest następująca: wyznaczyć $u \in H$ takie, że

$$B(v, u) = l(v) \quad \text{jest spełnione dla każdego } v \in H \quad (3.45)$$

gdzie $B(\bullet, \bullet)$ jest formą dwuliniową z elementami zdefiniowanymi w zbiorze $H \times H$, a $l(\bullet)$ – formą liniową określoną w H . W przypadku niejednorodnych warunków brzegowych oraz dla problemów Neumanna $B(u, v)$ jest definiowana w $H_1 \times H_2$, gdzie $H_1 \subset H_2$.

Jeśli forma dwuliniowa jest symetryczna, to z podstawowego twierdzenia Laxa-Milgrama (patrz szczegóły w podręcznikach z analizy funkcjonalnej) wynika, że warunkami koniecznymi dla istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania wariacyjnego (3.45) są ciągłość i dodatnia określoność tej formy dwuliniowej.

Twierdzenie Laxa-Milgrama jest także wykorzystywane przy formułowaniu problemów w przestrzeni skończenie wymiarowej, stąd jego duża użyteczność w teorii aproksymacji.

Podkreślmy jednak wyraźnie, że twierdzenie Laxa-Milgrama w sformułowaniu podstawowym jest słuszne tylko wówczas, gdy podstawowe warunki brzegowe rozważanego problemu są jednorodne. Tylko bowiem wówczas możemy utożsamiać przestrzeń rozwiązania H z liniową przestrzenią funkcji dopuszczalnych \mathcal{D}_A . Jeśli podstawowe warunki brzegowe są niejednorodne, to wtedy $\mathcal{D}_A \neq H$ i twierdzenie Laxa-Milgrama musi być przedstawione w innej, rozszerzonej, postaci.

Oddzielnym problemem jest kwestia regularności rozwiązania u , zagadnienia bardzo ważnego z punktu widzenia oceny rzędu zbieżności metod przybliżonych. Najogólniej mówiąc, regularność rozwiązania jest funkcją:

- (1) regularności obszaru,
- (2) regularności parametrów problemu (na przykład w mechanice stałych materiałowych i obciążenia).

3.9. Rozwiązanie przybliżone

W podręczniku zajmować się będziemy *metodami przybliżonymi* rozwiązywania problemów opisywanych przez swoje modele matematyczne. Przyjmijmy, dla skupienia uwagi, że dany jest problem, dla którego model matematyczny ma postać równania operatorowego określonego w obszarze Ω z warunkami brzegowymi danymi na brzegu Γ

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (3.46a)$$

$$Bu = g \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (3.46b)$$

gdzie f i g są znanymi funkcjami odpowiedniej klasy ciągłości.

Kiedy podstawimy rozwiązanie przybliżone u_N do (3.46a), to oczywiście równanie to nie zostanie spełnione i błąd, albo *residuum*, będzie wynosił

$$R_1 = Au_N - f \quad (3.47)$$

Dodatkowo prawdopodobnie nie zostaną również spełnione warunki brzegowe (3.46b) i błąd dla nich będzie wynosił

$$R_2 = Bu_N - g \quad (3.48)$$

Celem obliczeń przybliżonych będzie otrzymanie rozwiązania, które zminimalizuje błędy R_1 i R_2 . Dokona się to przez zredukowanie błędów do zera w pewnych punktach, lub podobszarach obszaru $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, albo przez zminimalizowanie odpowiednio zdefiniowanego błędu średniego.

W ogólności mamy do wyboru trzy metody postępowania:

1. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego, które tożsamościowo spełnia wszystkie warunki brzegowe i minimalizuje błąd R_1 , nie spełniając równań modelu matematycznego (ang. *domain methods*).
Przykładami takich metod są omawiane w rozdziale czwartym: metoda Rayleigha-Ritza i metody residuów ważonych oraz metoda elementów skończonych i metody bezsiatkowe, opisane w rozdziałach piątym i siódmym.
2. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego, które tożsamościowo spełnia równania modelu matematycznego i minimalizuje błąd R_2 , nie spełniając warunków brzegowych (ang. *boundary methods*).
Przykładem takiej metody jest omawiana w rozdziale czwartym: metoda Trefftza i metoda elementów brzegowych, przedstawiona w rozdziale szóstym.
3. Wyznaczenie rozwiązania przybliżonego z warunków minimalizacji błędów R_1 i R_2 , spowodowanych niespełnieniem zarówno równań modelu matematycznego, jak i warunków brzegowych (ang. *mixed methods*). Są to metody wykorzystujące, na przykład, metody z punktów 1 i 2. Nie będą one rozważane w podręczniku.

Rozdział 4

Metody wariacyjne rozwiązań przybliżonych

4.1. Uwagi wstępne

W tym rozdziale wykorzystamy sformułowanie wariacyjne do wyznaczenia rozwiązania problemu brzegowego. Rozwiązania tego będziemy poszukiwać w formie skończonej kombinacji liniowej funkcji z odpowiedniej podprzestrzeni V_N przestrzeni rozwiązania V . Niewiadomymi będą parametry tej kombinacji, które będziemy obliczać, minimalizując funkcjonal lub rozwiązując równania słabego sformułowania problemu. Spośród wielu metod otrzymywania rozwiązania przybliżonego przedstawimy bliżej metody Rayleigha-Ritza oraz residuów ważonych w różnych sformułowaniach.

Ponieważ sformułowanie problemu ciągłego znajduje się w przestrzeni nieskończonej, to nie może ono być dokładnie przedstawione przez skończony zbiór funkcji i otrzymany wynik będzie rozwiązaniem przybliżonym. Jeśli wymiar przestrzeni V_N będziemy powiększać (co oznacza zwiększenie liczby niezależnych parametrów w rozwiązaniu przybliżonym), to błąd aproksymacji będzie się zmniejszał i rozwiązanie przybliżone będzie zmierzać do rozwiązania dokładnego. Jeśli ponadto założymy, że sformułowanie zachowuje wszystkie cechy problemu oryginalnego (na przykład symetrię), to zapewniona zostanie również jednoznaczność i istnienie rozwiązania przybliżonego. Dodatkowym elementem, który jednakże musi być zawsze rozważony, jest numeryczna stabilność otrzymanego rozwiązania.

4.2. Metoda Rayleigha-Ritza

Rozważmy równanie operatorowe

$$Au = f \quad (4.1a)$$

z warunkiem brzegowym

$$u = 0 \quad \text{na brzegu } \Gamma \quad (4.1b)$$

gdzie A jest liniowym i dodatnio określonym operatorem w zbiorze \mathcal{D}_A przestrzeni H i $f \in H$. Z rozdziału trzeciego wiemy, że rozwiązaniem u równania (4.1a) jest element przestrzeni energii H_A , który minimalizuje funkcjonal

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - (f, u)_H \equiv \frac{1}{2}\|u\|_A^2 - (f, u)_H \quad (4.2)$$

Równoważność rozwiązywania (4.1) i minimalizacji funkcjonału $J(u)$ (4.2) była rozważana w rozdziale 3. Oczywiście zachodzi ona tylko przy zachowaniu pewnych warunków regularności, nałożonych na przykład na funkcję f .

Uwzględniając tę równoważność, korzystniej jest rozwiązywać nie (4.1), tylko (4.2) z dwóch głównych powodów. Pierwszy to ten, że rozwiązanie dokładne (4.1) jest na ogół trudno uzyskać. Drugim powodem jest to, że problem wariacyjny poszukiwania takiego u , które spełnia warunek $J(u) \leq J(v)$ dla wszystkich $v \in H_A$, umożliwia niejako w sposób naturalny sformułowanie metody aproksymacyjnego rozwiązywania równań sformułowania słabego. Taką właśnie metodą jest metoda Rayleigha-Ritza, którą opiszemy poniżej (autorem metody był W.Ritz, 1908 r.).

Przyjmijmy w przestrzeni energii H_A bazę

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N, \dots$$

gdzie N jest stałą dodatnią i poszukiwać będziemy rozwiązania aproksymacyjnego u_N w postaci

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j \quad (4.3)$$

gdzie c_j są nieznanymi parametrami, podlegającymi wyznaczeniu. Parametry te określone są przez warunek

$$J(u_N) \leq J(v_N) \quad (4.4a)$$

lub równoważnie

$$B(v_N, u_N) = (v_N, f)_H \quad (4.4b)$$

dla wszystkich v_N o postaci $v_N = \sum_{i=1}^N b_i \Phi_i$, gdzie b_i są dowolnymi parametrami. Takie postępowanie jest równoważne poszukiwaniu u_N w N wymiarowej podprzestrzeni S_N generowanej przez skończony zbiór $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$. Ponieważ z założenia $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ jest bazą w H_A , to rozwiązanie słabe może być aproksymowane z dowolną dokładnością przez *stosowną* kombinację liniową tych elementów. Przy właściwych warunkach nałożonych na zbiór $\{\Phi_i\}$ rozwiązanie aproksymacyjne u_N powinno być zbieżne do rozwiązania dokładnego, jeśli $N \rightarrow \infty$.

Jeśli zbiór $\{\Phi_j\}$ został wybrany, to wyznaczenie parametrów c_j w równaniu (4.3) jest już proste. Mianowicie funkcjonal $J(u_N)$, po wykonaniu operacji iloczynu skalarnego (tzn. wycałkowaniu w obszarze), staje się zwykłą funkcją parametrów c_1, c_2, \dots, c_N i parametry te obliczymy z warunku koniecznego minimum funkcji

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}(c_1, c_2, \dots, c_N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

lub

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left[\frac{1}{2} B \left(\sum_{j=1}^N c_j \Phi_j, \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k \right) - \left(f, \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N B(\Phi_i, \Phi_k) c_k + \sum_{j=1}^N B(\Phi_j, \Phi_i) c_j \right] - (f, \Phi_i)_H \end{aligned}$$

Wykorzystując symetrię operatora B , możemy ze sobą połączyć pierwsze dwa składniki, otrzymując

$$0 = \sum_{j=1}^N B(\Phi_i, \Phi_j) c_j - (f, \Phi_i)_H \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Jest to układ N liniowych równań algebraicznych z nieznanymi N współczynnikami c_1, c_2, \dots, c_N . Ponieważ $B(\Phi_i, \Phi_j)$ i Φ_i są liniowo niezależne, to macierz współczynników przy niewiadomych

$$b_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j) = (\Phi_i, \Phi_j)_A$$

jest nieosobliwa i równanie (4.5) ma rozwiązanie jednoznaczne.

Równanie (4.5) może być także otrzymane bezpośrednio z problemu słabego (4.4b)

$$B(v_N, \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j) = (v_N, f)_H$$

lub

$$\sum_{j=1}^N B(v_N, \Phi_j) c_j - (v_N, f)_H = 0$$

Ponieważ v_N jest dowolnym elementem S_N , to powyższe równanie jest słuszne dla $v_N = \Phi_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. W ten sposób otrzymamy równanie (4.5).

Równanie (4.5) w zapisie macierzowym ma formę

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (4.6)$$

gdzie macierz \mathbf{B} i wektor \mathbf{F} definiują wzory $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, $\mathbf{F} = [f_i] = [f, \Phi_i]$ oraz $\mathbf{c} = [c_i]$.

Funkcje bazowe Φ_i powinny spełniać następujące warunki:

1. $\Phi_i \in H_A$,
2. Dla dowolnego N powinny być liniowo niezależne,
3. Powinny być kompletne w przestrzeni H_A (patrz p.4.4).

Zauważmy, że H_A zawiera elementy, których m -te pochodne są całkowalne z kwadratem, gdzie $2m$ jest rzędem operatora różniczkowego A , i które spełniają zadane (przyjeliśmy, że jednorodne) podstawowe warunki brzegowe. Jeśli podstawowe warunki brzegowe byłyby niejednorodne, to albo możemy przetransformować wyjściowy problem brzegowy do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi, albo też poszukiwać rozwiązania Rayleigha-Ritza w alternatywnej postaci

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j + \Phi_0 \quad (4.7)$$

gdzie Φ_0 jest funkcją, która spełnia niejednorodne podstawowe warunki brzegowe. W takim przypadku elementy wektora \mathbf{F} w równaniu (4.6) należy obliczać według wzoru

$$f_i = (f, \Phi_i) - B(\Phi_0, \Phi_i) \quad (4.8)$$

Dla przykładu rozważmy równanie $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$ z warunkami brzegowymi $u(0) = 0$ i $u(1) = h$. Problem ten może być zmieniony do postaci $-\frac{d^2z}{dx^2} = f$ z warunkami $z(0) = 0$ i $z(1) = 0$, gdzie $u = z + hx$. Rozwiązując problem oryginalny metodą Rayleigha-Ritza, wykorzystamy (4.7), przyjmując $\Phi_0 = hx$ i $\Phi_j = x^j(1-x)$.

Metoda Rayleigha-Ritza ma bardziej ogólne zastosowanie niż przedstawione w tym punkcie i ograniczone do przypadku problemów liniowych, dla których jest możliwe skonstruowanie funkcjonału kwadratowego typu (4.2). Jeśli problem jest nieliniowy, to układ równań metody Rayleigha-Ritza jest także nieliniowy; jeśli z kolei forma dwuliniowa $B(v, u)$ jest niesymetryczna, to liniowe równania Rayleigha-Ritza są niesymetryczne i w końcu, jeśli problem oryginalny zawiera naturalne warunki brzegowe, to metodę Rayleigha-Ritza stosujemy do funkcjonału rozszerzonego, dołączając do funkcjonału wyjściowego te warunki brzegowe.

Przykład 4.1. Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \cos \pi x \quad 0 < x < 1 \quad (4.9)$$

dla którego $A \equiv -d^2/dx^2$. Poszukiwać będziemy rozwiązania tego równania metodą Rayleigha-Ritza dla trzech typów warunków brzegowych.

Warunki brzegowe Dirichleta

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (4.10)$$

W tym przypadku dziedzina \mathcal{D}_A dla operatora A zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne w przedziale $(0, 1)$, które spełniają warunki brzegowe (4.10). Operator A jest symetryczny i dodatni w $\mathcal{D}_A \subset H = L_2(0, 1)$. Można wykazać, że problem brzegowy (4.9), (4.10) ma rozwiązanie jednoznaczne.

Dokładne rozwiązanie ma postać

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2}(\cos \pi x + 2x - 1) \quad (4.11)$$

Funkcjonał dla rozważanego problemu ma formę

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u)_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{d^2u}{dx^2} u - 2u \cos \pi x \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2u \cos \pi x \right] dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

dla wszystkich $u \in \mathcal{D}_A$. Przestrzenią energii jest $H_A = \{u \in H_0^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$.

Przyjmijmy bazę $\{\Phi_i\} = \{\sin i\pi x\}$ dla N -parametrowej aproksymacji Rayleigha-Ritza

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \sin j\pi x \quad (4.13)$$

Zbiór $\{\Phi_i\} = \{\sin i\pi x\}$ tworzy podprzestrzeń S_N w przestrzeni energii, $S_N \subset H_0^1(0, 1)$.

Wykorzystując (4.13) w (4.5), otrzymamy równanie

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} c_j - f_i = 0$$

gdzie

$$b_{ij} = B(\Phi_i, \Phi_j) = \int_0^1 (i\pi) \cos i\pi x \cdot (j\pi) \cos j\pi x \, dx = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \frac{(i\pi)^2}{2} & j = i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_i &= (\Phi_i, \cos \pi x)_0 = \\ &= \int_0^1 \cos \pi x \sin i\pi x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\sin \pi(i+1)x + \sin \pi(i-1)x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{i+1} - 1}{\pi(i+1)} + \frac{(-1)^{i-1} - 1}{\pi(i-1)} \right] = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } i \text{ nieparzystych} \\ \frac{2i}{\pi(i^2 - 1)} & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases} \end{aligned}$$

Na przykład, dla $N = 2$, układ równań $\mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{F}$ jest następujący:

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & 2\pi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi} \end{bmatrix}$$

i jego rozwiązanie wynosi $c_1 = 0$ i $c_2 = \frac{2}{3\pi^3}$. Jak widać macierz \mathbf{B} ma postać diagonalną i rozwiązanie dla N -funkcji bazowych daje wynik

$$c_i = \frac{4}{\pi^3} \frac{1}{i(i^2 - 1)} \quad (i = 2, 4, 6, \dots)$$

Rozwiązanie Rayleigha-Ritza ma ogólną postać

$$\begin{aligned} u_N(x) &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{i=2}^N \frac{\sin i\pi x}{(i^2 - 1)i} \quad (\text{dla } i \text{ parzystych}) = \\ &= \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)j} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mieszane warunki brzegowe

$$u(0) = 0 \quad u'(1) = 0 \quad (4.15)$$

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$u_0 = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi x - 1) \quad (4.16)$$

Zbiór \mathcal{D}_A dla symetrycznego i dodatnio określonego operatora A zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne, które spełniają warunki brzegowe (4.15). Przestrzenią energii jest $H_A = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 0\}$.

Dla rozwiązania przybliżonego Rayleigha-Ritza przyjmujemy bazę, która spełnia tylko podstawowe warunki brzegowe $u(0) = 0$. Tym razem nie możemy przyjąć bazy $\{\sin i\pi x\}$, ponieważ nie jest ona kompletna – nie może bowiem generować w przestrzeni H_A funkcji, które są niezerowe dla $x = 1$. Dla takiej bazy rozwiązanie byłoby powtórzeniem obliczeń z punktu 1 i nie jest ono zbieżne do rozwiązania dokładnego (4.16). Nie można, na przykład, przyjąć $\Phi_0 = 1$, bo funkcja ta nie spełnia warunku $\Phi_0(0) = 0$. Bazą kompletną jest natomiast baza z dodaną funkcją $\Phi_0 = x : \{x, \sin i\pi x\}$.

Wykorzystując obliczenia b_{ij} i f_i z punktu 1, obliczymy tylko b_{ij} dla $i = 0, j = 0, 1, 2, \dots, N$ i f_0

$$b_{0j} = B(\Phi_0, \Phi_j) = \int_0^1 \Phi_j' dx = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } j \neq 0 \\ 1 & \text{jeśli } j = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$f_0 = (\Phi_0, f) = \int_0^1 x \cos \pi x dx = -\frac{2}{\pi^2}$$

W szczególności, dla bazy $\{x, \sin \pi x, \sin 2\pi x\}$, układ równań $\mathbf{Bc} = \mathbf{F}$ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi^2} \\ 0 \\ \frac{4}{3\pi} \end{bmatrix}$$

z rozwiązaniem $c_0 = -\frac{2}{\pi^2}$, $c_1 = 0$ i $c_2 = \frac{2}{3\pi^2}$.

Rozwiązanie Rayleigha-Ritza problemu brzegowego (4.9) i (4.15) ma ogólną postać

$$u_N = -\frac{2x}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)j} \quad (4.18)$$

i jest zbieżne do rozwiązania dokładnego.

Warunki brzegowe Neumanna

$$u'(0) = u'(1) = 0 \quad (4.19)$$

Zbiór \mathcal{D}_A zawiera funkcje dwukrotnie różniczkowalne, które spełniają warunki brzegowe (4.19). Operator A nie jest dodatnio określony w \mathcal{D}_A . Rozwiązanie, chociaż istnieje, nie jest jednakże jednoznaczne, ponieważ jeśli $u(x)$ jest rozwiązaniem problemu (4.9), (4.19) to również rozwiązaniem jest $v(x) = u(x) + c$, gdzie c – dowolna stała. Dla znalezienia rozwiązania jednoznacznego nałożymy dodatkowy warunek

$$\int_0^1 u(x) dx = 0 \quad (4.20)$$

Rozwiązaniem problemu (4.9), (4.19) z warunkiem (4.20) jest funkcja

$$u_0 = \frac{\cos \pi x}{\pi^2}$$

Chcąc wykorzystać metodę Rayleigha-Ritza do otrzymania rozwiązania przybliżonego, musimy wybrać inną bazę niż bazy użyte w punktach 1 i 2 – żadna nie jest bowiem kompletna dla tego zadania. Do zbioru $\{\sin i\pi x\}$ musimy dodać funkcję, która nie znika dla $x = 0$ i $x = 1$ i jednocześnie spełniony jest warunek $u_N(0) \neq u_N(1)$. Wybieramy funkcję $u_0 = x - c$, gdzie stała $c \neq 1$. W podobny sposób, jak to było w przypadku (4.18), obliczamy b_{0j} i f_0 . Końcowe rozwiązanie ma ogólną postać

$$u_N(x) = -\frac{2}{\pi^2}(x - c) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^N \frac{\sin 2j\pi x}{(4j^2 - 1)} \quad (4.21)$$

Stałą c obliczymy z warunku (4.20), otrzymując $c = \frac{1}{2}$.

Rozważymy teraz przykład mieszanego problemu brzegowego dla zilustrowania dokładności rozwiązania otrzymanego przy użyciu Φ_i z \mathcal{D}_A i Φ_i z H_A .

Przykład 4.2. Rozważmy problem brzegowy

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (4.22a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = 0 \quad u'(1) = 1 \quad (4.22b)$$

W tym problemie operator $A \equiv -\frac{d^2}{dx^2} - 1$ i przestrzeń funkcji dopuszczalnych \mathcal{D}_A przedstawia się następująco:

$$\mathcal{D}_A = \{u(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, u(0) = 0, u'(1) = 1\}$$

Wyjściowy problem zamienimy na problem z jednorodnymi warunkami brzegowymi, podstawiając

$$u(x) = y(x) + u_0(x) \quad (4.23)$$

gdzie, przyjmując $u_0(x) = a + bx$, łatwo obliczymy, że $u_0(x) = x$.

Nowy problem brzegowy ma postać

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - y - x + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (4.24a)$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 0 \quad (4.24b)$$

Dla tego problemu przestrzeń funkcji dopuszczalnych jest następująca:

$$\mathcal{D}_A = \{y(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, y(0) = 0, y'(1) = 0\}$$

Funkcjonał kwadratowy (3.23) przyjmie formę

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 y \left(-\frac{d^2y}{dx^2} - y \right) dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx$$

lub po wycałkowaniu przez części

$$\begin{aligned} J(y) &= -\frac{1}{2} y \frac{dy}{dx} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 \right] dx + \int_0^1 y(x^2 - x) dx \end{aligned} \quad (4.25)$$

Przestrzenią energii jest

$$H_A = \{y(x) \in C^1(0, 1), 0 < x < 1, y(0) = 0\} \quad (4.26)$$

Dla trójparametrowego rozwiązania funkcjami bazowymi Φ_i , $i = 1, 2, 3$ mogą być funkcje

$$\Phi_1 = x \quad \Phi_2 = x^2 \quad \Phi_3 = x^3$$

Poszukiwane rozwiązanie ma formę

$$y_3(x) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i c_i = \mathbf{\Phi} \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^T \quad (4.27)$$

gdzie oznaczono

$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3]$ – macierz jednowierszowa funkcji bazowych,

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$ – wektor nieznanymi parametrów.

Podstawiając (4.27) do (4.25) i stosując konsekwentnie zapis macierzowy, otrzymamy

$$J(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \left[\int_0^1 \left(\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} - \Phi^T \Phi \right) dx \right] \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \int_0^1 \Phi^T (x^2 - x) dx = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F} \quad (4.28)$$

gdzie oznaczono macierz \mathbf{B} i wektor \mathbf{F}

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left(\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} - \Phi^T \Phi \right) dx \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \Phi^T (x^2 - x) dx \quad (4.29b)$$

Parametry c_i , $i = 1, 2, 3$, obliczymy z warunku koniecznego minimum funkcji (4.28), co prowadzi do równania macierzowego w formie

$$\mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (4.30)$$

Obliczając \mathbf{B} i \mathbf{F} według wzorów (4.29), otrzymamy

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} [1 \ 2x \ 3x^2] - \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} [x \ x^2 \ x^3] \right) dx = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} (x^2 - x) dx = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania (4.30) daje wynik

$$c_1 = 0.279, \quad c_2 = -0.106, \quad c_3 = -0.0290$$

Końcowe rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza ma postać

$$u_3(x) = 1.279x - 0.106x^2 - 0.0290x^3$$

Wyjściowy problem brzegowy (4.22) można też rozwiązać metodą Rayleigha-Ritza, budując dla niego funkcjonal rozszerzony, który ma formę

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 \right] dx + \int_0^1 ux^2 dx - u'(1)u(1) \quad (4.31)$$

Zgodnie z wcześniejszym stwierdzeniem w funkcjale tym pojawił się składnik wynikający z niejednorodnego, naturalnego warunku brzegowego $u'(1) = 1$, który jednak dla czytelności zapisu nie został wprowadzony explicite.

Rozwiązania poszukiwać będziemy w przestrzeni energii H_A

$$H_A = \{u(x) \in C^1(0, 1), 0 < x < 1, u(0) = 0\}$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci (4.27), odpowiednikiem funkcji (4.28) będzie

$$J(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F} - \mathbf{c}^T \Phi^T(1) u'(1) \quad (4.32)$$

gdzie obecnie

$$\mathbf{F} = - \int_0^1 \Phi^T x^2 dx = - \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} x^2 dx = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Warunek konieczny minimum funkcji $J(\mathbf{c})$ (4.32) prowadzi do równania macierzowego

$$\mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{F} - \Phi^T(1) u'(1) = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie wykorzystano warunek brzegowy $u'(1) = 1$.

Rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza wynosi

$$u_3(x) = 1.283x - 0.1142x^2 - 0.02462x^3$$

Obydwa rozwiązania są podobne do rozwiązań z dokładnością obliczeń numerycznych. Można je porównać z rozwiązaniem dokładnym równym

$$u_0(x) = 2(\cos x + \operatorname{tg} 1 \sin x - 1) - \frac{\sin x}{\cos 1} + x^2$$

co prowadzi do wniosku, że rozwiązanie przybliżone dobrze aproksymuje rozwiązanie dokładne.

Na zakończenie tego przykładu można jeszcze spróbować odpowiedzieć na pytanie, jak konstruować funkcjonal rozszerzony. Jest to trudny problem wymagający zarówno dodatkowej wiedzy, jak i doświadczenia. W naszym przypadku jednakże łatwo jest uzasadnić postać funkcjonału rozszerzonego, jeśli tylko odniesiemy się do interpretacji fizycznej problemu brzegowego (4.22). Przyjmując na przykład, że opisuje on znowu pewien problem rozciągania pręta, funkcjonal rozszerzony będzie wówczas sumą energii potencjalnej pręta i pracy siły podłużnej na końcu pręta $x = 1$, reprezentowanej przez pochodną $\frac{du}{dx}$, na przemieszczeniu $u(1) = 1$.

Przykład 4.3. Rozważmy powtórnie problem brzegowy (4.22) dla zilustrowania dokładności rozwiązania otrzymanego przy użyciu Φ_i z \mathcal{D}_A i Φ_i z H_A . Przyjmijmy trójparametrowe rozwiązanie Rayleigha-Ritza.

Najpierw dobierzemy z \mathcal{D}_A bazę $\{\Phi_i\}$, $i = 1, 2, 3$ oraz funkcję Φ_0 (to znaczy taką funkcję Φ_0 , która spełnia wszystkie zadane warunki brzegowe (4.22b), a także takie funkcje Φ_i , które spełniają jednorodne warunki brzegowe)

$$\Phi_0(0) = 0 \quad \Phi_0'(1) = 1 \quad \Phi_i(0) = 0 \quad \Phi_i'(1) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

Przyjmując $\Phi_0(x) = a + bx$, łatwo obliczymy, że $\Phi_0 = x$.

Funkcjami Φ_i , $i = 1, 2, 3$ mogą być funkcje

$$\Phi_1 = x \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \quad \Phi_2 = x \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) \quad \Phi_3 = x \left(1 - \frac{1}{4}x^3\right)$$

które są również liniowo niezależne.

Poszukiwane rozwiązanie ma formę

$$u_3(x) = \Phi_0 + \sum_{i=1}^3 c_i \Phi_i$$

Pomijając proste, lecz żmudne obliczenia macierzy $B(\Phi_i, \Phi_j)$ oraz wektora $l(\Phi_i)$, napiszemy od razu układ równań $\mathbf{Bc} = \mathbf{F}$ w postaci

$$\frac{1}{10080} \begin{bmatrix} 2016 & 2492 & 2676 \\ 2492 & 3200 & 3507 \\ 2676 & 3507 & 3890 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{120} \\ \frac{13}{180} \\ \frac{13}{168} \end{bmatrix}$$

gdzie dla przykładu obliczymy

$$b_{11} = \int_0^1 (\Phi_1' \Phi_1' - \Phi_1 \Phi_1) dx = \int_0^1 \left((1-x)^2 - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right) dx = \frac{1}{5}$$

$$f_1 = \int_0^1 \Phi_1 (\Phi_0 - f) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) (x - x^2) dx = \frac{7}{120}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest $c_1 = -0.00410981$, $c_2 = 0.656125$ oraz $c_3 = -0.388184$.

Końcowe rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza ma postać

$$u_3(x) = 1.26383x + 0.00206x^2 - 0.21871x^3 + 0.09705x^4$$

Teraz rozważymy aproksymację Rayleigha-Ritza wyrażoną przez funkcje z przestrzeni H_A , to znaczy z Φ_i nie spełniającymi naturalnych warunków brzegowych oraz $\Phi_0 = 0$ (ponieważ podstawowe warunki brzegowe są jednorodne), wówczas otrzymamy dla

$$\Phi_1 = x \quad \Phi_2 = x^2 \quad \Phi_3 = x^3$$

układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{58}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie dla przykładu obliczymy

$$b_{11} = \int_0^1 (\Phi_1' \Phi_1' - \Phi_1 \Phi_1) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

$$f_1 = - \int_0^1 \Phi_1 f dx + \Phi_1(1) = - \int_0^1 x^3 dx + 1 = -\frac{1}{4} + 1$$

Rozwiązanie przybliżone Rayleigha-Ritza wynosi

$$u_3(x) = 1.283x - 0.11424x^2 - 0.02462x^3$$

W tab.4.1 porównano wyniki obliczeń przybliżonych z rozwiązaniem dokładnym równym

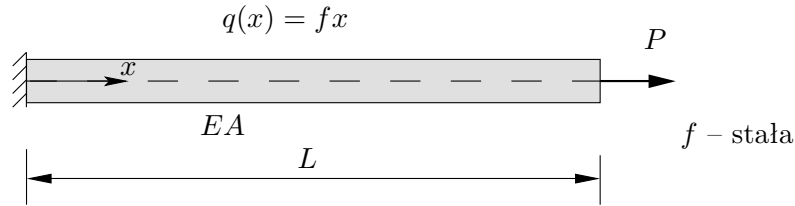
$$u(x) = 2(\cos x + \operatorname{tg} 1 \sin x - 1) - \frac{\sin x}{\cos 1} + x^2$$

x	$\Phi_i \in H_A$	$\Phi_i \in \mathcal{D}_A$	Wynik dokładny
0.1	0.1271	0.1262	0.1262
0.3	0.3740	0.3742	0.3742
0.5	0.6099	0.6112	0.6112
0.8	0.9407	0.9402	0.9401
1.0	1.1442	1.1442	1.1442

Tabela 4.1. Wyniki liczbowe dla przykładu 4.3

Chociaż różnice w rozwiązaniach dla $u(x)$ są nieznaczne, to jednak przyjęcie funkcji bazowych, które nie spełniają naturalnych warunków brzegowych ma duże konsekwencje przy rozwiązywaniu problemów z mechaniki. Budowanie w taki sposób modelu numerycznego metodą elementów skończonych oznaczać będzie, że wyniki dla naprężeń uogólnionych (sił przekrojowych) mogą być obarczone dużym błędem.

Przykład 4.4. Metodą Rayleigha-Ritza wyznaczmy funkcję przemieszczenia osi pręta o długości L , stałej sztywności na rozciąganie $EA = \text{const}$ i obciążeniu pokazanym na rys. 4.1.



Rys.4.1. Pręt obciążony osiowo

Sformułowanie silne zadania ma postać problemu brzegowego

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + fx = 0 \quad 0 < x < L \quad (4.34a)$$

$$u(0) = 0 \quad EA \frac{du}{dx}(L) = P \quad (4.34b)$$

Sformułowaniem globalnym jest wyrażenie na całkowitą energię potencjalną dla pręta w formie

$$Q(u) = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - f \int_0^L x u dx - Pu(L) \quad (4.35)$$

z podstawowym warunkiem brzegowym $u(0) = 0$. Naturalny warunek brzegowy $EA \frac{du}{dx}(L) = P$ został włączony do funkcjonału energii.

Rozwiązanie liniowe

Przyjmijmy rozwiązanie $u(x) = a_0 + a_1 x$. Rozwiązanie dopuszczalne musi spełniać warunek $u(0) = 0$, stąd mamy $a_0 = 0$, czyli $u(x) = a_1 x$. Podstawiając to rozwiązanie do (4.35), dostaniemy

$$Q(a_1) = -\frac{1}{3} f a_1 L^3 + \frac{1}{2} EA a_1^2 L - P a_1 L$$

Warunek zerowania się pierwszej pochodnej energii sprowadza się do równania

$$\frac{dQ}{da_1} = 0 \quad -\frac{fL^3}{3} - PL + EA a_1 L = 0$$

stąd otrzymamy

$$a_1 = \frac{(fL^2/3) + P}{EA}$$

Rozwiązaniem końcowym jest funkcja

$$u(x) = \frac{(fL^2 + 3P)x}{3EA}$$

Rozwiązanie kwadratowe

Funkcja kwadratowa ma postać $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Rozwiązanie dopuszczalne musi spełniać warunek brzegowy $u(0) = 0$, co oznacza, że $a_0 = 0$. Podstawiając rozwiązanie dopuszczalne $u(x) = a_1x + a_2x^2$ do (4.35), otrzymamy

$$Q(a_1, a_2) = -\frac{1}{4}fa_2L^4 + \frac{1}{3}(2EAa_2^2 - fa_1)L^3 + EAa_1a_2L^2 + \\ + \frac{1}{2}EAa_1^2L - P(a_2L^2 + a_1L)$$

Znikanie pierwszej pochodnej funkcji $Q(a_1, a_2)$ daje równania

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \quad -\frac{fL^3}{3} + EAa_2L^2 - PL + EAa_1L = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} = 0 \quad -\frac{fL^4}{4} + \frac{4}{3}EAa_2L^3 - PL^2 + EAa_1L^2 = 0$$

których rozwiązanie wynosi

$$a_1 = -\frac{-7fL^2 - 12P}{12EA} \quad a_2 = -\frac{fL}{4EA}$$

Rozwiązaniem jest funkcja

$$u(x) = \frac{(12P + fL(7L - 3x))x}{12EA}$$

Rozwiązaniem dokładnym jest wielomian stopnia trzeciego w formie

$$u(x) = \frac{x(3fL^2 - fx^2 + 6P)}{6EA} \quad (4.36)$$

o czym łatwo się przekonać, przyjmując funkcję dopuszczalną $u(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Rozwiązanie układu trzech równań $\partial Q(a_1, a_2, a_3)/\partial a_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, daje wynik

$$a_1 = -\frac{fL^2 - 2P}{2EA} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{f}{6EA}$$

co prowadzi do wzoru (4.36). Ponieważ jest to rozwiązanie dokładne, to przyjmowanie wielomianów stopnia wyższego nie może już zmienić rozwiązania.

Przykład 4.5. Zastosujemy metodę Rayleigha-Ritza do obliczenia ugięcia belki wspornikowej, pokazanej na rys.3.2, do której przyłożone jest obciążenie ciągle o intensywności f i obciążenie momentem skupionym M ($F = 0$). Problem brzegowy dla tego zadania ma postać

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad EI > 0 \quad (4.37a)$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = 0 \quad \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = M \quad \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = F = 0 \quad (4.37b)$$

W tym przypadku mamy $A \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right)$. Do rozwiązania wykorzystamy konwencjonalną formę funkcjonału oraz formę rozszerzoną, z naturalnymi warunkami brzegowymi wprowadzonymi do funkcjonału.

Sformułowanie konwencjonalne funkcjonału

Wyjściowy problem (4.37) przetransformujemy do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi przez podstawienie

$$w(x) = u(x) + w_0 \quad (4.38)$$

Podstawiając (4.38) do (4.37a), otrzymamy

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = f \quad (4.39)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{f} = f - \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)$$

równanie (4.39) przyjmie postać

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \bar{f} \quad 0 < x < L \quad (4.40)$$

Funkcję w_0 wyznaczymy z warunku spełnienia niejednorodnego warunku brzegowego w (4.37b), co daje wynik

$$w_0 = M \frac{x^2}{2EI} \quad (4.41)$$

Wykorzystując (4.41), otrzymamy warunki brzegowe dla równania (4.40) w formie

$$u(0) = \frac{du}{dx}(0) = EI \frac{d^2u}{dx^2}(L) = \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.42)$$

Przyjęcie w_0 w postaci (4.41) daje wynik

$$\bar{f} = f - \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{M}{EI} \right) = f$$

W dalszym ciągu rozważać już będziemy problem brzegowy zdefiniowany równaniami (4.40) i (4.42). Przestrzeń energii H_A jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$H_A = \{u : u \in H^2(0, L), u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0\}$$

Można wykazać, że operator A jest samosprężony i dodatnio określony w przestrzeni H_A tak, że funkcjonal kwadratowy dla problemu (4.40), (4.42) jest dany wzorem

$$J(u) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 - fu \right] dx \quad (4.43)$$

W N -parametrowej metodzie Rayleigha-Ritza funkcje bazowe $\Phi_j \in H_A$, tzn. spełniają jednorodne podstawowe warunki brzegowe $\Phi_j(0) = \Phi_j'(0) = 0$. Przyjmujemy, że zbiór $\{\Phi_j\} = \{x^{j+1}\}$ jest bazą w H_A . Rozwiązanie przybliżone otrzymamy, przyjmując

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j \quad (4.44)$$

Podstawiając (4.44) do (4.43), otrzymamy z warunku minimalizacji funkcjonału wzory

$$\begin{aligned} b_{ij} &= B(\Phi_i, \Phi_j) = \int_0^L EI(i+1)ix^{i-1}j(j+1)x^{j-1}dx = \\ &= \frac{EIij(i+1)(j+1)(L)^{i+j-1}}{(i+j-1)} \\ f_i &= l(\Phi_i) = \int_0^L x^{i+1}f dx = \frac{f(L)^{i+2}}{i+2} \end{aligned}$$

oraz oznaczmy $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ i $\mathbf{F} = [f_i]$.

Obliczenie \mathbf{B} i \mathbf{F} można również przedstawić w sposób macierzowy, definiując wektor wierszowy funkcji bazowych $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]$. Wzory macierzowe mają postać

$$\mathbf{B} = \int_0^L (\Phi'')^T EI \Phi'' dx \quad \mathbf{F} = \int_0^L \Phi^T f dx \quad (4.45)$$

Przyjmując rozwiązanie dwuparametrowe $w_2 = u_2 + w_0$, otrzymamy układ równań $\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{F}$ w formie

$$\begin{aligned} 4Lc_1 + 6L^2c_2 &= \frac{fL^3}{3EI} \\ 6L^2c_1 + 12L^3c_2 &= \frac{fL^4}{4EI} \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest $c_1 = \frac{5fL^2}{24EI}$, $c_2 = -\frac{fL}{12EI}$.

Rozwiązanie przybliżone wyjściowego problemu (4.37) ma postać

$$w_2 = \frac{12M + 5fL^2}{24EI}x^2 - \frac{fL}{12EI}x^3$$

Rozwiązanie dokładne otrzymamy, przyjmując $N = 3$ ($w(x)$ jest dokładnie funkcją czwartego stopnia, patrz p.2).

Funkcjonał rozszerzony – metoda mnożników Lagrange’a

Zamiast rozwiązywać równanie (4.37) w metodzie tej minimalizujemy funkcjonal

$$J(\Psi, w) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - fw \right] dx + M\Psi(L) \quad (4.46a)$$

$$\text{z równaniem więzów} \quad G(\Psi, w) \equiv \Psi + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4.46b)$$

Zauważmy, że podstawienie za Ψ (4.46b) do (4.46a) prowadzi do funkcjonału całkowitej energii potencjalnej belki, związanej ze sformułowaniem konwencjonalnym metody Rayleigha-Ritza.

Rozszerzony funkcjonal dany jest wzorem

$$L(\Psi, w, \lambda) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - fw \right] dx + \int_0^L \lambda \left(\Psi + \frac{dw}{dx} \right) dx + M\Psi(L) \quad (4.47)$$

gdzie λ jest nazywane mnożnikiem Lagrange'a, mającym w tym przykładzie interpretację siły poprzecznej. Podstawowe warunki brzegowe są obecnie następujące: $\Psi(0) = w(0) = 0$.

Słabe sformułowanie otrzymamy, przyrównując do zera pierwszą wariację $\delta L = 0$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^L \left(EI \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\delta\Psi}{dx} + \lambda \delta\Psi \right) dx + M\delta\Psi(L) + \int_0^L \left(\lambda \frac{d\delta w}{dx} - f\delta w \right) dx + \\ & + \int_0^L \delta\lambda \left(\Psi + \frac{dw}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (4.48)$$

Przyjmując rozwiązanie jednoparametrowe mamy

$$\Psi(x) = a_1 \Phi_1^1 \quad w(x) = b_1 \Phi_1^2 \quad \lambda(x) = c_1 \Phi_1^3$$

gdzie Φ_1^α , $\alpha = 1, 2, 3$ są funkcjami aproksymacyjnymi. Zakładając następnie, że $\Phi_1^1 = x$, $\Phi_1^2 = x^2$ i $\Phi_1^3 = 1$, otrzymamy po podstawieniu do (4.48) trzy równania (dla niezależnych wariacji δa_1 , δb_1 i δc_1)

$$EILa_1 + \frac{L^2}{2}c_1 = -ML \quad c_1 = \frac{fL}{2} \quad b_1 = \frac{4ML + fL^3}{8EI}$$

Rozwiązanie jednoparametrowe ma postać

$$\Psi(x) = -\left(\frac{4M + fL^2}{4EI} \right) x \quad w(x) = \frac{(4M + fL^2)L}{8EI} x \quad \lambda(x) = \frac{fL}{2}$$

podczas gdy rozwiązanie dokładne wynosi

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{-(2M + fL^2)x}{2EI} + \frac{fLx^2}{2EI} - \frac{fx^3}{6EI} \\ \lambda &= f(L - x) \\ w(x) &= \frac{(2M + fL^2)x^2}{4EI} - \frac{fLx^3}{6EI} + \frac{fx^4}{24EI} \end{aligned}$$

4.3. Metoda residuów ważonych

Przyjmujemy, że \mathcal{S} jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Jeśli dla elementu $u \in H$

$$(u, w) = 0 \quad \text{jest prawdziwe dla każdego } w \in \mathcal{S}$$

gdzie, powtórzmy, (\bullet, \bullet) jest iloczynem skalarnym w H , to wynika z tego, że $u = 0$ w H .

Jeśli natomiast $\{\Psi_i\}$ są funkcjami bazowymi w H , to wówczas

$$(u, \Psi_k) = 0 \quad \text{implikuje } u = 0 \text{ w } H \text{ dla wszystkich } k$$

Rozważmy teraz równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \tag{4.49}$$

z operatorem $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ oraz odpowiednimi, jednorodnymi, warunkami brzegowymi. Elementy zbioru \mathcal{D}_A z definicji spełniają te warunki brzegowe. Jeśli $u \in \mathcal{D}_A$ jest takie, że

$$(Au - f, \Psi_k) = 0 \quad \text{dla każdego } k = 1, 2, \dots \tag{4.50}$$

gdzie $\{\Psi_k\}$ są funkcjami bazowymi w H , wówczas oznacza to, że $Au - f = 0$ w H , czyli u jest rozwiązaniem problemu (4.49). Innymi słowy, znalezienie rozwiązania (4.49) jest równoważne poszukiwaniu rozwiązania (4.50). Ta równoważność tworzy bazę metody residuów ważonych.

W metodzie tej dla reprezentacji u wybieramy dowolną bazę $\{\Phi_i\}$ z \mathcal{D}_A (nie jest wymagane, aby była to baza $\{\Psi_i\}$) z warunkiem, że tzw. residuum R_N

$$R_N \equiv Au_N - f$$

jest ortogonalne do podprzestrzeni utworzonej z funkcji bazowych $\{\Psi_k\}$

$$(Au_N - f, \Psi_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{4.51}$$

W literaturze metoda residuów ważonych, wyrażona przez równanie (4.51), znana jest pod różnymi nazwami, zależnie od wyboru bazy $\{\Psi_i\}$. Ogólny przypadek $\Psi_k \neq \Phi_k$ nazywany jest *metodą Petrowa-Galerkina* (autorem metody był B.G.Galerkin, 1915r.) .

W metodzie residuów ważonych poszukujemy rozwiązania przybliżonego u_N równania (4.49) w formie

$$u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad (4.52)$$

gdzie N jest całkowitą liczbą dodatnią, a c_i są stałymi, podlegającymi wyznaczeniu. Jeśli operator A jest liniowy, to wówczas, podstawiając (4.52) do (4.51), obliczymy c_i , rozwiązując układ równań

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Psi_k) c_i = (f, \Psi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.53a)$$

który w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$(\Psi^T, A\Phi) \mathbf{c} = (\Psi^T, f) \quad (4.53b)$$

Wymaganie, że $\Phi_i \in \mathcal{D}_A$ oznacza, że jeśli A jest operatorem różniczkowym rzędu $2m$, to Φ_i muszą być różniczkowalne $2m$ razy i spełniać zadane warunki brzegowe (przyjeliśmy, że są one jednorodne). Funkcje bazowe $\{\Psi_k\}$ nazywamy *funkcjami wagowymi*, a funkcje z bazy $\{\Phi_k\}$ *funkcjami próbnymi* (lub testowymi).

Metoda residuów ważonych może być stosowana do rozwiązywania znacznie szerszej klasy równań operatorowych niż równania operatorowe, w których możliwe jest włączenie naturalnych warunków brzegowych do sformułowania słabego, jak wymaga tego metoda Rayleigha-Ritza. W najbardziej ogólnym sformułowaniu (4.51) operator A nie musi być dodatnio określony ani liniowy.

Takie same równania końcowe otrzymamy, jeśli przyjmiemy

$$w_N = \sum_{k=1}^N d_k \Psi_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.54)$$

gdzie d_k są dowolnymi stałymi. Wówczas równanie (4.51) przyjmie formę

$$(Au_N - f, w_N) = 0 \quad (4.55)$$

Podstawiając teraz związki (4.52) i (4.54) do (4.55) oraz wykorzystując warunki $d_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, N$, otrzymamy z powrotem układ równań (4.53).

4.3.1. Metoda Bubnowa-Galerkina

W tej metodzie (autorstwo której przypisuje się I.G.Bubnowowi, 1913 r.) poszukujemy rozwiązania przybliżonego równania (4.49) w formie kombinacji liniowej (4.52) i współczynniki c_i obliczamy z warunku, że residuum R_N jest ortogonalne do funkcji wagowej $\sum_{k=1}^N d_k \Phi_k, k = 1, 2, \dots, N$, co oznacza, że jest ortogonalne do funkcji bazowych $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, spełniających wszystkie warunki brzegowe problemu

$$(R_N, \Phi_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.56)$$

Jeśli A jest operatorem liniowym, to wówczas niewiadome c_i wyznaczamy rozwiązując układ równań algebraicznych w postaci

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.57a)$$

dla każdej funkcji $\Phi_k \in \mathcal{D}_A$. Równania te w postaci macierzowej można zapisać jako

$$(\Phi^T, A\Phi) \mathbf{c} = (\Phi^T, f) \quad (4.57b)$$

Jeśli A jest operatorem dodatnio określonym, to wówczas $A = T^*T$. W takim przypadku iloczyn skalarny $(A\Phi_i, \Phi_k)$ można wyrazić poprzez formę dwuliniową: $(A\Phi_i, \Phi_k) = (T\Phi_i, T\Phi_k) = B(\Phi_i, \Phi_k)$ i wówczas równanie (4.57) jest identyczne z równaniem (4.5) metody Rayleigha-Ritza (w tym sensie mówimy, że metoda Bubnowa-Galerkina jest uogólnieniem metody Rayleigha-Ritza). Wynika stąd, że metody Bubnowa-Galerkina i Rayleigha-Ritza są identyczne, jeśli operator A jest symetryczny i dodatnio określony. W tym przypadku metoda Bubnowa-Galerkina może być sformułowana przy wykorzystaniu funkcji Φ_i z przestrzeni energii H_A , która jest dużo większą przestrzenią niż \mathcal{D}_A , ponieważ elementy H_A spełniają tylko jednorodne podstawowe warunki brzegowe i wystarczy, aby funkcje z tej przestrzeni były różniczkowalne do rzędu m dla operatora różniczkowego A rzędu $2m$.

Wykorzystując, że $A = T^*T$ oraz $\Phi_i \in H_A$, równanie (4.57) przyjmie postać

$$\sum_{i=1}^N (T\Phi_i, T\Phi_k) c_i = (f, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{m-n} (h_j, B_j \Phi_k) \quad (4.58)$$

gdzie B_j są operatorami brzegowymi pojawiającymi się w podstawowych warunkach brzegowych, h_j – określonymi wielkościami pojawiającymi się w naturalnych warunkach brzegowych, a n – liczbą wyspecyfikowanych podstawowych warunków brzegowych.

Podsumowując, jeśli A jest operatorem dodatnio określonym, to w metodzie Bubnowa-Galerkina możemy skorzystać z równań (4.57) lub z równań (4.58), które w przypadku jednorodnych warunków brzegowych redukują się do równań (4.5). W pierwszym przypadku będziemy dalej mówili po prostu o *metodzie Bubnowa-Galerkina*, natomiast drugi przypadek nazwiemy *metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym* (w literaturze nazywaną też *sformułowaniem wariacyjnym*).

Przykład 4.6. Rozwiążmy równanie różniczkowe metodą Bubnowa-Galerkina

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x &= 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie dokładne wynosi $u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$.

Problem z jednym stopniem swobody, $N = 1$

Przyjmijmy $\Phi_1 = \sin \pi x$, $\Phi_1(0) = 0$, $\Phi_1(1) = 0$ tak, że rozwiązanie przybliżone ma postać

$$u_1 = c_1 \sin \pi x$$

Skorzystamy z równania (4.57) i obliczymy

$$\begin{aligned} A\Phi_1 &= \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \Phi_1 = (-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x) \\ (A\Phi_1, \Phi_1) &= \int_0^1 A(u_1) \Phi_1 dx = \frac{1}{2}(1 - \pi^2) \\ (f, \Phi_1) &= \int_0^1 (-x) \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie

$$(A\Phi_1, \Phi_1)c_1 = (f, \Phi_1)$$

czyli

$$\frac{1}{2}(1 - \pi^2)c_1 = -\frac{1}{\pi}$$

mamy

$$c_1 = \frac{2}{\pi(\pi^2 - 1)} \cong 0.0718$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_1 = 0.0718 \sin \pi x$$

Problem z dwoma stopniami swobody, $N = 2$

Funkcje bazowe przyjmiemy w postaci wielomianów

$$\Phi_1(x) = x(1 - x) \quad \Phi_2(x) = x^2(1 - x) \quad \Phi_i(0) = 0 \quad \Phi_i(1) = 0 \quad i = 1, 2$$

Rozwiązanie przybliżone ma formę

$$u_2 = c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x) = \Phi \mathbf{c}$$

gdzie zdefiniowane są macierze

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_1 \quad \Phi_2] && \text{– macierz jednowierszowa funkcji bazowych} \\ \mathbf{c} &= \{c_1 \quad c_2\} && \text{– wektor kolumnowy niewiadomych parametrów} \end{aligned}$$

Skorzystamy z równania (4.57), obliczając

$$\begin{aligned} A\Phi &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) [\Phi_1 \quad \Phi_2] = [-2 + x - x^2 \quad 2 - 6x + x^2 - x^3] \\ f\Phi^T &= \begin{bmatrix} -x^2(1 - x) \\ -x^3(1 - x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i następnie macierz współczynników przy niewiadomych

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\Phi^T, A\Phi) = \int_0^1 \Phi^T A\Phi dx = \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} x(1 - x) \\ x^2(1 - x) \end{bmatrix} [-2 + x - x^2 \quad 2 - 6x + x^2 - x^3] dx = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{15}{100} \\ -\frac{15}{100} & -\frac{13}{105} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz wektor prawej strony

$$\mathbf{F} = (f, \Phi^T) = \int_0^1 \begin{bmatrix} -x^2(1-x) \\ -x^3(1-x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań $\mathbf{Kc} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{15}{100} \\ \frac{15}{100} & \frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

daje wynik $c_1 = \frac{71}{369} \cong 0.1924$ i $c_2 = \frac{7}{41} \cong 0.1707$. Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_2(x) = x(1-x)(0.1924 + 0.1707x)$$

Przyjmując $x = \frac{1}{2}$, otrzymamy $u_1 = 0.0718$ i $u_2 = 0.0694$.

W tab.4.2 porównano rozwiązanie u_2 z rozwiązaniem dokładnym oraz obliczono residuum R_2 . Wyniki obliczeń przedstawiono również na rys. 4.6.

x	Rozw. dokł.	Rozw. przybl. u_2	Residuum R_2
0.10	0.0186	0.0189	-0.0269
0.50	0.0697	0.0694	0.0139
0.90	0.0309	0.0311	-0.0342

Tabela 4.2. Porównanie liczbowe obliczeń w przykładzie 4.6

Przykład 4.7. Rozwiążemy problem brzegowy z przykładu 4.4 metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym.

Rozważany problem brzegowy ma postać

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f x = 0 \quad 0 < x < L \quad (4.59a)$$

$$u(0) = 0 \quad EA \frac{du}{dx}(L) = P \quad (4.59b)$$

i jego rozwiązaniem jest funkcja

$$u(x) = \frac{(3fL^2 - fx^2 + 6P)}{6EA}$$

Sformułowanie wariacyjne przyjmuje prostą postać równania całkowego

$$\int_0^L \left(-AE \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + f x w(x) \right) dx + Pw(L) = 0 \quad (4.60)$$

z podstawowym warunkiem brzegowym $u(a) = 0$, gdzie $w(x)$ jest funkcją wagową.

Rozwiązanie liniowe

Podstawiając do (4.60) aproksymacje liniowe

$$u_1(x) = c_1 x \quad w_1(x) = d_1 x \quad (4.61)$$

(w tym przypadku $\Phi(x) = x$ i spełnia podstawowy warunek brzegowy), otrzymamy dla $d_1 \neq 0$ równanie

$$\int_0^L (-EA c_1 + f x^2) dx + PL = 0$$

którego rozwiązanie wynosi

$$c_1 = -\frac{-fL^2 - 3P}{3EA}$$

Aproksymacja liniowa funkcji $u(x)$ jest następująca:

$$u_1(x) = c_1 x = \frac{(fL^2 + 3P)x}{3EA}$$

Rozwiązanie kwadratowe

Poprawę rozwiązania otrzymamy, przyjmując dwie funkcje bazowe, spełniające warunek $\Phi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$

$$\Phi = [x \ x^2]$$

co odpowiada aproksymacji kwadratowej

$$u_2(x) = \Phi \mathbf{c} \quad w_2(x) = \Phi \mathbf{d} \quad (4.62)$$

gdzie

$$\mathbf{c} = \{c_1 \ c_2\} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{d} = \{d_1 \ d_2\}$$

Podstawiając (4.62) do (4.60), otrzymamy z warunku $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ równanie macierzowe

$$\left(\int_0^L \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} EA [1 \ 2x] dx \right) \mathbf{c} = \int_0^L f \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} dx + P \begin{bmatrix} L \\ L^2 \end{bmatrix}$$

które po wykonaniu koniecznych całkowań przyjmuje formę

$$EALc_1 + EAL^2c_2 = \frac{fL^3}{3} + PL$$

$$EAL^2c_1 + \frac{4}{3}EAL^3c_2 = \frac{fL^4}{4} + PL^2$$

i jego rozwiązanie wynosi

$$c_1 = -\frac{-7fL^2 - 12P}{12EA} \quad c_2 = -\frac{fL}{4EA}$$

Aproksymacja kwadratowa funkcji $u(x)$ przedstawia się następująco:

$$u(x) = c_1x + c_2x^2 = \frac{(12P + fL(7L - 3x))x}{12EA}$$

Przyjmując w końcu aproksymację sześcienną, otrzymamy rozwiązanie dokładne. Zgodnie z oczekiwaniem rozwiązanie metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym jest identyczne z rozwiązaniem metodą Rayleigha-Ritza.

Przykład 4.8. Rozważmy nieliniowe równanie różniczkowe

$$u \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (4.63a)$$

$$u'(0) = 0 \quad u(1) = \sqrt{2} \quad (4.63b)$$

Obszarem definicji operatora $\bar{A}u \equiv u \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \left(\frac{du}{dx} \right)^2$ jest przestrzeń $\bar{\mathcal{D}}_A$ funkcji dwukrotnie różniczkowalnych, które spełniają warunki brzegowe (4.63b). Jest ona nieliniowa, ponieważ warunki brzegowe są niejednorodne. Podstawiając $u = v + \sqrt{2}$, przetransformujemy ten problem do problemu z jednorodnymi warunkami brzegowymi, otrzymując

$$(v + \sqrt{2}) \frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (4.64a)$$

$$v'(0) = 0 \quad v(1) = 0 \quad (4.64b)$$

Teraz v należy do przestrzeni liniowej funkcji dwukrotnie różniczkowalnych i spełniających jednorodne warunki brzegowe $\mathcal{D}_A \subset H^2(0, 1)$, gdzie $H^2(0, 1)$ jest przestrzenią liniową. Przestrzeń energii H_A zawiera elementy z $H^1(0, 1)$, które znikają dla $x = 1$.

Problem (4.63) ma rozwiązanie dokładne w formie

$$u(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Rozwiązanie przybliżone można otrzymać, korzystając z równania (4.57) lub z równania (4.56) w słabym sformułowaniu. Zauważmy najpierw, że równanie (4.64) może być przepisane w formie

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left[(v + \sqrt{2}) \frac{dv}{dx} \right] &= -1 \\ v'(0) &= 0 \quad v(1) = 0 \end{aligned}$$

Równanie (4.56) przyjmie teraz postać

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left[(v_N + \sqrt{2}) \frac{dv_N}{dx} \right] + 1 \right\} \Phi_k dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.65)$$

dla każdego $\Phi_k \in \mathcal{D}_A$. Sformułowanie słabe otrzymamy, całkując przez części składnik w nawiasie kwadratowym

$$\int_0^1 \left[(v_N + \sqrt{2}) \frac{dv_N}{dx} \frac{d\Phi_k}{dx} + \Phi_k \right] dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.66)$$

dla każdego $\Phi_k \in H_A$. Wyrazy brzegowe wynikające z całkowania przez części zniknęły, ponieważ $v'(0) = 0$ i $\Phi_k(1) = 0$.

Zastosowanie metody Bubnowa-Galerkina oznacza skorzystanie z (4.65) i przyjęcie funkcji Φ_i z przestrzeni \mathcal{D}_A . Przyjmiemy, że są nimi wielomiany

$$v_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \Phi_i = 1 - x^{i+1}$$

oraz że $N = 1$, co prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned} A(v_1) &= -\frac{d}{dx} \left[(v_1 + \sqrt{2}) \frac{dv_1}{dx} \right] = -\frac{d}{dx} (c_1(1-x^2) + \sqrt{2})(-2c_1x) = \\ &= -[c_1(1-x^2) + \sqrt{2}](-2c_1) - (2xc_1)^2 = \sqrt{2}2c_1 + 2c_1^2 - 6x^2c_1^2 \\ (A(v_1), \Phi_1) &= \int_0^1 A(v_1)(1-x^2)dx = \frac{4}{3}\sqrt{2}c_1 + \frac{8}{15}c_1^2 \\ (f, \Phi_1) &= \int_0^1 (-1)(1-x^2)dx = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie kwadratowe

$$(A(v_1), \Phi_1) = (f, \Phi_1)$$

dostaniemy

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \frac{-5\sqrt{2} + \sqrt{30}}{4} \cong -0.39846 \\ c_1^{(2)} &= \frac{-5\sqrt{2} - \sqrt{30}}{4} \cong -3.13707 \end{aligned}$$

Wyboru właściwego c_1 dokonamy, korzystając z kryterium minimum residuum. Wybieramy to c_1 , dla którego mniejsza będzie norma L_2 residuum $R_1 = A(v_1) - f$. Z obliczeń wynika, że tym c_1 jest $c_1^{(1)}$. W efekcie jednoparametrowe rozwiązanie problemu (4.63) ma postać

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = 1.01575 + 0.39846x^2 \quad (4.67)$$

Rozwijając w szereg potęgowy rozwiązanie dokładne $\sqrt{1+x^2}$, otrzymujemy

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + 0.5x^2 + \dots$$

co oznacza, że rozwiązanie przybliżone jest dość dobre.

Jeśli rozwiązywalibyśmy równanie (4.63a) z niejednorodnymi warunkami brzegowymi, to należałoby przyjąć rozwiązanie przybliżone w formie

$$u_N = \Phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$$

gdzie funkcję Φ_0 należałoby tak dobrać, aby spełniała warunki brzegowe (4.63b). Przyjmując $\Phi_0 = \sqrt{2}$ tak, że $\Phi_0(1) = \sqrt{2}$ i $\Phi_0'(0) = 0$ oraz $N = 1$, znowu otrzymamy rozwiązanie (4.67). Do rozwiązania metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym należy wykorzystać równanie (4.66). Ponieważ $\Phi_i \in H_A = \{u \in H^1(0,1) : u(1) = 0\}$, to wybierzemy $\Phi_i = 1 - x^i$. Przyjmiemy

$$v_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \Phi_i = 1 - x^i$$

Podstawiając ten wzór do (4.66) i wykonując nakazane całkowanie, otrzymamy (dla $N = 1$)

$$\begin{aligned} c_1^2 + 2\sqrt{2}c_1 + 1 &= 0 \\ c_1^{(1)} = 1 - \sqrt{2} \quad c_1^{(2)} &= -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Korzystając powtórnie z kryterium minimum residuum w sensie normy L_2 ustalimy, że właściwym rozwiązaniem jest $c_1^{(1)}$. Rozwiązanie ma postać

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = (1-x)(1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = (1-x) + \sqrt{2}x \quad (4.68)$$

Nie jest to rozwiązanie satysfakcjonujące (specjalnie dla większych wartości x $0 < x < 1$), ale można je znacznie poprawić, przyjmując więcej parametrów c_i w aproksymacji. W takim jednakże przypadku otrzymamy nieliniowy układ równań algebraicznych, który wymaga rozwiązania metodami numerycznymi.

W końcu rozwiążemy zadanie *metodą Petrowa-Galerkina*, w której funkcje wagowe Ψ_k w równaniu $(A(v_N) - f, \Psi_k) = 0$ są różne od funkcji próbnych Φ_k .

Przyjmując

$$\Psi_1 = \cos \frac{\pi x}{2} \quad \text{mamy} \quad \Psi_1(1) = 0 \quad \text{i} \quad \Psi_1'(0) = 0$$

W tym przypadku, dla $\Phi_1 = 1 - x^{i+1}$, otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned}(A(v_1), \Psi_1) &= \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{2} c_1 + \left(-8 + \frac{96}{\pi^2} \right) c_1^2 \right] \\ (f, \Psi_1) &= -\frac{2}{\pi} \\ c_1^{(1,2)} &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 2[(96/\pi^2) - 8]}}{(96/\pi^2) - 8} \\ c_1^{(1)} &= -0.40317 \quad c_1^{(2)} = -2.87268\end{aligned}$$

Z warunku minimum residuum wybieramy $c_1^{(1)}$ tak, że rozwiązaniem jest funkcja

$$u_1 \equiv v_1 + \sqrt{2} = 1.01104 + 0.40317x^2$$

co daje trochę lepszy wynik niż rozwiązanie metodą Bubnowa-Galerkina.

Przykład 4.9. Rozważmy równanie różniczkowe

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad 0 < x < 1 \quad (4.69a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(1) = q \quad -\frac{du}{dx}(0) = h \quad (4.69b)$$

oraz znaną funkcją $f = f(x)$ i danymi q i h . Przestrzeń funkcji dopuszczalnych jest następująca:

$$\mathcal{D}_A = \{u(x) \in C^2(0, 1), 0 < x < 1, u(1) = q, -\frac{du}{dx}(0) = h\}$$

Problem rozwiążemy metodą Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym. Założymy, w przeciwieństwie do poprzednich przykładów, że poszukujemy rozwiązania odcinkowo-liniowego w podprzedziałach $[0, \frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2}, 1]$. Przykład jest dobrym wprowadzeniem do metody elementów skończonych.

Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci (4.7)

$$u_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) c_i + \Phi_0(x)q \quad (4.70)$$

gdzie $\Phi_0(x)q$ jest funkcją spełniającą niejednorodny podstawowy warunek brzegowy (4.69b).

Przyjmując $N = 2$, wybieramy funkcje $\Phi_i, i = 0, 1, 2$, w postaci kombinacji liniowych funkcji Lagrange'a

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

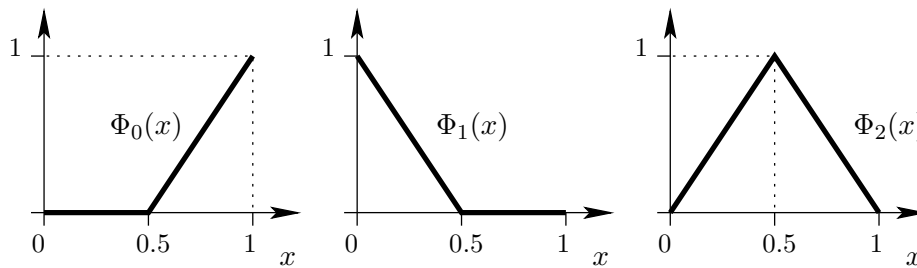
W ten sposób możemy napisać, że

$$u_2 = \Phi_1 c_1 + \Phi_2 c_2 + \Phi_0 q = \mathbf{\Phi} \mathbf{c} + \Phi_0 q \quad (4.71a)$$

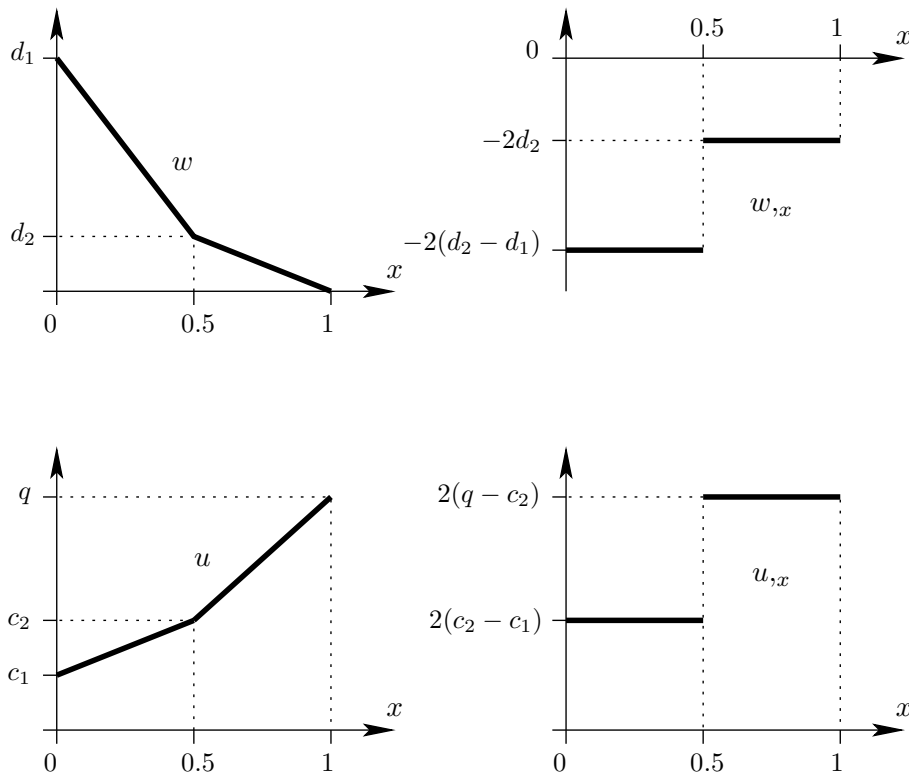
oraz

$$w_2 = \Phi_1 d_1 + \Phi_2 d_2 = \mathbf{\Phi} \mathbf{d} \quad (4.71b)$$

Przyjęcie takich odcinkowo-liniowych funkcji bazowych spełnia warunek ciągłości C^1 w przedziałach $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}, 1)$ (powiemy, że w tych podprzedziałach funkcje bazowe są z przestrzeni energii H_A). Jednakże dla $x = \frac{1}{2}$ nie będzie spełniony warunek ciągłości pochodnej rozwiązania przybliżonego. Rys. 4.2 przedstawia wykresy funkcji bazowych, natomiast na rys. 4.3 pokazano wykresy funkcji u_2 i w_2 oraz ich pochodnych.



Rys.4.2. Funkcje bazowe w przykładzie 4.9

Rys.4.3. Funkcje u_2 i w_2 oraz ich pochodne w przykładzie 4.9

Równanie słabego sformułowania wariacyjnego ma postać

$$\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 w f dx + w(0) h$$

co po wykorzystaniu (4.71) daje równanie

$$\mathbf{d}^T \left\{ \left[\int_0^1 \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} dx \right] \mathbf{c} + \int_0^1 \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi_0}{dx} q dx - \int_0^1 \Phi^T f dx - \Phi^T(0) h \right\} = 0$$

Wykorzystanie warunku $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ prowadzi w końcu do równania macierzo-
wego

$$\mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

gdzie zdefiniowano

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi}{dx} dx$$

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \Phi^T f dx + \Phi^T(0) h - q \int_0^1 \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^T \frac{d\Phi_0}{dx} dx$$

Elementy b_{ij} , $i, j = 1, 2$, macierzy \mathbf{B} obliczymy ze wzoru

$$b_{ij} = \int_0^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx$$

otrzymując

$$\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Z kolei elementy f_i , $i = 1, 2$, wektora \mathbf{F} wyznaczmy ze wzoru

$$f_i = \int_0^1 \Phi_i f dx + \Phi_i(0) h - q \int_0^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_0}{dx} dx$$

co prowadzi do wyników

$$f_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) f(x) dx + h$$

$$f_2 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x f(x) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x) f(x) dx + 2q$$

Zauważmy, że brak ciągłości funkcji bazowych nie sprawił kłopotu w obliczeniach, ponieważ całkowanie zostało rozdzielone na dwa przedziały $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ i $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

W dalszym ciągu rozważymy 3 przypadki określenia funkcji f .

Przypadek $f = 0$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} h \\ 2q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+h \\ q+\frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ma formę

$$u = (q+h)\Phi_1 + \left(q + \frac{h}{2}\right)\Phi_2 + q\Phi_0 = q(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0) + h\left(\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_2\right)$$

$$u = q + h(1-x)$$

Otrzymane rozwiązanie jest liniowe i jest ono dokładne, co stanowi rezultat przyjęcia liniowych funkcji bazowych.

Przypadek $f(x) = f = \text{const}$

$$f_1 = \frac{f}{4} + h$$

$$f_2 = \frac{f}{2} + 2q$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f}{4} + h \\ \frac{f}{2} + 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{2} + q + h \\ \frac{3f}{8} + q + \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ma postać

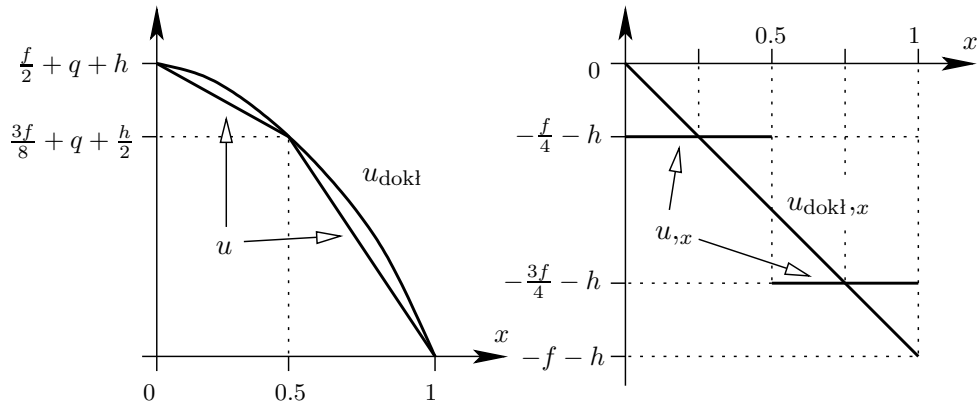
$$u = q + h(1-x) + \frac{f}{2}\Phi_1 + \frac{3f}{8}\Phi_2$$

Na rys. 4.4 porównano wynik dokładny z obliczeniami.

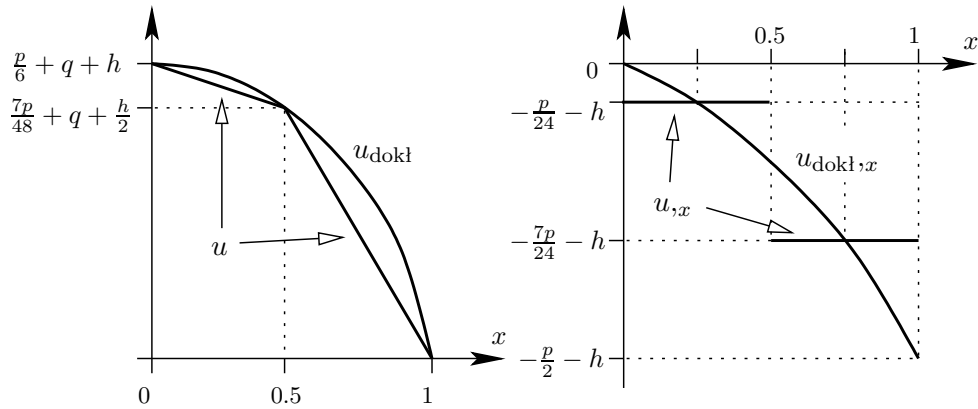
Przypadek $f(x) = px$, $p = \text{const}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{p}{24} + h \\ \frac{p}{4} + 2q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{p}{6} + q + h \\ \frac{7p}{48} + q + \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Porównanie wyników obliczeń dokładnych i przybliżonych przedstawiono na rys. 4.5.



Rys.4.4. Porównanie rozwiązania dokładnego z rozwiązaniem wariacyjnym dla przypadku $f(x) = f = \text{const}$ w przykładzie 4.9



Rys.4.5. Porównanie rozwiązania dokładnego z rozwiązaniem wariacyjnym dla przypadku $f(x) = px$, $p = \text{const}$ w przykładzie 4.9

4.3.2. Metoda najmniejszych kwadratów

Rozważmy równanie operatorowe

$$Au = f \quad \text{w } \Omega \quad (4.72)$$

gdzie $A : \mathcal{D}_A \rightarrow H$ i nie musi to być operator symetryczny. Przyjmiemy, że zbiór funkcji liniowych \mathcal{D}_A jest zwarty w przestrzeni H .

W metodzie najmniejszych kwadratów rozwiązanie równania (4.72) jest

konstruowane w formie funkcji $u_N \in \mathcal{D}_A$

$$u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$$

która minimalizuje residuum

$$\|R_N\|_H = \|Au_N - f\|_H = \left\| \sum_{i=1}^N A(c_i \Phi_i) - f \right\|_H$$

Warunek powyższy prowadzi do układu równań z nieznanymi parametrami c_1, c_2, \dots, c_N

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k} \|R_N\|_H = \frac{\partial}{\partial c_k} \sqrt{(R_N, R_N)_H} = \left(R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right)_H \frac{1}{\|R_N\|_H} \quad (4.73)$$

Ponieważ $R_N \neq 0$, to oznacza, że równanie (4.73) jest równoważne równaniu

$$\left(R_N, \frac{\partial R_N}{\partial c_k} \right)_H = 0 \quad (4.74)$$

W ten sposób stwierdzamy, że metoda najmniejszych kwadratów to taki wariant metody residuów ważonych, w którym funkcja wagowa ma postać

$$\Psi_k = \frac{\partial R_N}{\partial c_k}$$

Równanie (4.74) w rozwiniętej formie ma postać

$$\left(Au_N - f, \frac{\partial}{\partial c_k} (Au_N) \right)_H = 0 \quad (4.75)$$

Jeśli A jest operatorem liniowym, to prowadzi to do liniowego układu równań algebraicznych w formie

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, A\Phi_k)_H c_i = (f, A\Phi_k)_H \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.76)$$

Macierz współczynników przy niewiadomych $B_{ij} = (A\Phi_i, A\Phi_j)_H$ jest symetryczna dla dowolnego operatora A . Jest ona nieosobliwa, jeśli zbiór $\{A\Phi_i\}$ jest liniowo niezależny (czyli jeśli A jest liniowy i $\{\Phi_i\}$ jest zbiorem funkcji

liniowo niezależnych). Można udowodnić, że $u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$ ze współczynnikami c_i , obliczonymi z (4.76), jest zbieżne w przestrzeni energii H_A , związanej z dodatnio określonym operatorem A , do rozwiązania dokładnego u równania (4.72).

Zauważmy, że jeśli operator A i baza $\{\Phi_i\}$ są takie, że $A\Phi_k = \alpha_k \Phi_k$, α_k – stała (bez sumowania), to równanie (4.76) sprowadza się do równania

$$\sum_{i=1}^N (A\Phi_i, \Phi_k) c_i = (f, \Phi_k)_H \quad k = 1, 2, \dots, N$$

co oznacza, że w tym przypadku metoda Bubnowa-Galerkina i metoda najmniejszych kwadratów dają to samo rozwiązanie.

Przykład 4.10. Rozważmy ten sam problem brzegowy co w przykładzie 4.6, przyjmując $N = 1$ i $\Phi_1 = \sin \pi x$.

Korzystając z równania (4.76) obliczymy

$$\begin{aligned} (A\Phi_1) &= -\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x \\ (A\Phi_1, A\Phi_1) &= \int_0^1 [A\Phi_1]^2 dx = \int_0^1 (-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x)^2 dx = \frac{1}{2}(1 - \pi^2)^2 \\ (f, A\Phi_1) &= \int_0^1 (-x)(-\pi^2 \sin \pi x + \sin \pi x) dx = -\frac{1}{\pi}(1 - \pi^2) \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie

$$(A\Phi_1, A\Phi_1)c_1 = (f, A\Phi_1)$$

lub

$$\frac{1}{2}(1 - \pi^2)^2 c_1 = -\frac{1}{\pi}(1 - \pi^2)$$

mamy $c_1 = \frac{2}{\pi(\pi^2 - 1)} \cong 0.0718$. Wyniki otrzymane z metody Bubnowa-Galerkina i z metody najmniejszych kwadratów są takie same, ponieważ $A\Phi_1 = \alpha_1 \Phi_1 = (1 - \pi^2) \sin \pi x$, $\alpha_1 = 1 - \pi^2$.

Przykład 4.11. Rozwiążmy nieliniowe równanie różniczkowe (4.63), rozwiązzywane w przykładzie 4.8 metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmujemy rozwiązanie przybliżone w formie

$$u_1(x) = \Phi_0 + c_1 \Phi_1 = \sqrt{2}x^2 + c_1(1 - x^2) \quad (4.77)$$

gdzie $\Phi_0(1) = \sqrt{2}$ i $\Phi_0'(0) = 0$, co oznacza, że $\Phi_0(x)$ spełnia warunki brzegowe zadania. Funkcja Φ_1 spełnia jednorodne warunki brzegowe.

Powtarzając metodę rozwiązania z przykładu 4.8, otrzymamy równanie dla metody Bubnowa-Galerkina

$$4c_1^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 7 = 0$$

z rozwiązaniem $c_1^{(1)} = 1.012575$ i $c_1^{(2)} = -1.72289$. Mniejsze residuum jest dla $c_1^{(1)}$ i stąd rozwiązanie ma postać

$$u_1 = 1.01575 + 0.39846x^2$$

to znaczy jest takie samo jak (4.67).

Zastosowanie aproksymacji (4.77) do równania (4.75) daje wyniki

$$\begin{aligned} Au_1 &= (12 - 12\sqrt{2}c_1 + 6c_1^2)x^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 2c_1^2 \\ \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 &= 12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2} \\ \left(Au_1, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) &= \int_0^1 \left\{ [12(1 - \sqrt{2})c_1 + 6c_1^2]x^2 + 2\sqrt{2}c_1 - 2c_1^2 \right\} \cdot \\ &\quad \cdot [12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2}] dx = \\ &= \frac{32}{5}c_1^3 - \frac{96}{5}\sqrt{2}c_1^2 + \frac{232}{5}c_1 - \frac{104}{5}\sqrt{2} \\ \left(f, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) &= \int_0^1 [12(c_1 - \sqrt{2})x^2 - 4c_1 + 2\sqrt{2}] dx = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\left(Au_1, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) - \left(f, \frac{\partial}{\partial c_1} Au_1 \right) = 0$$

lub

$$c_1^3 - 3\sqrt{2}c_1^2 + \frac{232}{32}c_1 - \frac{47}{16}\sqrt{2} = 0$$

Z trzech pierwiastków tylko jeden jest rzeczywisty $c_1^{(1)} = 1.0256$ i rozwiązanie metodą najmniejszych kwadratów ma postać

$$u_1 = 1.0256 + 0.3257x^2 \quad (4.78)$$

Zastosowanie metody Petrowa-Galerkina z $\Psi_1 = \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{2}$ i tą samą aproksymacją (4.77) daje wynik

$$u_1 = 1.01104 + 0.40317x^2 \quad (4.79)$$

W tab.4.3 porównano rozwiązania wariacyjne z rozwiązaniem dokładnym.

x	Rozw. dokł.	(4.68)	(4.67)	(4.78)	(4.79)
0.0	1.000	1.000	1.016	1.089	1.011
0.2	1.020	1.083	1.033	1.102	1.027
0.4	1.077	1.166	1.080	1.141	1.076
0.6	1.662	1.249	1.159	1.206	1.156
0.8	1.281	1.331	1.271	1.297	1.260
1.0	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414

Tabela 4.3. Porównanie liczbowe różnych rozwiązań problemu (4.63)

4.3.3. Metoda kollokacji punktowej

W metodzie kollokacji punktowej parametry c_i w aproksymacji $u_N = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$ są wyznaczone z warunku zerowania się residuum w N wybranych punktach \mathbf{x}^k ($k = 1, 2, \dots, N$), w obszarze Ω

$$R_N(\mathbf{x}^k, c_j, \Phi_j, f) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.80)$$

Dla liniowego równania operatorowego $Au = f$ otrzymamy równanie

$$\sum_{j=1}^N A(\Phi_j(\mathbf{x}^k))c_j - f(\mathbf{x}^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.81)$$

Równanie (4.81) może być zinterpretowane w formalizmie metody residuów ważonych w następujący sposób:

Niech $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$ oznacza funkcję Diraca o własności

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv f(\mathbf{x}^k)$$

wówczas równanie (4.81) może być przedstawione w formie alternatywnej jako

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[\int_{\Omega} A(\Phi_i(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) d\mathbf{x} \right] - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) d\mathbf{x} = 0 \quad (4.82)$$

Porównując równanie (4.82) z równaniem (4.53) staje się widoczne (dla $H = L_2(\Omega)$), że funkcja wagowa w tej metodzie jest dana wzorem

$$\Psi_k(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (4.83)$$

Właściwy wybór punktów kolokacji \mathbf{x}^k decyduje o dobrym uwarunkowaniu układu równań (4.81) i zbieżności rozwiązania aproksymacyjnego (na pewno powinny być równomiernie rozłożone w obszarze rozwiązania).

Przykład 4.12. Rozwiążemy ten sam problem brzegowy, który był już rozwiązywany w przykładach 4.6 i 4.10, przyjmując punkt kolokacji $x_1 = \frac{1}{2}$.

Rozwiązując równanie (4.81) obliczamy kolejno

$$A(\Phi_1(x_1)) = -\pi^2 \sin \pi x_1 + \sin \pi x_1 = -\pi^2 + 1$$

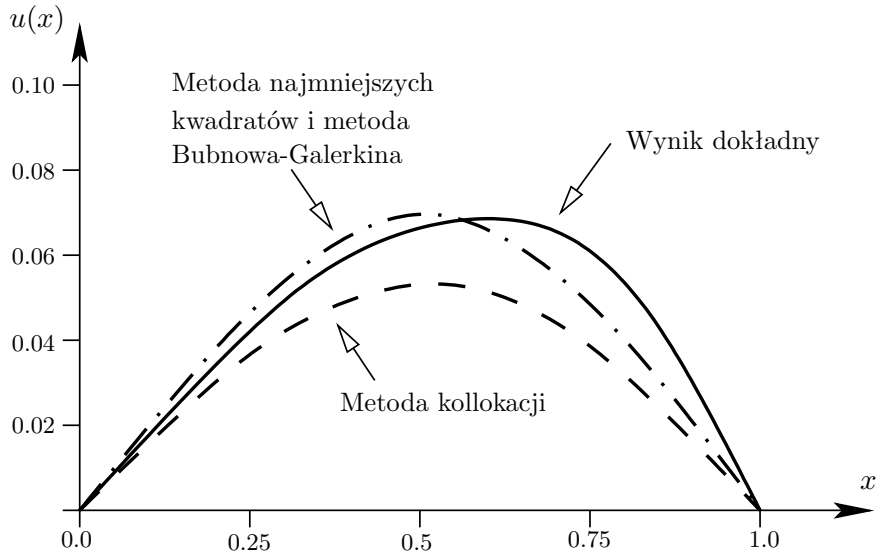
$$f(x_1) = -x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$A(\Phi_1(x_1))c_1 - f(x_1) = 0$$

lub

$$(-\pi^2 + 1)c_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2(\pi^2 - 1)} \cong 0.0564$$

Na rys. 4.6 przedstawiono graficznie wyniki obliczeń dokładnych oraz metodami: Bubnowa-Galerkina, najmniejszych kwadratów i kolokacji punktowej. Jak widać, w tym przykładzie metoda kolokacji punktowej jest najmniej dokładna.



Rys.4.6. Porównanie różnych metod residuów ważonych

Przykład 4.13. Rozważmy powtórnie problem brzegowy, który był rozwiązywany w przykładzie 4.6 metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmijmy dwa punkty kolokacji, $N = 2$, $x_1 = \frac{1}{4}$ i $x_2 = \frac{1}{2}$, oraz funkcje bazowe jak w przykładzie 4.6 przy rozwiązaniu problemu z dwoma stopniami swobody

$$\Phi_1(x) = x(1-x) \quad \Phi_2(x) = x^2(1-x)$$

Rozwiązujemy układ równań (4.81), korzystając z zapisu macierzowego

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} A(\Phi_1(x_1)) & A(\Phi_2(x_1)) \\ A(\Phi_1(x_2)) & A(\Phi_2(x_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + x_1 - x_1^2 & 2 - 6x_1 + x_1^2 - x_1^3 \\ -2 + x_2 - x_2^2 & 2 - 6x_2 + x_2^2 - x_2^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{29}{16} & \frac{35}{64} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{7}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} + 1$ oraz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań $\mathbf{Kc} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & \frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ma postać

$$c_1 = \frac{6}{31} \cong 0.1935 \quad c_2 = \frac{40}{217} \cong 0.1843$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$u_2(x) = x(1-x)(0.1935 + 0.1843x)$$

W tab.4.4 porównano rozwiązanie u_2 z rozwiązaniem dokładnym oraz obliczono residuum R_2 .

x	Rozw. dokł.	Rozw. przybl. u_2	Residuum R_2
0.10	0.0186	0.0191	-0.00995
0.50	0.0697	0.0714	0
0.90	0.0309	0.0324	-0.0815

Tabela 4.4. Porównanie wyników obliczeń w przykładzie 4.13

Porównując tablice 4.2 i 4.4 widzimy, że metoda Bubnowa-Galerkina jest znowu dokładniejsza (jednak obliczenia są bardziej pracochłonne, bo wymaga ona całkowania).

Przykład 4.14. Rozwiążmy belkę wolno podpartą z równomiernie rozłożonym obciążeniem f_0 , rozwiązywaną w przykładzie 4.5 metodą Rayleigha-Ritza.

Problem jest opisany równaniem różniczkowym (4.37a) z warunkami brzegowymi

$$w(0) = w(L) = 0 \quad \frac{d^2w}{dx^2}(0) = \frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0 \quad (4.84)$$

Przyjmijmy dwuparametrową aproksymację

$$w_2 = c_1 \sin \frac{\pi x}{L} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (4.85)$$

z punktami kolokacji $x_1 = \frac{L}{4}$ i $x_2 = \frac{L}{2}$.

Wykorzystanie wzoru (4.81) prowadzi do następującego układu: równań macierzowych:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A(\Phi_1(x_1)) & A(\Phi_2(x_1)) \\ A(\Phi_1(x_2)) & A(\Phi_2(x_2)) \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{4} & \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{4} \\ \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{2} & \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}$$

gdzie $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right)$ oraz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań $\mathbf{Kc} = \mathbf{F}$

$$EI \left[c_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{4} + c_2 \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{4} \right] = f_0$$

$$EI \left[c_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{3\pi}{2} \right] = f_0$$

ma postać

$$c_1 = \frac{(1 + \sqrt{2})f_0L^4}{2EI\pi^4} \quad c_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)f_0L^4}{162EI\pi^4}$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest funkcja

$$w_2(x) = \frac{f_0L^4}{162EI\pi^4} \left(195.55 \sin \frac{\pi x}{L} + 0.414 \sin \frac{3\pi x}{L} \right)$$

Zauważmy, że jeśli przyjęlibyśmy punkty kolokacji $x_1 = \frac{L}{3}$ i $x_2 = \frac{2L}{3}$, to nie moglibyśmy wyznaczyć c_2 . Z uwagi na symetrię belki przyjęcie $x_1 = \frac{L}{4}$ i $x_2 = \frac{L}{2}$ jest wystarczające. Ugięcie maksymalne $w_2\left(\frac{L}{2}\right) = 1.205 \frac{f_0L^4}{EI\pi^4} = \frac{f_0L^4}{80.87EI}$ jest różne o 5% od wartości dokładnej równej $\frac{f_0L^4}{76.8EI}$.

W innym wariantcie metody kollokacji, nazywanej *metodą kollokacji w podob-szarze*, żądamy spełnienia warunku zerowania się residuów w N podob-szarach, na które dzielimy obszar Ω . W takim postępowaniu błędy ujemne redukują się z błędami dodatnimi, co nie zawsze jest pożądane.

4.3.4. Metoda Trefftza

Charakterystyczną cechą metody Trefftza jest dobór funkcji bazowych. Dla równania Poissona (1.1) są nimi funkcje harmoniczne, czyli takie, które spełniają odpowiadające mu równanie jednorodne (Laplace'a). Funkcjami harmonicznymi są np. części: rzeczywista $u(x, y)$ i urojona $v(x, y)$ dowolnych analitycznych funkcji zespolonych

$$z(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (4.86)$$

gdzie i jest jednostką urojoną. Analityczność funkcji z_n oznacza, że są one różniczkowalne w pewnym otoczeniu każdego punktu dziedziny i że jest ona równoważna spełnianiu następujących warunków:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Przykładem wielomianowych funkcji analitycznych są elementy ciągu

$$z_n = (x + iy)^n \quad n = 0, 1, \dots$$

Części: rzeczywista i urojona funkcji z_n tworzą następujący ciąg wielomianów:

$$\{\Phi_n\} = \{1, x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, \dots\}$$

które mogą być funkcjami bazowymi w metodzie Trefftza.

Otrzymuje się wtedy T-kompletną bazę, czyli ciąg funkcji kompletnych, które dodatkowo spełniają równanie Laplace'a. Ciąg funkcji $\{\Phi_n\}$ jest kompletny, gdyż zachodzi dla niego warunek

$$\forall u : \nabla^2 u = 0, \forall \varepsilon > 0; \exists m \in N, \exists \{a_i\}, i = 1, \dots, m : \left\| u - \sum_{i=1}^m a_i \Phi_i \right\| \leq \varepsilon \quad (4.87)$$

Warunek ten oznacza, że każde rozwiązanie zagadnienia Poissona można przybliżyć z dowolną dokładnością za pomocą kombinacji liniowej

$$u_h(x, y) = \Phi_0(x, y) + a_1 \Phi_1(x, y) + a_2 \Phi_2(x, y) + \dots + a_m \Phi_m(x, y)$$

gdzie Φ_0 jest całką szczególną równania różniczkowego. Natomiast współczynniki a_1, a_2, \dots, a_m obliczyć można metodą kollokacji punktowej albo Bubnowa-Galerkina, tak aby spełnić warunki brzegowe.

Przykładowo biorąc cztery pierwsze funkcje bazowe i spełniając warunki brzegowe metodą Bubnowa-Galerkina

$$\int_{\Gamma} v(T - \bar{T}) ds = 0 \quad \forall v \in V$$

otrzymujemy dla zadania testowego układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{44}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{25}{30} \\ \frac{25}{30} \\ 0 \end{bmatrix}$$

którego rozwiązanie daje

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie w środku kwadratu, uzyskane w ten sposób, ma dokładność ośmiu cyfr.

W praktyce stosuje się podział całego obszaru na mniejsze podobszary i wtedy należy dodatkowo zapewnić spełnianie warunków zgodności na granicach podobszarów.

4.4. Uwagi o kompletności funkcji bazowych

Metody wariacyjne Rayleigha-Ritza i Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym są najczęściej wykorzystywane dla otrzymania rozwiązań przybliżonych, a w szczególności stanowią bazę dla metod komputerowych (MES, MEB, MB). W metodach tych funkcjami bazowymi są przeważnie wielomiany i jednym z kryterium doboru jest *warunek kompletności*. Problem ten występował już w przykładzie 4.1, ale teraz przedyskutujemy go dokładniej. Będzie on również omawiany w p.5.6.4 w odniesieniu do metody elementów skończonych.

We wcześniejszych rozważaniach wielokrotnie zwracaliśmy uwagę na to, że rozwiązanie dopuszczalne musi spełniać podstawowe warunki brzegowe. Jest to proste w przypadku zadań jednowymiarowych, w których przyjmujemy wielomian odpowiedniego stopnia i następnie, wykorzystując podstawowe warunki brzegowe, ustalamy postać rozwiązania dopuszczalnego.

Taka procedura postępowania zawodzi w problemach dwu- i trójwymiarowych. Rozważmy, na przykład, płytę prostokątną utwierdzoną na brzegu $x = 0$ i obciążoną siłą skupioną na brzegu swobodnym $x = L$ (oś x jest osią symetrii). Przyjmiemy, że przemieszczenie poziome płyty $u(x, y)$ aproksymowane jest wielomianem

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots$$

Spełnienie podstawowego warunku brzegowego $u(0, y) = 0$ prowadzi do równania

$$u(0, y) = a_0 + a_2y + a_5y^2 + \dots = 0$$

Jest to tylko jedno równanie i nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć współczynników, które by je spełniały. Jediną możliwością jest przyjęcie $a_0 = a_2 = a_5 = \dots = 0$. Co prawda pozwala to otrzymać rozwiązanie dopuszczalne, ale eliminacja wszystkich wyrazów z y na pewno da rozwiązanie aproksymacyjne złej jakości. Ten prosty przykład potwierdza fakt, że znalezienie odpowiednich rozwiązań dopuszczalnych jest największym kłopotem w klasycznych metodach wariacyjnych.

W szeregu przykładów, które rozwiązywaliśmy w tym rozdziale metodą Rayleigha-Ritza, lub jedną z metod residuów ważonych, rozwiązanie było zbieżne do rozwiązania dokładnego wraz ze zwiększaniem liczby składników rozwiązania dopuszczalnego. Jednym z wymagań zbieżności rozwiązania jest, aby funkcje bazowe aproksymacji były kompletne, to znaczy, aby zawierały wszystkie wyrazy występujące w rozwiązaniu dokładnym. Na przykład dla pręta z liniowym obciążeniem równomiernie rozłożonym wzdłuż osi pręta i z obciążeniem skupionym rozwiązaniem dokładnym jest wielomian stopnia trzeciego. Jeślibyśmy pominęli wyraz sześcienny i dodawali następne wyrazy wyższych stopni, to rozwiązanie może się polepszyć, lecz nigdy nie będzie zbieżne do rozwiązania dokładnego. Prześledźmy to dokładniej na przykładzie.

Przykład 4.15. Rozwiążemy problem brzegowy

$$u''(x) + x = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (4.88a)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (4.88b)$$

Sformułowanie wariacyjne Bubnowa-Galerkina tego problemu ma postać

$$\int_0^1 (-u'w' + wx) dx = 0 \quad (4.89)$$

Wielomian kompletny stopnia trzeciego

Przyjmując

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

otrzymamy z warunków brzegowych: $a_0 = 0$, $a_1 = -a_2 - a_3$, co prowadzi do funkcji dopuszczalnej

$$u(x) = a_3x^3 + a_2x^2 - a_2x - a_3x = (x^2 - x)a_2 + (x^3 - x)a_3 \quad (4.90)$$

Funkcja wagowa jest następująca:

$$w(x) = (x^2 - x)d_1 + (x^3 - x)d_2 \quad (4.91)$$

Wykorzystanie (4.90) i (4.91) w (4.89) prowadzi do układu dwóch równań

$$-4a_2 - 6a_3 = 1$$

$$-15a_2 - 24a_3 = 4$$

których rozwiązanie wynosi $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{6}$.

Rozwiązanie końcowe, które jest rozwiązaniem dokładnym, ma formę

$$u(x) = \frac{1}{6}(x - x^3)$$

Wielomian niekompletny stopnia czwartego

Przyjmując wielomian stopnia czwartego z pominiętym wyrazem liniowym

$$u(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

otrzymamy, po wykorzystaniu warunków brzegowych $a_0 = 0$, $a_2 = -a_3 - a_4$, funkcję dopuszczalną w formie

$$u(x) = a_4x^4 + a_3x^3 - a_3x^2 - a_4x^2 = (x^3 - x^2)a_3 + (x^4 - x^2)a_4 \quad (4.92)$$

Funkcja wagowa jest następująca:

$$w(x) = (x^3 - x^2)d_1 + (x^4 - x^2)d_2 \quad (4.93)$$

Wykorzystanie (4.92) i (4.93) w (4.89) daje układ dwóch równań

$$-8a_3 - 14a_4 = 3$$

$$-98a_3 - 176a_4 = 35$$

z rozwiązaniem $a_3 = -\frac{19}{18}$, $a_4 = \frac{7}{18}$.

Rozwiązanie końcowe ma postać

$$u(x) = \frac{1}{18}x^2(7x^2 - 19x + 12)$$

i nie jest oczywiście rozwiązaniem dokładnym. W tym prostym przykładzie rozwiązanie dokładne moglibyśmy uzyskać w prosty sposób, przyjmując funkcje bazowe (x, x^3) .

Rozdział 5

Metoda elementów skończonych

5.1. Uwagi wstępne – etapy rozwiązywania problemów za pomocą MES

Klasyczne metody wariacyjne, przedstawione w rozdziale 4, nie są efektywne przy rozwiązywaniu problemów o złożonej strukturze geometrycznej, z obciążeniami nieciągłymi, lub też opisujących nieciągłości materiału bądź własności geometryczne. W takich przypadkach dobór funkcji aproksymacyjnych jest trudnym, jeśli w ogóle możliwym, zadaniem. Jeżeli nawet takie funkcje zostałyby dobrane, to z kolei obliczanie współczynników macierzy równań algebraicznych rozwiązania przybliżonego nie może być zautomatyzowane, ponieważ funkcje aproksymacyjne zmieniają się zależnie od rozważanego problemu. Oznacza to, że poprawa efektywności stosowania metod wariacyjnych zależy od tego, czy możliwe jest przy rozwiązywaniu danej klasy problemów konstruowanie funkcji aproksymacyjnych dla dowolnych obszarów z wariacyjnie konsystentnymi warunkami brzegowymi. Takie możliwości stwarza metoda elementów skończonych (historia powstania tej metody jest długa i zaczyna się od R.Couranta, 1943 r.).

Metoda elementów skończonych MES jest procedurą wariacyjną, w której funkcje aproksymacyjne są wyznaczane w obszarze zastąpionym przez zbiór prostych podobszarów, na jakie obszar ten został podzielony. Układ równań algebraicznych problemu jest w tej metodzie generowany w odmienny sposób niż to ma miejsce w tradycyjnych metodach wariacyjnych, ponieważ funkcje

aproksymacyjne są zwykle wielomianami algebraicznymi, wyznaczonymi według zasad aproksymacji interpolacyjnej. Podobszary, nazywane elementami skończonymi, mają zwykle geometrycznie proste kształty, co ułatwia budowanie funkcji aproksymacyjnych. Ponieważ funkcje aproksymacyjne są wielomianami algebraicznymi, to możliwe jest zautomatyzowanie w maszynie cyfrowej (komputerze) obliczania współczynników macierzy równań algebraicznych. Jak dalej zobaczymy, proces budowy funkcji aproksymacyjnych jest niezależny od danych warunków brzegowych i innych danych definiujących rozwiązywany problem. Zgodnie z teorią interpolacji nieznane parametry, występujące w funkcjach aproksymacyjnych, przedstawiają wartości zmiennych, występujących w podstawowych warunkach brzegowych, w skończonej liczbie wcześniej ustalonych punktów elementu skończonego. Liczba tych punktów i ich rozmieszczenie w elemencie decyduje o stopniu i postaci funkcji aproksymacyjnych. Wszystko to powoduje, że metoda elementów skończonych w wyjątkowo dobry sposób nadaje się do obliczeń komputerowych dzięki łatwości jej zalgorytmizowania i, w konsekwencji, dzięki możliwości budowania programów komputerowych o bardzo ogólnym przeznaczeniu.

Podsumowując powyższe uwagi, rozwiązanie typowego problemu metodą elementów skończonych jest realizowane w następujących etapach:

1. **Podział obszaru na podobszary.** Wynikiem podziału jest zastąpienie obszaru zbiorem *elementów skończonych* (dyskretyzacja). Liczba, kształt i typ elementu zależą od obszaru i rozwiązywanego równania różniczkowego. Podstawowymi krokami w tym etapie są:
 - (a) Ustalenie liczby węzłów i elementów (patrz p.2a) tworzących tzw. *siatkę skończenie elementową*.
 - (b) Wygenerowanie współrzędnych węzłów siatki i utworzenie tablicy nazywanej *tablicą topologii* (lub incydencji), która zawiera relacje pomiędzy numerami elementów i numerami węzłów siatki (określenie miejsca elementu w siatce).
2. (a) **Wyznaczenie funkcji aproksymacyjnych dla elementu.** Dla każdego elementu w siatce ustalane są funkcje aproksymacyjne, konieczne do wariacyjnego rozwiązania. Funkcje te są w ogólności interpolacyjnymi wielomianami algebraicznymi wyrażonymi poprzez wartości funkcji interpolowanych (które są nieznane) w wybranych punktach, nazywanych *węzłami elementu*.

- (b) **Wariacyjna aproksymacja równań.** Przy wykorzystaniu funkcji wyznaczonych w p.2a i jedną z metod wariacyjnych (opisanych w rozdziale 4) zbudowanie dla elementu układu równań algebraicznych z niewiadomymi węzłowymi.
3. **Złożenie (agregacja) elementów.** Budowa układu równań dla wszystkich elementów siatki przy wykorzystaniu warunku ciągłości zmiennych węzłowych oznaczającego, że wartości tych zmiennych w węzle wspólnym dla dwóch lub więcej elementów są takie same. Etap ten można interpretować jako „wstawienie” elementów z powrotem do siatki, które w p.2a i p.2b były traktowane jako wyizolowane. W rezultacie otrzymujemy układ równań MES rozwiązania całego problemu.
 4. **Uwzględnienie warunków brzegowych.** Wprowadzenie podstawowych i naturalnych warunków brzegowych do zagregowanego układu równań.
 5. **Rozwiązanie równań.** Rozwiązanie układu równań algebraicznych ze względu na niewiadome węzłowe.
 6. **Obliczenie dodatkowych wielkości.** Przy wykorzystaniu wyznaczonych wielkości węzłowych obliczenie wartości funkcji rozwiązania i ich pochodnych w innych niż węzły punktach obszaru.

5.2. Podstawowe etapy procedury MES

5.2.1. Dyskretyzacja obszaru rozwiązania

Jak to stwierdziliśmy, jedną z cech odróżniających MES od klasycznych metod wariacyjnych jest zastąpienie obszaru rozwiązania przez układ prostych podobszarów. W wyniku takiego postępowania możemy łatwo obliczać pochodne funkcji interpolacyjnych dla prostych obszarów geometrycznych, jak linia, trójkąt, prostokąt, sześciąt itp. Drugą korzyścią jest, że ponieważ funkcje aproksymacyjne są zdefiniowane w elemencie, to dokładność aproksymacji może być polepszona przez zwiększenie liczby elementów (poprawianie siatki skończenie elementowej). Zastępowanie obszaru zbiorem elementów nazywamy *generowaniem siatki skończenie elementowej* lub *dyskretyzacją skończenie elementową* i zbiór ten oznaczamy przez Ω_h .

Powyższy opis dyskretyzacji może być zapisany zwięźle w terminach matematycznych.

Obszar z brzegiem $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ jest podzielony na skończoną liczbę N podobszarów $\bar{\Omega}^e$, nazywanych *elementami skończonymi*, w sposób zapewniający spełnienie następujących warunków:

1. Każdy obszar $\bar{\Omega}^e$ jest zwarty i niepusty.
2. Granica Γ^e każdego Ω^e jest ciągła w sensie Lipschitza (funkcje aproksymujące są wystarczająco różniczkowalne w elemencie z brzegiem wypukłym).
3. Część wspólna dowolnych dwóch oddzielnych elementów jest pusta, tzn.

$$\Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset \quad e \neq f$$

4. Złożenie $\bar{\Omega}_h$ wszystkich elementów $\bar{\Omega}^e$ jest równe (przynajmniej w przybliżeniu) obszarowi całkowitemu $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} \approx \bar{\Omega}_h = \sum_{e=1}^N \bar{\Omega}^e$$

5.2.2. Interpolacja w elemencie skończonym

W metodzie elementów skończonych funkcje aproksymacyjne są wyznaczone oddzielnie dla każdego elementu. Jeśli na przykład funkcje takie chcemy zbudować dla skończenia elementowej aproksymacji Rayleigha-Ritza lub dla metody Bubnowa-Galerkina w słabym sformułowaniu (sformułowaniu wariacyjnym), to muszą one spełniać podstawowe warunki brzegowe problemu, co nie jest jednakże możliwe, ponieważ brzeg obszaru jest utworzony z więcej niż z jednego elementu. Trudność tę pokonujemy przyjmując, że każdy oddzielny element jest możliwą reprezentacją całego obszaru z wszystkimi warunkami brzegowymi równania różniczkowego. Innymi słowy przyjmujemy, że dane równanie różniczkowe jest sformułowane i aproksymowane w każdym elemencie za pomocą jednej z metod wariacyjnych. Obydwa typy warunków brzegowych uwzględniamy jednocześnie w taki sposób, że podstawowe warunki brzegowe są wprowadzone do rozwiązania przez zastosowaną interpolację, natomiast naturalne warunki brzegowe są włączone do wariacyjnej postaci równania dla elementu.

Następnie, po zagregowaniu elementów w węzłach części brzegu, gdzie określone są podstawowe warunki brzegowe, podstawia się zadane wartości brzegowe (tzw. nałożenie warunków brzegowych).

W metodzie elementów skończonych funkcjami aproksymacyjnymi są wielomiany algebraiczne, co ułatwia dokładne numeryczne obliczanie współczynników macierzy i dowodzenie zbieżności aproksymacji skończonej elementowej. Minimalny stopień wielomianu przyjmowany do aproksymacji niewiadomych funkcji problemu zależy od rzędu rozwiązywanego równania różniczkowego i, z kolei, od stopnia wielomianu zależy liczba punktów interpolacji (*węzłów*) w elemencie.

Liczba węzłów zależy również od geometrycznego kształtu elementu. W ogólności liczba funkcji aproksymacyjnych n nie jest taka sama jak liczba węzłów m w elemencie ($n \geq m$). Funkcje aproksymacyjne nazywa się *funkcjami interpolacyjnymi*, ponieważ są one wyznaczone z warunków interpolacji funkcji, i ewentualnie ich pochodnych, w węzłach elementu. Węzły są umieszczane na brzegu elementu tak, aby mogły w jednoznaczny sposób zdefiniować geometrię elementu. Dodatkowo, jeśli tego wymaga interpolacja, mogą być też umieszczone w innych punktach brzegu lub we wnętrzu elementu. Węzły brzegowe umożliwiają również łączenie ze sobą elementów na podstawie warunku, że *pierwotnie stopnie swobody* (tzn. zmienne, które występują w podstawowych warunkach brzegowych) są takie same we wspólnych węzłach dowolnych dwóch elementów.

Oznaczmy dla każdego elementu Ω^e przez P_e przestrzeń skończonej wymiarową liniowo niezależnych *lokalnych* funkcji interpolacyjnych dla punktów węzłowych $\{N_i^e\}_{i=1}^n$. Te funkcje bazowe nazywamy w metodzie elementów skończonych *funkcjami kształtu*. W każdym elemencie $\bar{\Omega}^e \subset \bar{\Omega}_h$ funkcję aproksymacyjną u_e możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$u_e \approx u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e \quad (5.1)$$

gdzie współczynniki u_j^e są wartościami funkcji u i ewentualnie jej pochodnych w wybranych węzłach $\{\mathbf{x}_i^e\}_{i=1}^m$ elementu $\bar{\Omega}^e$. Współczynniki u_j^e nazywamy *elementowymi (lub lokalnymi) stopniami swobody*. W ogólności wymagamy, aby P_e zawierała przestrzeń wielomianów $\mathcal{P}_k(\bar{\Omega}^e)$ dla $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}^e$ stopnia $\leq k$. Inaczej mówiąc, funkcje bazowe N_i^e , $1 \leq i \leq n$, i *punkty węzłowe* \mathbf{x}_i^e , $1 \leq i \leq m$, wybieramy w taki sposób, aby kombinacja liniowa (5.1) była wielomianem stopnia $\leq k$ w $\bar{\Omega}^e$.

Wyznamy teraz dla przykłądu liniowe funkcje kształtu, które mają spełniać podstawowe warunki brzegowe w dwóch węzłach elementu. Na przykłąd, dla sformułowania słabego równania (3.24a) w elemencie, podstawowe warunki brzegowe przyjmują postać

$$u(x_e) = u_1^e \quad u(x_{e+1}) = u_2^e$$

gdzie x_e jest współrzędną węzła elementu Ω^e o numerze globalnym e , który w numeracji lokalnej elementu ma numer 1 (ten sam węzeł ma podwójną numerację!).

Funkcja liniowa spełniająca powyższe warunki jest następująca:

$$u_e = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \cdot u_1^e + \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \cdot u_2^e \equiv N_1^e u_1^e + N_2^e u_2^e = \sum_{i=1}^{n=2} u_i^e N_i^e \quad (5.2)$$

Oczywiście $u_e \in \mathcal{P}_1(\Omega^e) \subset P_e$, gdzie P_e jest przestrzenią funkcji $\{N_1^e, N_2^e\}$.

Układ równań algebraicznych wiążących u_i^e ($i = 1, 2, \dots, n$) zbudujemy, formułując najpierw dla elementu Ω^e równanie wariacyjne danego równania różniczkowego

$$B_e(v_e, u_e) = l_e(v_e) \quad (5.3)$$

dla każdego $v_e \in P_e$, gdzie B_e i l_e są odpowiednio formą dwuliniową i liniową. Podstawiając w równaniu (5.3) wzór (5.1) za u_e oraz przyjmując $v_e = N_i^e$, otrzymamy równanie dla elementu

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.4)$$

gdzie

$$K_{ij}^e = B_e(N_i^e, N_j^e) \quad F_i^e = l_e(N_i^e)$$

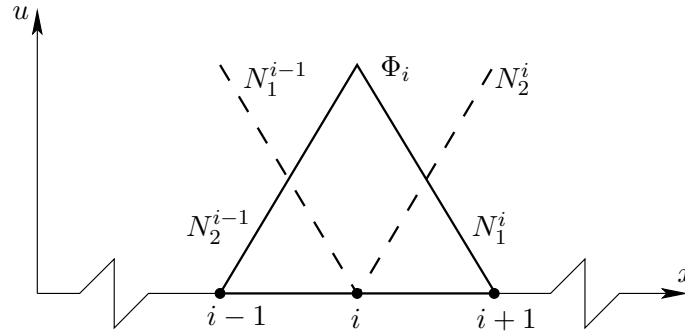
W mechanice macierz \mathbf{K}^e jest nazywana *macierzą sztywności*, a wektor kolumnowy \mathbf{F}^e *wektorem obciążenia*. Zauważmy, że w przypadku ogólnym pewne F_i^e nie są znane, ponieważ l_e zawiera nieznanne siły wewnętrzne, stąd równanie (5.4) nie może być rozwiązane na poziomie elementu.

5.2.3. Składanie rozwiązań z elementów skończonych

Wymaganie, aby w węzłach wspólnych dla sąsiednich elementów wartości węzłowych stopni swobody elementów były takie same pozwala zdefiniować ciągle, liniowo niezależne, globalne funkcje interpolacyjne $\{\phi_J\}_{J=1}^N$ ze zlokalizowanym i zwartym nośnikiem (tzn. funkcje te są niezerowe tylko wewnątrz małego regionu obszaru $\bar{\Omega}$)

$$u \approx u_h = \sum_{J=1}^N U_J \phi_J \quad (5.5)$$

gdzie U_J oznacza *globalny stopień swobody* w węźle globalnym J (o numerze globalnym J). Dla przykładu, jeśli obszar $\Omega = [0, L]$ jest podzielony na dziesięć podprzedziałów o długości $h = L/10$, to funkcje ϕ_i są dane wzorami (rys.5.1)



Rys.5.1. Funkcje kształtu i funkcja zlokalizowana w aproksymacji skończenie elementowej równania różniczkowego rzędu drugiego

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq (i-2)\frac{L}{10} \\ \frac{10x}{L} - (i-2) & (i-2)\frac{L}{10} \leq x \leq (i-1)\frac{L}{10} \\ i - \frac{10x}{L} & (i-1)\frac{L}{10} \leq x \leq \frac{iL}{10} \\ 0 & \frac{iL}{10} \leq x \leq L \end{cases}$$

Zauważmy, że $\phi_i(x)$ jest zdefiniowane przez dwie rozłączne lokalne funkcje kształtu $N_2^{i-1}(x)$ oraz $N_1^i(x)$. Przestrzeń utworzona przez zbiór liniowo niezależnych funkcji zlokalizowanych $\{\phi_I\}_{I=1}^N$ i oznaczona $S^h(\Omega_h)$ nazywa się *przestrzenią skończenie elementową*.

5.2.4. Istnienie i zbieżność rozwiązania skończenie elementowego

Z dotychczas przeprowadzonych rozważań wynika, że w metodzie elementów skończonych poszukujemy rozwiązania przybliżonego równania (4.1a) w formie

kombinacji liniowych funkcji (5.5), które definiują rodzinę skończenie wymiarowych podprzestrzeni S^h przestrzeni Hilberta H . Indeks h jest oznaczeniem pewnego parametru geometrycznego związanego z siatką skończenie elementową (zazwyczaj pewnego wymiaru elementu). W modelu skończenie elementowym poszukujemy takiej funkcji $u_h \in S^h$, że:

$$B(v_h, u_h) = l(v_h) \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (5.6)$$

Ten problem aproksymacyjny ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli $B(\bullet, \bullet)$ spełnia warunki twierdzenia Laxa-Milgrama w przestrzeni $S^h \times S^h$. Błąd aproksymacji $\varepsilon = u - u_h$ jest ortogonalny do przestrzeni S^h w sensie spełnienia warunku

$$B(\varepsilon, v_h) = 0 \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (5.7)$$

i spełnia nierówność

$$\|\varepsilon\|_H \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \|u - v_h\|_H \quad \text{dla każdego } v_h \in S^h \quad (5.8)$$

gdzie M i α_h są stałymi występującymi w twierdzeniu Laxa-Milgrama, gdzie H należy zastąpić przez S^h i u jest rozwiązaniem dokładnym.

Nierówność (5.8) jest wykorzystywana przy dowodzeniu zbieżności metody elementów skończonych. Z dowodu tego wynika, że błąd aproksymacji skończenie elementowej jest ograniczony przez normę $\|u - v_h\|_H$. Wielkość tej normy zależy od tego jak przestrzeń S^h jest bliska przestrzeni H . Jeśli S^h jest przestrzenią wielomianów interpolacyjnych funkcji u , to wówczas wielkość $\|u - v_h\|_H$ i przyrost zbieżności mogą być oszacowane w funkcji stopnia tych wielomianów. Przyrost zbieżności oraz stabilność rozwiązania aproksymacyjnego są zależne od zmiany α_h w funkcji parametru h .

Powiemy, że rodzina problemów dyskretnych (5.6) jest *zbieżna*, jeśli dla problemu (5.6) mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_H = 0 \quad (5.9)$$

Z kolei powiemy, że rozwiązanie skończenie elementowe u_h jest *zbieżne w sensie normy energetycznej* (tzn. w przestrzeni H_A) do rozwiązania dokładnego u , jeśli

$$\|u - u_h\|_A \leq ch^p \quad p > 0 \quad (5.10)$$

gdzie c jest stałą niezależną od u i u_h , a stała p określa rząd zbieżności.

Załóżmy, że skończenie elementowe funkcje interpolacyjne Φ_J , gdzie $J = 1, 2, \dots, N$, są kompletnymi wielomianami stopnia k , tzn., że dowolny wielomian aż do stopnia k może być przedstawiony dokładnie przez te funkcje. Wówczas można wykazać, że błąd obliczeń w przestrzeni $H_A = H^m(\Omega)$ spełnia nierówność

$$\|\varepsilon\|_m \equiv \|u - u_h\|_m \leq ch^p \quad p = k + 1 - m \quad (5.11)$$

Powyższe oszacowanie błędu implikuje, że błąd aproksymacji zmierza do zera z rzędem zbieżności k , jak h się zmniejsza (lub zwiększa się liczba elementów). Innymi słowy, log błędu w sensie normy energetycznej względem $\log h$ jest linią prostą o nachyleniu $(k + 1 - m)$. Im wyższy jest stopień funkcji interpolacyjnych, tym szybszy przyrost zbieżności. Zauważmy również, że błąd w sensie normy energetycznej zmierza do zera z przyrostem $(k + 1 - m)$, natomiast błąd w sensie normy L_2 nawet szybciej, bowiem z przyrostem $(k + 1)$ (innymi słowy, pochodne są wolniej zbieżne niż samo rozwiązanie). Można wykazać, że przyjmując do rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu ($m = 1$) liniowe (dwuwęzłowe) elementy skończone, oszacowanie błędu aproksymacji, tzn. (5.11) w sensie normy L_2 , wyraża nierówność

$$\|\varepsilon\|_0 = \|u - u_h\|_0 \leq c_1 h^2 \quad (5.12a)$$

natomiast w sensie normy energetycznej nierówność

$$\|\varepsilon\|_1 = \|u - u_h\|_1 \leq c_2 h \quad (5.12b)$$

gdzie c_1 i c_2 zależą tylko od długości obszaru rozwiązania L . Oszacowania te zweryfikujemy na prostym przykładzie.

Przykład 5.1. Rozważymy równanie różniczkowe

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \quad \text{dla } 0 < x < 1 \quad (5.13a)$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (5.13b)$$

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$u(x) = x(1 - x)$$

natomiast rozwiązania skończenie elementowe są (patrz szczegóły w p.5.3):

dla dyskretyzacji dwoma elementami, $h = \frac{1}{2}$

$$u_h = \begin{cases} h^2 \frac{x}{h}, & 0 \leq x \leq h \\ h^2 (2 - \frac{x}{h}), & h \leq x \leq 2h \end{cases}$$

dla dyskretyzacji trzema elementami, $h = \frac{1}{3}$

$$u_h = \begin{cases} 2h^2 (\frac{x}{h}), & 0 \leq x \leq h \\ 2h^2 (2 - \frac{x}{h}) + 2h^2 (\frac{x}{h} - 1), & h \leq x \leq 2h \\ 2h^2 (3 - \frac{x}{h}), & 2h \leq x \leq 3h \end{cases}$$

dla dyskretyzacji czterema elementami, $h = \frac{1}{4}$

$$u_h = \begin{cases} 3h^2 (\frac{x}{h}), & 0 \leq x \leq h \\ 3h^2 (2 - \frac{x}{h}) + 4h^2 (\frac{x}{h} - 1), & h \leq x \leq 2h \\ 4h^2 (3 - \frac{x}{h}) + 3h^2 (\frac{x}{h} - 2), & 2h \leq x \leq 3h \\ 3h^2 (4 - \frac{x}{h}), & 3h \leq x \leq 4h \end{cases}$$

Dla dwóch elementów ($h = 0.5$) błędy obliczymy ze wzorów:

norma L_2

$$\|\varepsilon\|_0^2 = \|u - u_h\|_0^2 = \int_0^h (x - x^2 - hx)^2 dx + \int_h^{2h} (x - x^2 - 2h^2 + xh)^2 dx = 0.002083$$

norma energetyczna

$$\|\varepsilon\|_1^2 = \left\| \frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right\|_1^2 = \int_0^h (1 - 2x - h)^2 dx + \int_h^{2h} (1 - 2x + h)^2 dx = 0.08333$$

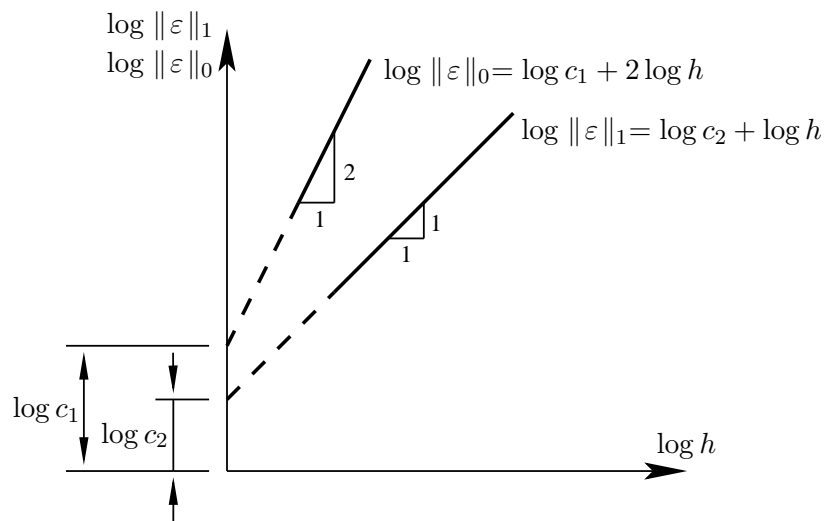
W tab.5.1 zestawiono wyniki takich obliczeń dla wszystkich trzech dyskretyzacji. Pokazane na rys.5.2 wykresy $\log \|\varepsilon\|_0$ i $\log \|\varepsilon\|_1$ w funkcji $\log h$ spełniają równania prostych

$$\log e_0 = 2 \log h + \log c_1, \quad \log e_1 = \log h + \log c_2$$

h	$\log h$	$\ \varepsilon\ _0$	$\log \ \varepsilon\ _0$	$\ \varepsilon\ _1$	$\log \ \varepsilon\ _1$
$\frac{1}{2}$	-0.301	0.004564	-1.341	0.2887	-0.5396
$\frac{1}{3}$	-0.477	0.020280	-1.693	0.1925	-0.7157
$\frac{1}{4}$	-0.601	0.011410	-1.943	0.1443	-0.8406

Tabela 5.1. Błędy w sensie normy L_2 i normy energetycznej rozwiązania problemu (5.13)

co oznacza, że zbieżność rozwiązania skończenie elementowego w sensie normy L_2 (dla rozwiązania) jest rzędu drugiego, a w sensie normy energetycznej (dla pochodnej) – pierwszego. Rząd zbieżności określa nachylenie odpowiednich prostych co weryfikuje oszacowania (5.12).



Rys.5.2. Wykresy błędów w sensie normy L_2 i normy energetycznej rozwiązania problemu (5.13)

Przedstawione powyżej oszacowanie błędu bywa wykorzystywane w obliczeniach MES, nie odpowiada jednakże na pytanie, kiedy należałoby przerwać poprawianie siatki skończenie elementowej. Jest to decyzja, którą powinien podejmować autor obliczeń, ponieważ tylko on wie, jaka jest dopuszczalna tolerancja dla rozwiązywanego problemu. Poprawianie siatki skończenie elemen-

towej stanowi trudne zadanie, ponieważ w większości rozwiązywanych problemów jest to na ogół konieczne tylko dla pewnych części obszaru rozwiązania. Obszary te są jednakże a priori nieznane i konieczne jest *podejście adaptacyjne*. Końcowy cel adaptacji to *polepszenie dokładności rozwiązania i przyspieszenie procesu obliczeń*. Ten ostatni cel jest szczególnie istotny w zastosowaniach MES do analizy problemów nieliniowych.

Metody adaptacji istniejącej siatki skończonej elementowej można podzielić na pięć podstawowych grup, a mianowicie:

1. *Adaptacja typu h*. Jest to intuicyjnie najprostsza metoda polegająca na poprawianiu wymiarów elementów w części obszaru lub w całym obszarze rozwiązania. W rezultacie topologia elementów i całkowita liczba stopni swobody mogą ulec zmianie, lecz nie zmieni się stopień wielomianu interpolacyjnego funkcji kształtu.
2. *Adaptacja typu p*. W tej metodzie liczba elementów pozostaje niezmienną, lecz zmianie ulega stopień wielomianów interpolacyjnych funkcji kształtu w elementach.
3. *Adaptacja typu r*. W tej prostej metodzie siatkę skończonej elementową adaptujemy, dokonując odpowiedniej relokacji węzłów. Topologia elementów i całkowita liczba stopni swobody pozostają niezmiennymi.
4. *Adaptacja typu s*. Jest to metoda aktualnie rozwijana, w której rozwiązanie otrzymuje się przez złożenie rozwiązań z oddzielnych podobszarów obszaru rozwiązania. W pierwszym kroku wykonuje się obliczenia, przyjmując rzadką siatkę. Następnie, po rozeznaniu spodziewanego rozwiązania, nakłada się dodatkową siatkę elementów w tych podobszarach, gdzie jest to konieczne dla polepszenia obliczeń i wykonuje się obliczenia powtórnie.
5. *Metody mieszane*. Przykładem takiej adaptacji może być *adaptacja typu hp*.

W dalszej części tego rozdziału podamy szereg przykładów ilustrujących zastosowanie metody elementów skończonych w analizie statycznej problemów sprężystych mechaniki ciała stałego. Pierwsze przykłady mają charakter bardziej ogólny i dotyczą rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego i czwartego ze zwróceniem uwagi na to, że równania te są modelem matematycznym dla rozwiązania konkretnego problemu mechaniki, np.

analizy statycznej kratownicy, belki zginanej czy też ramy. W sformułowaniu konkretnej procedury metody elementów skończonych ograniczymy się do modeli skończenie elementowych w sformułowaniu wariacyjnym (raczej tej nazwy będziemy używać, a nie dłuższej: metody Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym) i w sformułowaniu Rayleigha-Ritza. W obliczonych przykładach wykorzystamy, w ograniczonym co prawda zakresie, standardowy algorytm budowy i rozwiązania problemu metodą elementów skończonych. Inne problemy, które mogą być rozwiązywane metodą elementów skończonych, i bardziej zaawansowane algorytmy rozwiązania są przedmiotem literatury specjalistycznej i wybrane pozycje z tego zakresu zostały podane w literaturze do dalszego studiowania przedmiotu.

5.3. Równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

5.3.1. Model skończenie elementowy w sformułowaniu wariacyjnym

Metodę elementów skończonych zastosujemy do rozwiązania równania różniczkowego:

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (5.14)$$

gdzie współczynniki $a = a(x)$ i $f = f(x)$ są znanymi funkcjami. Celem naszym będzie obliczenie aproksymacji rozwiązania dokładnego $u(x)$, spełniającego równanie (5.14) i odpowiednie warunki brzegowe. Równanie typu (5.14) jest jednowymiarowym modelem matematycznym wielu problemów fizycznych, np. problemów analizy pręta rozciąganego, ustalonego przepływu ciepła wzdłuż pręta, czy też przepływu cieczy w ośrodku porowatym. Jeśli analizowanym problemem jest pręt rozciągany, to niewiadomą pierwotną $u(x)$ będzie przemieszczenie (wydłużenie) osi pręta, niewiadomą wtórną siła osiowa, a funkcje $a(x)$ i $f(x)$ – odpowiednio sztywnością pręta na rozciąganie EA (gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego, a E – modulem sprężystości Younga) i intensywności obciążenia rozłożonego wzdłuż osi pręta. Dla zachowania pewnej ogólności dopuścimy, że $a(x)$ może nie być funkcją ciągłą (np. skokowo zmienny przekrój poprzeczny) oraz że $f(x)$ również nie musi być ciągłą (w szczególnym przypadku nawet równa zero w pewnej części przedziału $0 \leq x \leq L$).

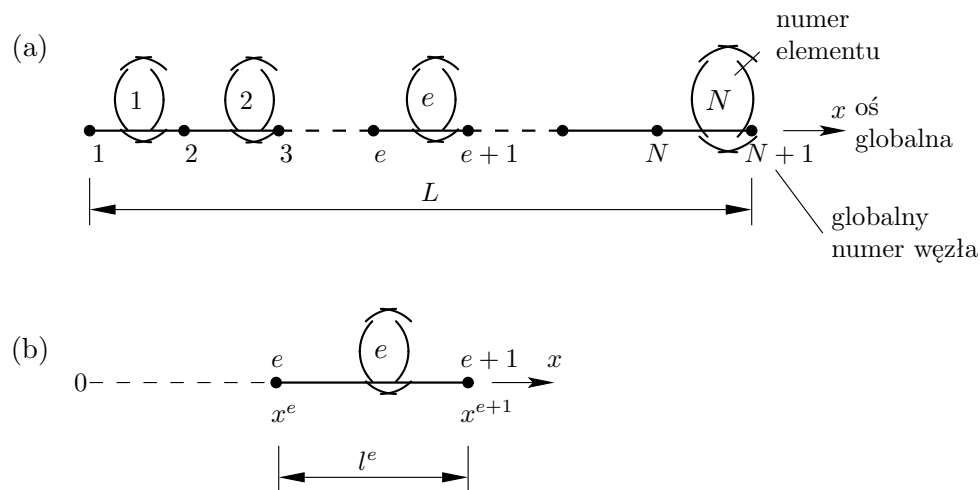
Rozważymy także dwa typy warunków brzegowych:

- *podstawowy*: dane u
- *naturalny*: dane $a \left(\frac{du}{dx} \right)$

Takie postawienie zadania oznacza poszukiwanie rozwiązania przybliżonego równania (5.14) dla każdego podprzedziału w $(0, L)$, w którym równanie ma ciągle współczynniki. Liczba tych podprzedziałów określa minimalną liczbę elementów skończonych, które musimy przyjąć do rozwiązania.

Etapy rozwiązania równania (5.14) metodą elementów skończonych są następujące:

1. Dyskretyzacja obszaru. Obszar $\Omega \equiv (0, L)$ dzielimy na zbiór liniowych elementów skończonych, rys.5.3a.



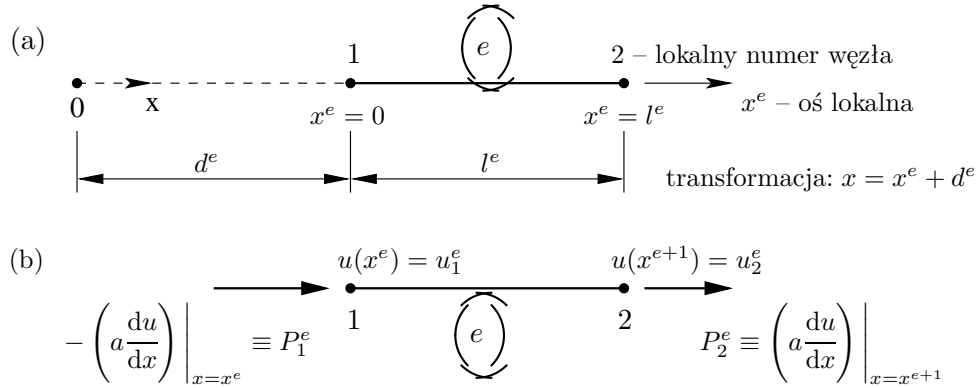
Rys.5.3. Skończenie elementowa dyskretyzacja obszaru liniowego $(0, L)$ (a), elementami liniowymi (b)

Element Ω^e jest zawarty pomiędzy węzłami e i $e+1$, co oznacza, że $\overline{\Omega^e} = [x_e, x_{e+1}]$, rys.5.3b. Długość elementu wynosi $l^e = x^{e+1} - x^e$.

2. Wyznaczenie równań MES dla elementów. Równanie MES dla elementu skończonego wyznaczymy, rozważając wariacyjną aproksymację równania (5.14) w elemencie e . Otrzymane równanie algebraiczne MES będzie wyrażało zależność pomiędzy węzłowymi *nieznanymi pierwotnymi* funkcji

u i węzłowymi *niewiadomymi wtórnymi* funkcji $P \equiv a \left(\frac{du}{dx} \right)$. Niewiadomymi pierwotnymi są wartości funkcji występujących w podstawowych warunkach brzegowych, natomiast niewiadome wtórne wynikają z postaci naturalnych warunków brzegowych.

Dla ułatwienia algorytmizacji obliczeń wygodnie jest wprowadzić tzw. *lokalny układ współrzędnych elementu* $x^e \in (0, l^e)$ oraz *lokalne numery węzłów* 1 i 2, rys.5.4.



Rys.5.4. Lokalny układ współrzędnych elementu (a) i niewiadome pierwotne i wtórne dla elementu (b)

Równanie MES będące modelem numerycznym równania (5.14) w elemencie skończonym wyznaczymy w trzech krokach.

a. Sformułowanie wariacyjne. Równanie (5.14) jest określone w przedziale $(0, L)$, jest więc również słuszne w elemencie Ω^e . Sformułowanie wariacyjne równania (5.14) w funkcji współrzędnej lokalnej x^e przyjmie postać

$$0 = \int_0^{l^e} v^e(x^e) \left[-\frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) - f^e(d^e + x^e) \right] dx^e =$$

$$= \int_0^{l^e} \left(a^e \frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - v^e(x^e) f^e(d^e + x^e) \right) dx^e + \left[v^e(x^e) \left(-a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) \right] \Big|_0^{l^e} \quad (5.15)$$

gdzie funkcję $u(x^e)$ w elemencie oznaczono przez $u^e(x^e)$ oraz $a^e = a^e(d^e + x^e)$,

gdzie d^e określa początek osi lokalnej x^e dla elementu e^1 . W ostatnim składniku po prawej stronie równania (5.15) występują podstawowe i naturalne warunki brzegowe dla węzłów $x^e = 0$ ($x = d^e$) i $x^e = l^e$ ($x = d^e + l^e$).

Wprowadzimy oznaczenia

$$u^e(x^e = 0) \equiv u_1^e \quad u^e(x^e = l^e) \equiv u_2^e \quad (5.16a)$$

$$\left(-a^e \frac{du^e}{dx^e}\right) \Big|_{x^e=0} \equiv P_1^e \quad \left(-a^e \frac{du^e}{dx^e}\right) \Big|_{x^e=l^e} \equiv -P_2^e \quad (5.16b)$$

Wykorzystując oznaczenia (5.16b), równanie (5.15) przyjmie formę wariacyjną

$$0 = \int_0^{l^e} \left[a^e \frac{dv^e du^e}{dx^e dx^e} - v^e(x^e) f^e(d^e + x^e) \right] dx^e - P_1^e v^e(0) - P_2^e v^e(l^e) \quad (5.17)$$

lub

$$0 = B^e(v^e, u^e) - l^e(v^e)$$

gdzie formy: dwuliniowa i liniowa są wyrażone wzorami

$$B^e(v^e, u^e) = \int_0^{l^e} a^e \frac{dv^e du^e}{dx^e dx^e} dx^e \quad (5.18)$$

$$l^e(v^e) = \int_0^{l^e} v^e f^e dx^e + v^e(0) P_1^e + v^e(l^e) P_2^e$$

b. Aproksymacja MES. Przyjmiemy teraz, że chcemy znaleźć rozwiązanie aproksymacyjne problemu (5.17) z warunkami brzegowymi (5.16a). Aproksymację $u^e(x^e)$ wyrazimy wzorem

$$u^e(x^e) = \sum_{j=1}^2 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{u}^e \quad (5.19)$$

gdzie:

¹Zauważmy, że zależnie od kontekstu x^e jest oznaczeniem osi lokalnej lub współrzędną globalną węzła o numerze globalnym e (wówczas $d^e \equiv x^e$).

$\mathbf{u}^e = \{u_1^e, u_2^e\}$ – wektor kolumnowy stopni swobody elementu (niewiadomych pierwotnych),

$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e), N_2^e(x^e)]$ – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Podstawiając (5.19) do równania (5.17) oraz przyjmując, że $v^e(x^e) \equiv v_i^e(x^e) = N_i^e(x^e)$, $i = 1, 2$, otrzymamy równanie macierzowe MES w formie

$$\mathbf{0} = \left[\int_0^{l^e} (\mathbf{N}'^e(x^e))^T a^e \mathbf{N}'^e(x^e) dx^e \right] \mathbf{u}^e + \left[\int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e(x^e))^T f^e(d^e + x^e) dx^e + P_1^e (\mathbf{N}^e(0))^T + P_2^e (\mathbf{N}^e(l^e))^T \right]$$

lub

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.20)$$

gdzie $(\bullet)^T$ oznacza transpozycję, a elementy macierzy \mathbf{K}^e i wektora \mathbf{F}^e wyrażają się wzorami

$$K_{ij}^e = \int_0^{l^e} a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \frac{dN_j^e}{dx^e} dx^e \quad i, j = 1, 2 \quad (5.21)$$

$$F_i^e = \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e + P_1^e N_i^e(0) + P_2^e N_i^e(l^e) \quad i = 1, 2$$

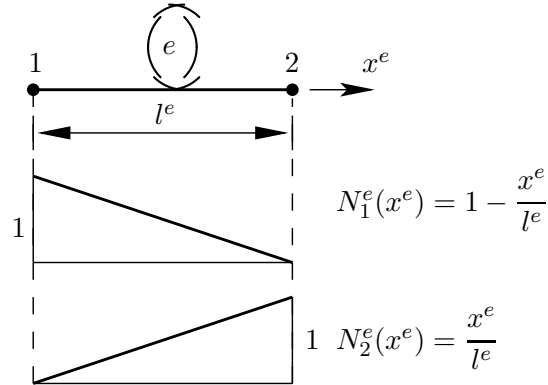
c. Obliczenie funkcji kształtu. Funkcje kształtu $N_i^e \in P_e$ muszą być tak dobrane, aby: (a) funkcja $u^e(x^e)$ była co najmniej klasy C^1 i spełniała podstawowe warunki brzegowe (5.16a); (b) $\{N_i^e(x^e)\}$, $i = 1, 2$, były liniowo niezależne; (c) $\{N_i^e(x^e)\}$, $i = 1, 2$, były funkcjami kompletnymi (patrz p.5.9.4). Warunki te są spełnione przez aproksymację liniową o postaci

$$u^e(x^e) = c_1^e + c_2^e x^e \quad (5.22)$$

Wymaganie, aby $u^e(x^e)$ spełniała podstawowe warunki brzegowe prowadzi do układu dwóch równań

$$u_1^e = c_1^e$$

$$u_2^e = c_1^e + c_2^e l^e$$



Rys.5.5. Liniowe funkcje kształtu Lagrange'a

Rozwiązanie tego układu równań daje wynik

$$c_1^e = u_1^e \quad \text{i} \quad c_2^e = \frac{u_2^e - u_1^e}{l^e} \quad (5.23)$$

Podstawiając (5.23) do (5.22) i porządkując współczynniki przy u_i^e , otrzymamy wzór

$$u^e(x^e) = \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) u_1^e + \frac{x^e}{l^e} u_2^e = \sum_{j=1}^2 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e(x^e) \mathbf{u}^e \quad (5.24a)$$

gdzie

$$N_1^e(x^e) = 1 - \frac{x^e}{l^e} \quad N_2^e(x^e) = \frac{x^e}{l^e} \quad 0 \leq x^e \leq l^e \quad (5.24b)$$

Funkcje kształtu wyrażone wzorami (5.24b) są *liniowymi wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a*, rys.5.5. Wykorzystanie (5.24b) we wzorze (5.21) na elementu wektora \mathbf{F}^e prowadzi do prostszego wzoru

$$F_i^e = \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e + P_i^e \quad i = 1, 2 \quad (5.25)$$

Podstawiając funkcje kształtu (5.24b) do wzorów (5.21) na K_{ij}^e i (5.25) na F_i^e oraz wykonując stosowne całkowanie, otrzymamy macierz \mathbf{K}^e i wektor \mathbf{F}^e dla elementu w postaci

$$\mathbf{K}^e = \frac{a^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^e = \frac{f^e l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

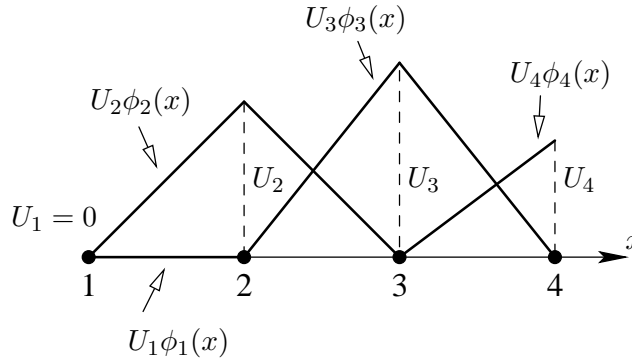
gdzie dodatkowo przyjęto, że a^e i f^e są stałymi w elemencie skończonym.

Przyjęta aproksymacja liniowa spełnia minimalne wymagania dotyczące ciągłości. Możliwe jest też przyjęcie aproksymacji wyższego rzędu przez dodanie do równania (5.22) wyższych potęg zmiennej x^e (nie pomijając jednakże potęg niższych, gdyż wówczas zostałby naruszony warunek kompletności). Konsekwencją tego jest powiększenie liczby węzłów w elemencie skończonym. Oznacza to, że istnieje zależność pomiędzy rzędem aproksymowanej funkcji u^e a liczbą węzłów w elemencie.

3. Agregacja (składanie) równań dla elementów. Celem uproszczenia dalszych rozważań założmy, że obszar rozwiązania $(0, L)$ został zdyskretyzowany trzema elementami skończonymi o nierównej długości. Na podstawie warunków ciągłości funkcji u możemy napisać, że

$$u_1^1 = U_1 \quad u_2^1 = u_1^2 = U_2 \quad u_2^2 = u_1^3 = U_3 \quad u_2^3 = U_4 \quad (5.27)$$

gdzie wprowadziliśmy *globalne stopnie swobody*, które zawarte są w wektorze $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, rys.5.6.



Rys.5.6. Globalne stopnie swobody i funkcje zlokalizowane

Relacje (5.27) nazywamy *warunkami ciągłości międzyelementowej*. Rozwiązanie globalne $u_h(x)$ wygodniej jest teraz zapisać w funkcji x , co prowadzi do wzoru

$$u_h(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^2 u_j^1 N_j^1(x) & x^1 \leq x \leq x^2 \\ \sum_{j=1}^2 u_j^2 N_j^2(x) & x^2 \leq x \leq x^3 \\ \sum_{j=1}^2 u_j^3 N_j^3(x) & x^3 \leq x \leq x^4 \end{cases} \quad (5.28)$$

Uwzględniając warunki (5.27) oraz że $u_h(x) \in S^h(\Omega_h) \subset H^1(\Omega)$, wyrazimy

funkcję $u_h(x)$ przez kombinację liniową funkcji zlokalizowanych $\{\Phi_I\}_{I=1}^N$

$$u_h(x) = \sum_{I=1}^N U_I \phi_I(x) \quad (5.29)$$

gdzie

$$\phi_I(x) = \begin{cases} N_2^{(I-1)}(x) & x_{I-1} < x < x_I \\ N_1^{(I)}(x) & x_I < x < x_{I+1} \end{cases} \quad (5.30)$$

Równania dla elementów złożymy w jeden system na podstawie warunku, że globalne sformułowanie wariacyjne jest sumą sformułowań wariacyjnych dla następujących elementów:

$$B(u_h, v_h) - l(v_h) = \sum_{e=1}^E [B^e(u^e, v^e) - l(v^e)] = 0 \quad (5.31)$$

gdzie E jest całkowitą liczbą elementów w siatce. Podstawiając

$$u^e = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e \quad \text{i} \quad v^e = \sum_{i=1}^n v_i^e N_i^e$$

do (5.31) i wykorzystując (5.27) dla u_j^e i v_i^e (zastępując U_i przez V_i dla v_i^e), otrzymamy

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e=1}^3 \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_i^e K_{ij}^e u_j^e - \sum_{i=1}^2 v_i^e F_i^e \right] = \\ &= v_1^1 (K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 - F_1^1) + v_2^1 (K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 - F_2^1) + \\ &+ v_1^2 (K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 - F_1^2) + v_2^2 (K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 - F_2^2) + \\ &+ v_1^3 (K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 - F_1^3) + v_2^3 (K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 - F_2^3) = \\ &= V_1 [K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 - F_1^1] + \\ &+ V_2 [K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + K_{12}^2 U_3 - (F_2^1 + F_1^2)] + \\ &+ V_3 [K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 - (F_2^2 + F_1^3)] + \\ &+ V_4 [K_{21}^3 U_3 + K_{22}^3 U_4 - F_2^3] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Równanie (5.31) jest słuszne dla dowolnej funkcji $v_h = \sum_{I=1}^N V_I \phi_I$, a to oznacza, że (5.32) jest ważne dla dowolnych $V_I, I = 1, 2, 3, 4$. W rezultacie

muszą być równe zero wszystkie współczynniki przy V_I , co prowadzi do układu czterech równań algebraicznych, które w zapisie macierzowym mają postać

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

lub

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.34)$$

Macierz \mathbf{K} nazywamy globalną macierzą sztywności, a wektor \mathbf{F} globalnym wektorem obciążenia. Macierz \mathbf{K} jest symetryczna i pasmowa.

Opisane postępowanie, prowadzące do macierzy \mathbf{K} i wektora \mathbf{F} , można sformalizować, wykorzystując *metodę agregacji symbolicznej*. W tym celu należy dla każdego elementu skończonego zdefiniować macierz zero-jedynkową \mathbf{Z}^e (o wymiarze: liczba stopni swobody elementu \times liczba stopni swobody systemu) taką, że ma miejsce tożsamość

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{Z}^e \mathbf{U} \quad (5.35)$$

co prowadzi do wzorów

$$\bar{\mathbf{K}}^e = (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Z}^e \quad \bar{\mathbf{F}}^e = (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (5.36)$$

oraz

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Z}^e \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^E (\mathbf{Z}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (5.37)$$

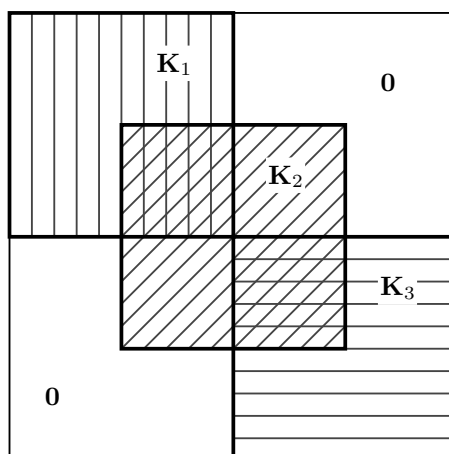
Wzory (5.37) mogą być traktowane jako symboliczne definicje procedury agregacji macierzy elementów \mathbf{K}^e i \mathbf{F}^e do macierzy globalnych systemu \mathbf{K} i \mathbf{F} . Metoda agregacji symbolicznej jest wysoce nieefektywna (macierze prostokątne \mathbf{Z}^e zawierają prawie same zera z niewielką liczbą jedynek) i zakres jej wykorzystania jest ograniczony do systemu z małą liczbą stopni swobody.

Znacznie lepszym sposobem, stosowanym w programowaniu metody elementów skończonych, jest skorzystanie z *metody agregacji bezpośredniej*. Metoda ta polega na wykorzystaniu tablicy topologii (incydencji) elementów skończonych. Istnienie tablicy topologii, wiążącej ze sobą numery węzłów z numerami elementów skończonych, jest cechą charakterystyczną metody elementów skończonych. W tym przykładzie ma ona postać pokazaną w tab.5.2.

Numer elementu skończonego	(1) Numer węzła początkowego	(2) Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Tabela 5.2. Tablica topologii

Przyjmijmy umowę, że węzeł początkowy ma numer niższy od numeru węzła końcowego i że w węźle początkowym jest zlokalizowany początek lokalnego układu współrzędnych elementu (nie jest to konieczne, lecz znacznie ułatwia np. późniejsze programowanie MES). W układzie współrzędnych lokalnych węzeł początkowy elementu ma zawsze numer 1, a węzeł końcowy numer 2, co zaznaczono w tab.5.2 liczbami (1) i (2). Wówczas proces agregacji można przedstawić graficznie w sposób pokazany na rys.5.7 oraz zapisać wzorem



Rys.5.7. Proces agregacji macierzy sztywności

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^3 \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e = \\
 &= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \\
 &\quad (5.38)
 \end{aligned}$$

gdzie A jest oznaczeniem operatora agregacji. Podobnie, na podstawie tablicy topologii, przebiega agregacja wektora \mathbf{F} .

4. Uwzględnienie warunków brzegowych. Macierz globalna \mathbf{K} jest osobliwa i rozwiązanie równania (5.34) wymaga uwzględnienia podstawowych warunków brzegowych w wektorze pierwotnych stopni swobody \mathbf{U} . Również i prawa strona (5.34) nie jest całkowicie znana przed nałożeniem warunków „równowagi” dla niewiadomych wtórnych (wtórnych stopni swobody). Zauważmy bowiem, że F_i^e jest sumą udziałów od funkcji $f(x)$ równania różniczkowego (5.14) i od niewiadomej wtórnej P_i^e . Niewiadome P_i^e są nieznane (w mechanice będą to siły reakcji), jednak ich suma w węźle jest znana, jeśli w tym węźle nie jest znana niewiadoma pierwotna i na odwrót.

Warunek *równowagi* oznacza, że suma P_2^e i P_1^{e+1} w węźle o numerze globalnym $(e+1)$ jest równa $a^e \left(\frac{du^e}{dx} \right)$, która to wartość w naszym zadaniu jest równa zero (w mechanice oznaczać to będzie brak siły skupionej w węźle)

$$\left(a^e \frac{du}{dx} \right)^+ \Big|_{x=x^{e+1}} - \left(a^e \frac{du}{dx} \right)^- \Big|_{x=x^{e+1}} \equiv P_2^e + P_1^{e+1} = 0 \quad (5.39)$$

5. Rozwiązanie układu równań. Układ równań (5.34) wygodnie jest przedstawić w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

gdzie:

\mathbf{U}_1 – wektor kolumnowy znanych pierwotnych stopni swobody,

\mathbf{U}_2 – wektor kolumnowy nieznanymi pierwotnych stopni swobody,

\mathbf{F}_1 – wektor kolumnowy nieznanymi wtórnych stopni swobody,

\mathbf{F}_2 – wektor kolumnowy znanych wtórnych stopni swobody.

Rozwiązaniem równania drugiego z (5.40) jest

$$\mathbf{U}_2 = (\mathbf{K}_{22})^{-1}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{U}_1) \quad (5.41)$$

Znając \mathbf{U}_2 z równania pierwszego (5.40), obliczymy \mathbf{F}_1 .

6. Rozwiązanie przybliżone. Rozwiązanie (5.41) wyznacza wartości nieznanej funkcji w węzłach. Można udowodnić, że jeśli w równaniu (5.14) współczynnik a jest stały, to rozwiązanie skończenie elementowe w węzłach będzie rozwiązaniem dokładnym (ta sama sytuacja pojawi się dla równania różniczkowego zwyczajnego czwartego rzędu). Często jednakże interesują nas również wartości funkcji i jej pochodnej w innych punktach obszaru zdyskretyzowanego elementami skończonymi. Wartości u_h dla dowolnego x obliczymy z wzoru (5.28). Na przykład, przyjmując $d^1 = 0$ dla $x = \alpha l^1, 0 < \alpha < 1$, mamy

$$u(\alpha l^1) = \frac{l^1 - \alpha l^1}{l^1} u_1^1 + \frac{\alpha l^1 - 0}{l^1} u_2^1 = (1 - \alpha)u_1^1 + \alpha u_2^1 \quad (5.42)$$

Podobnie, dla $x = l^1 + \alpha l^2$ z drugiego wzoru (5.28), obliczymy

$$u(l^1 + \alpha l^2) = (1 - \alpha)u_1^2 + \alpha u_2^2$$

Pochodną funkcji u_h obliczymy, różniczkując wzory (5.28)

$$\frac{du_h}{dx} = \sum_{j=1}^2 u_j^e \frac{dN_j^e}{dx} = \frac{u_2^e - u_1^e}{l^e} \quad \text{dla} \quad x^e < x < x^{e+1} \quad (5.43)$$

Z powyższego wzoru wynika, że pochodna funkcji jest stała w każdym elemencie. Brak ciągłości pochodnej $\frac{du_h}{dx}$ w węzłach wynika z przyjętej interpolacji Lagrange'a, niezależnie od stopnia wielomianu interpolacyjnego. W literaturze takie rozwiązanie jest nazywane *rozwiązaniem ze słabą nieciągłością*. W mechanice oznaczać to będzie, że rozwiązanie dla przemieszczeń jest ciągłe, natomiast wystąpi skok w polu odkształceń. Ten ważny problem przedyskutujemy w poniższym przykładzie.

Przykład 5.2. Rozważmy problem z przykładu 4.1. Równanie (4.9) jest specjalnym przypadkiem (5.14) dla $L = 1, a = 1$ i $f = \cos \pi x, 0 \leq x \leq 1$. Macierz \mathbf{K}^e dana jest wzorem (5.26) z $a^e = 1$ dla wszystkich elementów e . Wektor kolumnowy \mathbf{F}^e obliczymy z wzoru (5.25)

$$F_i^e = \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) N_i^e(x^e) dx^e + P_i^e = f_i^e + P_i^e$$

stąd mamy

$$\begin{aligned}
 f_1^e &= \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) dx^e = \\
 &= \frac{\sin \pi(d^e + l^e)}{\pi} - \frac{\sin \pi d^e}{\pi} - \cos \pi d^e \left(\frac{\cos \pi l^e}{\pi^2 l^e} + \frac{\sin \pi l^e}{\pi} - \frac{1}{\pi^2 l^e}\right) + \\
 &+ \sin \pi d^e \left(\frac{\sin \pi l^e}{\pi^2 l^e} - \frac{\cos \pi l^e}{\pi}\right) \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2^e &= \int_0^{l^e} \cos \pi(d^e + x^e) \frac{x^e}{l^e} dx^e = \\
 &= \cos \pi d^e \left(\frac{\cos \pi l^e}{\pi^2 l^e} + \frac{\sin \pi l^e}{\pi} - \frac{1}{\pi^2 l^e}\right) - \sin \pi d^e \left(\frac{\sin \pi l^e}{\pi^2 l^e} - \frac{\cos \pi l^e}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

Przyjmując dyskretyzację czterema równymi elementami skończonymi, $l^e = 0.25$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \text{element 1: } & d^1 = 0, & f_1^1 &= 0.1187, & f_2^1 &= 0.1064 \\
 \text{element 2: } & d^2 = 0.25, & f_1^2 &= 0.0615, & f_2^2 &= 0.0317 \\
 \text{element 3: } & d^3 = 0.5, & f_1^3 &= -0.0317, & f_2^3 &= -0.0615 \\
 \text{element 4: } & d^4 = 0.75, & f_1^4 &= -0.1064, & f_2^4 &= -0.1187
 \end{aligned}$$

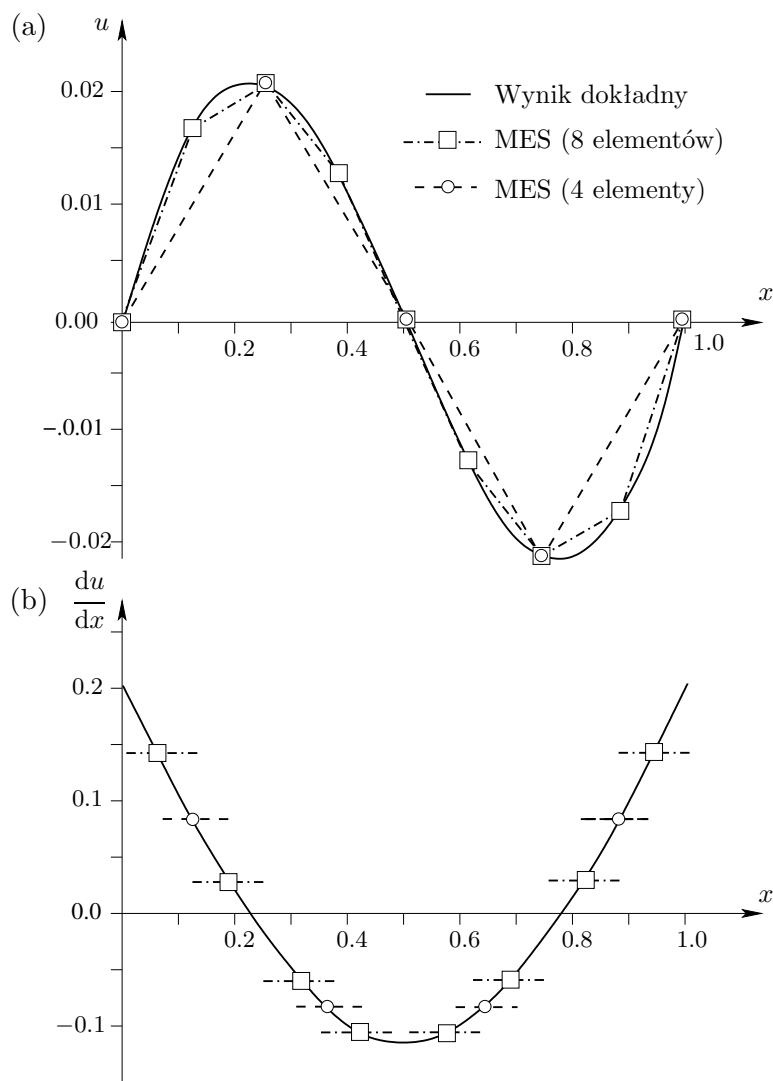
Układ równań (5.33) ma postać

$$\frac{1}{0.25} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 + P_1^3 \\ P_2^3 + P_1^4 \\ P_2^4 \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

Powyższy układ równań rozwiążemy dla trzech typów warunków brzegowych:

1. *Warunki brzegowe Dirichleta:* $u(0) = u(1) = 0$. Te warunki brzegowe oznaczają, że $U_1 = U_5 = 0$. Dodatkowo spełnione muszą być warunki równowagi

$$P_2^1 + P_1^2 = 0 \quad P_2^2 + P_1^3 = 0 \quad P_2^3 + P_1^4 = 0 \tag{5.46}$$



Rys.5.8. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (4.9) z warunkami brzegowymi Dirichleta $u(0) = u(1) = 0$

Wykorzystując powyższe warunki w równaniu (5.45), obliczenie niewiadomych pierwotnych sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1679 \\ 0 \\ -0.1679 \end{bmatrix}$$

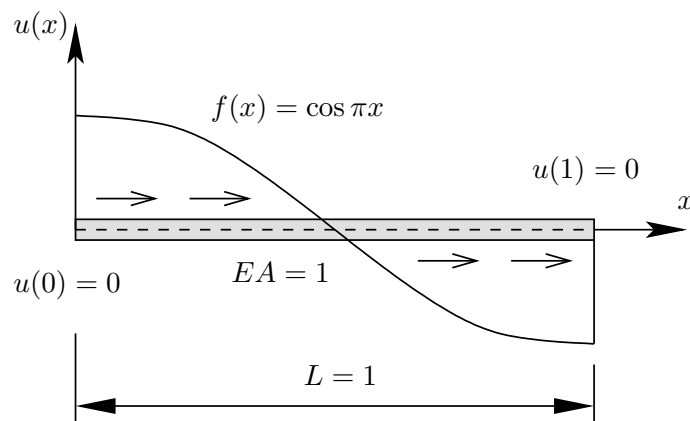
Wynikiem jest $U_2 = -U_4 = 0.02098$, $U_3 \cong 0.0$, co odpowiada rozwiązaniu dokładnemu dla $x = 0.25, 0.5$ i 0.75 . Niewiadome wtórne obliczymy z pierwszego i piątego równania (5.45): $P_1^1 = -4U_2 - 0.1187 = -0.20262$, $P_2^4 = -4U_4 + 0.1187 = 0.20262$.

Na rys.5.8a porównano rozwiązanie otrzymane dla czterech i ośmiu elementów skończonych z rozwiązaniem dokładnym. Na rys.5.8b porównano natomiast pierwsze pochodne otrzymanych rozwiązań. Z analizy tych rysunków wynika, że chociaż wartości $u(x)$ w węzłach obliczonych za pomocą MES są dokładne, to jednak w innych punktach obszaru błąd jest znaczny. Błąd ten można zmniejszyć, zwiększając liczbę elementów skończonych. Pochodna $\frac{du}{dx}$ jest stała w elementach skończonych i w środku elementów jej wartość jest dokładna. Założone warunki równowagi na granicach między elementami (5.46) nie są oczywiście spełnione, ponieważ rozwiązanie skończenie elementowe jest odcinkowo liniowe. Warunki te będą spełnione tylko w szczególnym przypadku $f(x) = 0$ (i $a(x) = \text{const}$), kiedy rozwiązanie MES będzie rozwiązaniem dokładnym.

Otrzymane rozwiązanie można jeszcze inaczej zinterpretować, jeśli równaniu (5.14) nadamy sens fizyczny. Jeśli $a(x) = EA(x)$ jest sztywnością pręta na rozciąganie, gdzie E jest modułem Younga, $A(x)$ jest funkcją przekroju poprzecznego pręta, a $f(x)$ – intensywnością obciążenia równoległego do osi pręta, to $u(x)$ będzie przemieszczeniem osi pręta i równanie (5.14), wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, będzie modelem matematycznym problemu analizy pręta rozciąganego (lub ściskanego, lecz bez możliwości wyboczenia).

W tym przykładzie mamy, że $EA = 1$, $f = \cos \pi x$ i długość pręta wynosi $L = 1$. Na rys. 5.9 pokazano rozważany pręt wraz z obciążeniem i warunkami brzegowymi.

Obliczymy teraz funkcje przemieszczeń $u(x)$ w każdym z elementów skończonych i pochodne $du(x)/dx$ (patrz też rys. 5.8). Zauważmy, że

Rys.5.9. Pręt rozciągany z warunkami brzegowymi Dirichleta $u(0) = u(1) = 0$

ponieważ $EA = 1$, to pochodne te wyrażają siły podłużne w elementach skończonych: $S(x) = EA \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$.

Element 1

$$u^1(x^1) = (1 - 4x^1) \cdot 0 + 4x^1 \cdot 0.02098 = 0.08392x^1, \quad x^1 \in [0 \ 0.25]$$

$$S_1 = \frac{du^1}{dx^1} = 0.08392$$

Element 2

$$u^2(x^2) = (1 - 4x^2) \cdot 0.02098 + 4x^2 \cdot 0 = 0.02098 - 0.08392x^2, \quad x^2 \in [0 \ 0.25]$$

$$S_2 = \frac{du^2}{dx^2} = -0.08392$$

Element 3

$$u^3(x^3) = (1 - 4x^3) \cdot 0 - 4x^3 \cdot 0.02098 = -0.08392x^3, \quad x^3 \in [0 \ 0.25]$$

$$S_3 = \frac{du^3}{dx^3} = -0.08392$$

Element 4

$$u^4(x^4) = -(1 - 4x^4) \cdot 0.02098 + 4x^4 \cdot 0 = -0.02098 + 0.08392x^4, \quad x^4 \in [0 \ 0.25]$$

$$S_4 = \frac{du^4}{dx^4} = 0.08392$$

Niespełnienie warunków równowagi na granicach między elementami jest rezultatem skupienia obciążenia w węzłach i jakość rozwiązania możemy poprawić, zwiększając liczbę elementów skończonych.

Pytanie, które obecnie postawimy to, czy możliwe jest jednakże poprawne obliczenie siły podłużnej bez powiększania liczby elementów skończonych? Odpowiedź jest twierdząca, ponieważ możemy skorzystać z równań równowagi MES dla elementu skończonego (5.20), które uwzględniają rzeczywisty rozkład obciążenia w tym elemencie.

Wykonajmy stosowne obliczenia dla każdego z elementów skończonych.

Element 1

Równania równowagi MES

$$P_1^1 = K_{11}^1 \cdot U_1 + K_{12}^1 \cdot U_2 - f_1^1 = 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0.02098 - 0.1187 = -0.20262$$

$$P_2^1 = K_{21}^1 \cdot U_1 + K_{22}^1 \cdot U_2 - f_2^1 = -4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.02098 - 0.1064 = -0.02248$$

Wykorzystując wzory (5.16b), możemy napisać, że

$$S_1^1 = -P_1^1 = 0.20262 \quad S_2^1 = P_2^1 = -0.02248$$

Wynik dokładny otrzymamy, różniczkując wzór (4.11)

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2}$$

skąd mamy

$$\frac{du}{dx}(0) = 0.20264 \quad \frac{du}{dx}(0.25) = -0.02244$$

Element 2

Równania równowagi MES

$$P_1^2 = K_{11}^2 \cdot U_2 + K_{12}^2 \cdot U_3 - f_1^2 = 4 \cdot 0.02098 - 4 \cdot 0 - 0.0615 = 0.02242$$

$$P_2^2 = K_{21}^2 \cdot U_2 + K_{22}^2 \cdot U_3 - f_2^2 = -4 \cdot 0.02098 + 4 \cdot 0 - 0.0317 = -0.11562$$

$$S_1^2 = -P_1^2 = -0.02242 \qquad S_2^2 = P_2^2 = -0.11562$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0.25) = -0.02244 \qquad \frac{du}{dx}(0.5) = -0.11567$$

Element 3

Równania równowagi MES

$$P_1^3 = K_{11}^3 \cdot U_3 + K_{12}^3 \cdot U_4 - f_1^3 = 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0.02098 + 0.0317 = 0.11562$$

$$P_2^3 = K_{21}^3 \cdot U_3 + K_{22}^3 \cdot U_4 - f_2^3 = -4 \cdot 0 - 4 \cdot 0.02098 + 0.0615 = -0.02242$$

$$S_1^3 = -P_1^3 = -0.11562 \qquad S_2^3 = P_2^3 = -0.02242$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0.5) = -0.11567 \qquad \frac{du}{dx}(0.75) = -0.02244$$

Element 4

Równania równowagi MES

$$P_1^4 = K_{11}^4 \cdot U_4 + K_{12}^4 \cdot U_5 - f_1^4 = -4 \cdot 0.02098 - 4 \cdot 0 + 0.1064 = 0.02248$$

$$P_2^4 = K_{21}^4 \cdot U_4 + K_{22}^4 \cdot U_5 - f_2^4 = 4 \cdot 0.02098 + 4 \cdot 0 + 0.1187 = 0.20262$$

$$S_1^4 = -P_1^4 = -0.02248 \qquad S_2^4 = P_2^4 = 0.20262$$

Wynik dokładny

$$\frac{du}{dx}(0.75) = -0.02244 \qquad \frac{du}{dx}(1.00) = 0.20262$$

Wnioski z przeprowadzonych obliczeń są bardzo znaczące, bowiem z nich wynika, że wykonując obliczenia dla poszczególnych elementów skończonych otrzymujemy poprawne wielkości sił podłużnych w węzłach i spełnione zostają w tych węzłach warunki równowagi. Jest to sposób obliczeń, który ma swoje uzasadnienie w mechanice konstrukcji prętowych.

2. *Mieszane warunki brzegowe:* $u(0) = u'(1) = 0$. Warunki te implikują, że $U_1 = 0$ i $P_2^4 = 0$. Obowiązują też dalej warunki równowagi (5.46).

Niewiadome pierwotne obliczymy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1679 \\ 0 \\ -0.1679 \\ -0.1187 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie wynosi $U_2 = -0.02968$, $U_3 = -0.10132$, $U_4 = -0.17297$, $U_5 = -0.20264$, co jest rozwiązaniem dokładnym w węzłach. Niewiadomą wtórną obliczymy z pierwszego równania (5.45)

$$P_1^1 = -4U_2 - 0.1187 \cong 0$$

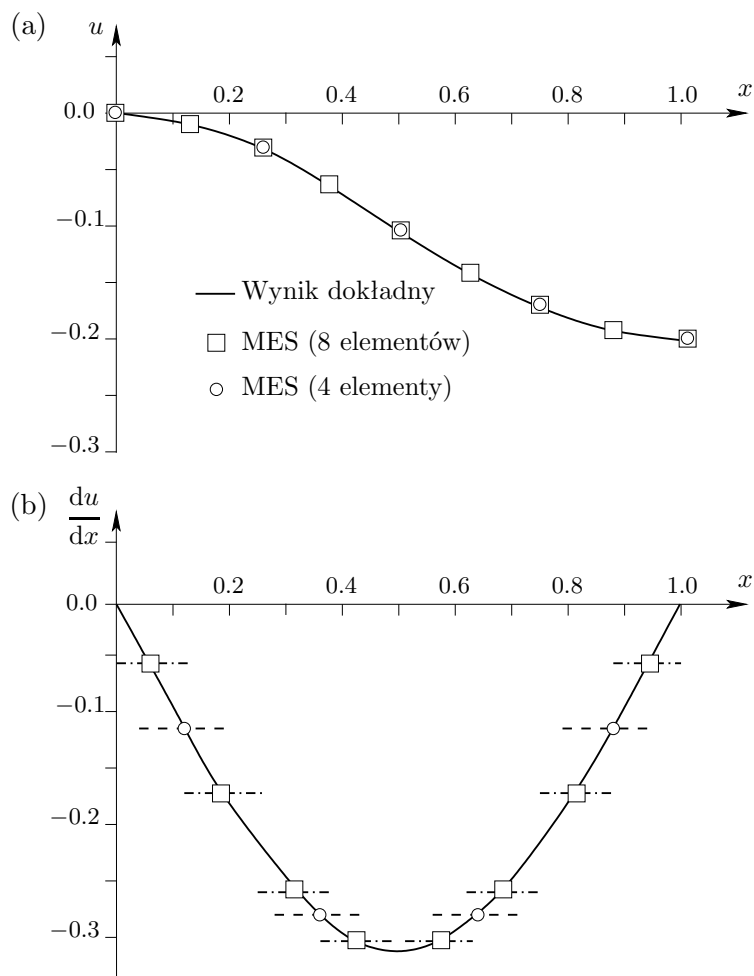
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys.5.10. Z rys.5.10a wynika, że dla tego przypadku warunków brzegowych już dyskretyzacja czterema elementami skończonymi daje rozwiązanie prawie dokładne we wszystkich punktach.

3. *Warunki brzegowe Neumanna:* $u'(0) = u'(1) = 0$. Te warunki brzegowe oznaczają, że $P_1^1 = P_2^4 = 0$. Dodatkowo, dalej obowiązują warunki brzegowe (5.46). W efekcie mamy, że wektor \mathbf{P} jest wektorem zerowym, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. W tym przypadku równanie (5.45) nie może być rozwiązane, ponieważ macierz \mathbf{K} jest osobliwa. Rozwiązanie otrzymamy, przyjmując dowolną stałą za jedną z niewiadomych pierwotnych, np. $U_3 = 0$.

Wprowadzenie tego warunku do (5.45) prowadzi do rozwiązania układu równań w formie:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1187 \\ 0.1679 \\ -0.1679 \\ -0.1187 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie wynosi: $U_1 = -U_5 = 0.10132$, $U_2 = -U_4 = 0.071645$, co znowu jest rozwiązaniem dokładnym w węzłach. Wyniki obliczeń pokazano na rys.5.11. Wykres pochodnej $\frac{du}{dx}$ jest taki sam jak na rys.5.10b.

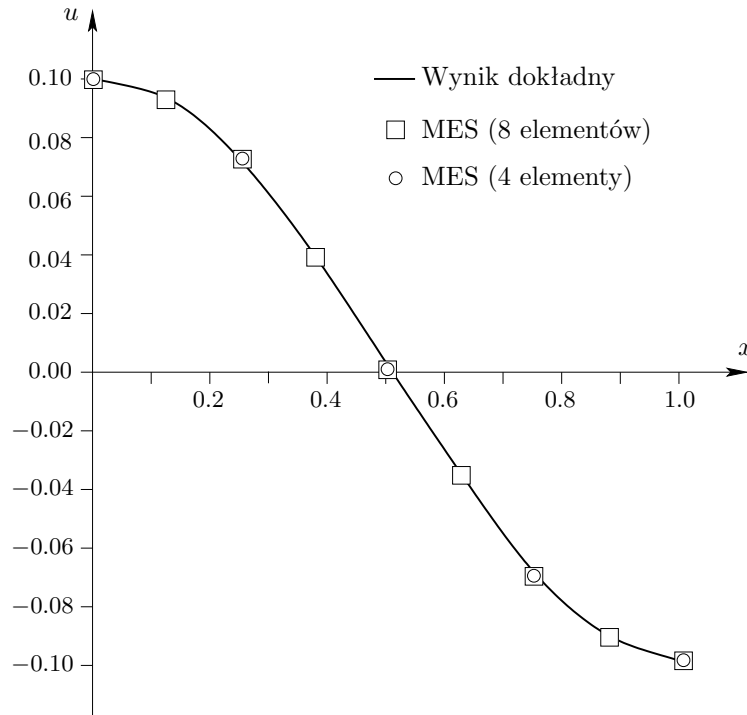


Rys.5.10. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (4.9) z mieszanymi warunkami brzegowymi $u(0) = u'(1) = 0$

Na zakończenie tego przykładu przypomnijmy, że dokładność aproksymacji skończenie elementowej może być poprawiana przez powiększenie liczby elementów lub podniesienie stopnia wielomianu interpolacyjnego. Jeśli np. przyjmujemy

$$u^h(x^e) = c_1^e + c_2^e x^e + c_3^e (x^e)^2 \quad (5.47)$$

to doprowadzi to do elementu trójwęzłowego z kwadratowymi funkcjami kształtu Lagrange'a.



Rys.5.11. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym równania (4.9) z warunkami brzegowymi Neumanna $u'(0) = u'(1) = 0$

Przykład 5.3. Rozważmy równanie czwartego rzędu (4.37), będące modelem matematycznym problemu zginania belki. Równanie to rozwiążemy dla zilustrowania tzw. *mieszanej metody elementów skończonych*. W tym celu równanie (4.37) zastąpimy dwoma równaniami drugiego rzędu w postaci

$$\frac{M}{EJ} = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = f \quad \text{dla } 0 < x < L \quad (5.48)$$

Model skończenie elementowy dla równań (5.48) otrzymamy, formułując równanie wariacyjne dla elementu $\Omega^e = (x^e, x^{e+1})$. Rozważmy najpierw pierwsze równanie. Mnożąc to równanie przez funkcję testową v_1^e i całkując przez części w obszarze Ω^e otrzymamy (w tym przykładzie nie będziemy wprowadzać lokalnego układu współrzędnych)

$$0 = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \left(\frac{dv_1^e}{dx} \frac{dw^e}{dx} + \frac{1}{b^e} v_1^e M^e \right) dx - P_1^e v_1^e(x^e) - P_2^e v_1^e(x^{e+1}) \quad (5.49)$$

gdzie $b^e = E^e I^e$, $P_1^e = -\frac{dw^e}{dx}(x^e)$ i $P_2^e = \frac{dw^e}{dx}(x^{e+1})$.

Podobnie z drugiego równania mamy

$$0 = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \left(\frac{dv_2^e}{dx} \frac{dM^e}{dx} + v_2^e f^e \right) dx - Q_1^e v_2^e(x^e) - Q_2^e v_2^e(x^{e+1}) \quad (5.50)$$

gdzie v_2^e jest funkcją testową, $Q_1^e = -\frac{dM^e}{dx}(x^e)$ i $Q_2^e = \frac{dM^e}{dx}(x^{e+1})$. Zauważmy, że równania (5.49) i (5.50) są sprzężone. Model skończenie elementowy otrzymamy, interpolując funkcje w^e i M^e w elemencie Ω^e . Z postaci równań (5.49) i (5.50) (w szczególności z postaci drugich składników w wyrażeniu pod całkami) wynika, że funkcja testowa v_1^e powinna być interpolowana przez te same funkcje co M^e , a funkcja testowa v_2^e przez te same funkcje co w^e .

Podstawiając

$$w^e = \sum_{j=1}^n w_j^e N_j^{1e} \quad M^e = \sum_{j=1}^n M_j^e N_j^{2e} \quad v_1^e = N_i^{2e} \quad v_2^e = N_i^{1e} \quad (5.51)$$

do (5.49) i (5.50), dostaniemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^e \mathbf{w}^e + \mathbf{B}^e \mathbf{M}^e &= \mathbf{P}^e \\ (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{M}^e &= \mathbf{f}^e + \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (5.52)$$

gdzie

$$A_{ij}^e = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \frac{dN_i^{2e}}{dx} \frac{dN_j^{1e}}{dx} dx \quad B_{ij}^e = \int_{x^e}^{x^{e+1}} \frac{1}{b^e} N_i^{2e} N_j^{2e} dx \quad f_i^e = - \int_{x^e}^{x^{e+1}} f^e N_i^{1e} dx \quad (5.53)$$

Macierz \mathbf{A}^e nie jest w ogólności macierzą kwadratową. Przyjmując liniowe funkcje kształtu, $N_i^{1e} = N_i^{2e} = N_i^e$, otrzymamy

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^e = \frac{l^e}{6b^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Układ równań (5.52) dla elementu skończonego można napisać w formie

$$\frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2\alpha^e & -1 & \alpha^e \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha^e & 1 & 2\alpha^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^e \\ M_1^e \\ w_2^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ 0 \\ f_2^e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ P_1^e \\ Q_2^e \\ P_2^e \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

gdzie $\alpha^e = \frac{(l^e)^2}{6b^e}$.

Dalsze postępowanie jest już typowe, jak w metodzie elementów skończonych. W przedstawionym przykładzie P_i^e są kątami ugięcia, a Q_i^e – siłami poprzecznymi. Korzyścią wypływającą ze stosowania metody mieszanej jest to, że można było zastosować interpolację liniową dla obu funkcji oraz obliczyć w ten sposób wartości momentów w węzłach.

5.3.2. Model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina

Model skończenie elementowy, opisany w punkcie 5.3.1, bazował na metodzie Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym. Powtórzmy, że metoda ta wykorzystuje sformułowanie, którego rozwiązanie jest w przestrzeni energii H_A , a nie w przestrzeni \mathcal{D}_A . W dalszej części przedstawimy model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina na przykładzie rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego (5.14).

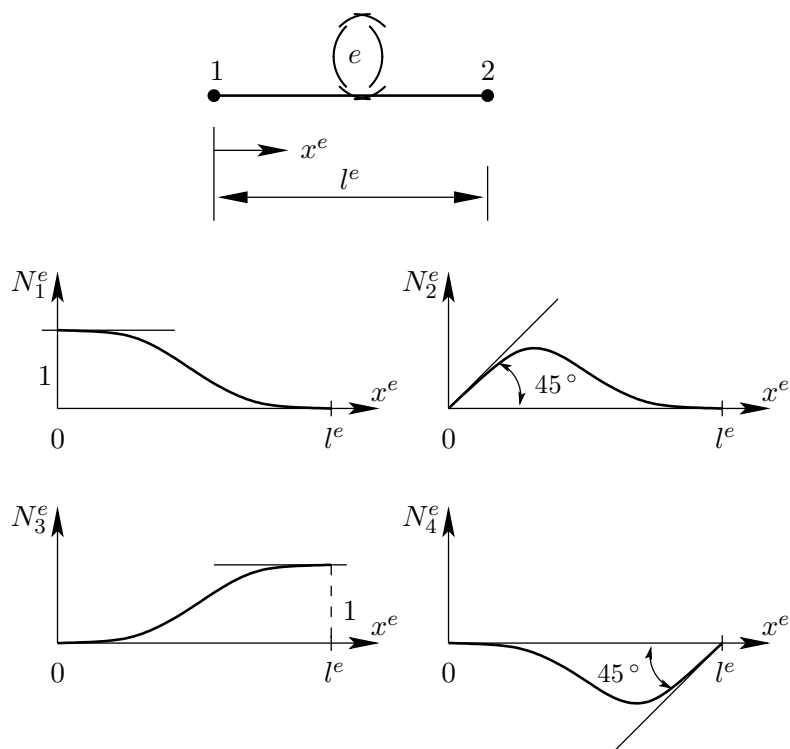
Budując dla tego równania model skończenie elementowy w sformułowaniu wariacyjnym wystarczyło, aby funkcje dopuszczalne były z przestrzeni $H^1(0, L)$. Oznacza to, że w tym modelu wystarczające były funkcje odcinkowo-liniowe, tzn. model ten wymaga, aby funkcje interpolacyjne były ciągłe na granicach pomiędzy elementami skończonymi lub – równoważnie – aby funkcje kształtu zapewniały ciągłość aproksymacji klasy $C^0(0, L)$.

W modelu skończenie elementowym Bubnowa-Galerkina funkcje aproksymacyjne muszą być z przestrzeni $\mathcal{D}_A \subset H^2(0, L)$, czyli funkcje kształtu muszą być klasy $C^1(0, L)$. To wymaganie jest rezultatem niewłączenia naturalnych warunków brzegowych do równania wariacyjnego. W rozważanym równaniu naturalny warunek brzegowy oznacza wyspecyfikowanie $a \left(\frac{du}{dx} \right)$ na brzegach elementu. Stąd też funkcje interpolacyjne muszą zostać tak wybrane, aby $a \left(\frac{du}{dx} \right)$ było ciągłe w węzłach pomiędzy elementami. To z kolei implikuje

(jeśli a jest funkcją ciągłą) ciągłość pochodnej $\frac{du}{dx}$ w całym obszarze $\Omega = (0, L)$. Stąd wymagana jest ciągłość aproksymacji klasy C^1 .

Powyższe wymagania są spełnione dla elementu dwuwęzłowego z sześcienną interpolacją funkcji $u^e(x)$ i dwoma stopniami swobody w węźle, a mianowicie u i $\frac{du}{dx}$. Funkcjami kształtu są wielomiany *Hermite'a* wyrażone wzorami

(rys.5.12). Taki element skończony jest różny od elementu z sześciennymi funk-



Rys.5.12. Funkcje kształtu Hermite'a

cjami kształtu Lagrange'a, który ma cztery węzły z jednym stopniem swobody w węźle. Interpolacja Lagrange'a (dowolnego rzędu) nie spełnia warunku ciągłości $\frac{du}{dx}$ na granicy pomiędzy elementami i stąd nie należy do $C^1(0, L)$.

$$\begin{aligned}
 N_1^e(x^e) &= 1 - 3\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 + 2\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^3 & N_2^e(x^e) &= x^e \left[1 - \left(\frac{x^e}{l^e}\right)\right]^2 \\
 N_3^e(x^e) &= 3\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 - 2\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^3 & N_4^e(x^e) &= x^e \left[\left(\frac{x^e}{l^e}\right)^2 - \left(\frac{x^e}{l^e}\right)\right]
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

Wykorzystując (5.55), aproksymację $u_h(x^e)$ wyraża wzór

$$u^e(x^e) = \sum_{j=1}^4 u_j^e N_j^e(x^e) = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e \quad (5.56)$$

gdzie

$\mathbf{u} = \left\{ u_1^e, u_2^e \equiv \left(\frac{du^e}{dx^e} \right) (0), u_3^e, u_4^e \equiv \left(\frac{du^e}{dx^e} \right) (l^e) \right\}$ – wektor stopni swobody elementu (u_1^e, u_3^e – wartości u^e w węzłach i u_2^e, u_4^e – wartości pochodnej $\frac{du^e}{dx^e}$ w węzłach),

$\mathbf{N}^e(x^e) = [N_1^e(x^e), N_2^e(x^e), N_3^e(x^e), N_4^e(x^e)]$ – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

Równanie metody Bubnowa-Galerkina dla równania (5.14) w elemencie skończonym $\Omega^e = (0, l^e)$ ma postać

$$\int_0^{l^e} v^e(x^e) \left[-\frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{du^e}{dx^e} \right) - f^e(d^e + x^e) \right] dx^e = 0$$

Podstawiając $v^e = N_i^e(x^e)$ i (5.56) za $u^e(x^e)$, otrzymamy układ czterech równań MES

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e - f_i^e = 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

lub

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (5.57)$$

gdzie

$$K_{ij}^e = - \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) \frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{dN_j^e}{dx^e} \right) dx^e \quad (5.58)$$

$$f_i^e = \int_0^{l^e} N_i^e(x^e) f^e(d^e + x^e) dx^e$$

W podobny sposób możemy zbudować model skończenie elementowy również dla innej metody residuów ważonych. Na przykład dla *metody najmniejszych kwadratów* otrzymamy wzory

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_0^{l^e} \frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \right) \frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{dN_j^e}{dx^e} \right) dx^e \\
f_i^e &= - \int_0^{l^e} \frac{d}{dx^e} \left(a^e \frac{dN_i^e}{dx^e} \right) f^e(x^e + d^e) dx^e
\end{aligned} \tag{5.59}$$

natomiast dla *metody kollokacji punktowej* wzory przyjmują postać

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= - \left\{ \frac{d}{dx^e} \left[a^e(x^e) \frac{dN_j^e(x^e)}{dx^e} \right] \right\}_{x^e=x_i^e} \\
f_i^e &= f^e(x_i^e + d^e)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

gdzie x_i są punktami kollokacji (nie powinny to być węzły, najlepiej przyjąć punkty kwadratury Gaussa). Zauważmy, że wzory w metodzie kollokacji punktowej nie mają formy całkowej; elementy macierzy i wektora są obliczane po prostu w punktach kollokacji. Liczba tych punktów powinna być równa liczbie niewiadomych problemu, po uwzględnieniu warunków brzegowych. Dla równania drugiego rzędu mamy dla N elementów dwa warunki brzegowe i $2(N+1)$ węzłowych stopni swobody. Oznacza to, że liczba punktów kollokacji powinna wynosić $2N$, po dwa punkty dla każdego elementu skończonego. Zauważmy też, że macierz \mathbf{K}^e w (5.59) ma wymiary 2×4 ($i = 1, 2$) i w procesie agregacji nie ma „nakładania się” macierzy elementowych na siebie, ponieważ nie ma sumowania równań po liczbie elementów (5.32). Warunek ciągłości (5.27) jest jednakże wykorzystywany.

Przykład 5.4. Rozważmy problem brzegowy

$$-\frac{d}{dx} \left[(1+x) \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad 0 < x < 1 \tag{5.61}$$

za pomocą różnych modeli skończenie elementowych. Obszar rozwiązania zdyskretyzujemy dwoma elementami skończonymi o równej długości. Dla każdego modelu przyjmujemy funkcję kształtu Hermite’a, otrzymując w ten sposób układ zdyskretyzowany z trzema węzłami i sześcioma stopniami swobody.

1. *Metoda Bubnowa-Galerkina*

Przyjmujemy warunki brzegowe w postaci

$$u(0) = 0 \quad \left[(1+x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=1} = 1 \quad (5.62)$$

co oznacza, że

$$U_1 = 0 \quad U_6 \equiv \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+1} = 0.5 \quad (5.63)$$

Takie warunki brzegowe są przyjęte również dla metody najmniejszych kwadratów i dla metody kollokacji punktowej.

Rozwiązanie dokładne wynosi $u = \ln(1+x)$.

Wykorzystując wzory (5.58), obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych:

Element 1

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1.15 & -3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.075 & -0.15 & -0.021 \\ -3 & -0.15 & 3 & -1.6 \\ 0.1 & -0.021 & -0.1 & 0.092 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

Element 2

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 4.2 & 1.7 & -4.2 & 0.15 \\ 0.2 & 0.108 & -0.2 & -0.029 \\ -4.2 & -0.2 & 4.2 & -2.15 \\ 0.15 & -0.029 & -0.15 & 0.125 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES ma formę

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.15 & -3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.075 & -0.15 & -0.021 & 0 & 0 \\ -3 & -0.15 & 7.2 & 0.1 & -4.2 & 0.15 \\ 0.1 & -0.021 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & -0.029 \\ 0 & 0 & -4.2 & -0.2 & 4.2 & -2.15 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.029 & -0.15 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Uwzględnienie w powyższym równaniu warunków brzegowych (5.63) prowadzi do układu czterech równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 0.075 & -0.15 & -0.021 & 0 \\ -0.15 & 7.2 & 0.1 & -4.2 \\ -0.021 & 0.1 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & -4.2 & -0.2 & 4.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.075 \\ 0.015 \\ 1.075 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

którego rozwiązanie wynosi: $U_2 = 0.99604$, $U_3 = 0.40537$, $U_4 = 0.66707$ i $U_5 = 0.69309$.

2. Metoda najmniejszych kwadratów

Korzystając ze wzorów (5.59), obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych:

Element 1

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 153.6 & 33.4 & -153.6 & 43.4 \\ 33.4 & 9.267 & -33.4 & 6.433 \\ -153.6 & -33.4 & 153.6 & -43.4 \\ 43.4 & 6.433 & -43.4 & 16.767 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

Element 2

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 297.6 & 67.4 & -297.6 & 81.4 \\ 67.4 & 19.767 & -67.4 & 12.433 \\ -297.6 & -67.4 & 297.6 & -81.4 \\ 81.4 & 12.433 & -81.4 & 30.267 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES ma postać

$$\begin{bmatrix} 153.6 & 33.4 & -153.6 & 43.4 & 0 & 0 \\ 33.4 & 9.267 & -33.4 & 6.433 & 0 & 0 \\ -153.6 & -33.4 & 451.2 & 24 & -297.6 & 81.4 \\ 43.4 & 6.433 & 24 & 36.533 & -67.4 & 12.433 \\ 0 & 0 & -297.6 & -67.4 & 297.6 & -81.4 \\ 0 & 0 & 81.4 & 12.433 & -81.4 & 30.267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Uwzględnienie w powyższym równaniu warunków brzegowych (5.63) prowadzi do układu czterech równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 9.267 & -33.4 & 6.433 & 0 \\ -33.4 & 451.2 & 24 & -297.6 \\ 6.433 & 24 & 36.533 & -67.4 \\ 0 & -297.6 & -67.4 & 297.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40.7 \\ -6.217 \\ 40.7 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

którego rozwiązanie wynosi: $U_2 = 0.99902$, $U_3 = 0.40554$, $U_4 = 0.66645$ i $U_5 = 0.69324$.

3. Metoda kollokacji punktowej

Przyjęto, że węzłami kollokacji są punkty kwadratury Gaussa: $x_1^e = 0.10566$ i $x_2^e = 0.39434$. Wykorzystując wzory (5.60), obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych:

Element 1

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 17.321 & 5.753 & -17.321 & 1.907 \\ -17.321 & -1.753 & 17.321 & -7.907 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

Element 2

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 24.249 & 8.485 & -24.249 & 2.64 \\ -24.249 & -2.485 & 24.249 & -10.64 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES wyznaczymy, korzystając z warunków ciągłości funkcji u

$$u_1^1 = U_1 \quad u_2^1 = U_2 \quad u_3^1 = u_1^2 = U_3$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4 \quad u_3^2 = U_5 \quad u_4^2 = U_6$$

co prowadzi do czterech równań w postaci

$$\begin{bmatrix} 17.321 & 5.753 & -17.321 & 1.907 & 0 & 0 \\ -17.321 & -1.753 & 17.321 & -7.907 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24.249 & 8.485 & -24.249 & 2.64 \\ 0 & 0 & -24.249 & -2.485 & 24.249 & -10.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Uwzględniając w równaniu (5.68) warunki brzegowe (5.63), otrzymamy układ czterech równań z czterema niewiadomymi w formie

$$\begin{bmatrix} 5.753 & -17.321 & 1.907 & 0 \\ -1.753 & 17.321 & -7.907 & 0 \\ 0 & 24.249 & 8.485 & -24.249 \\ 0 & -24.249 & -2.485 & 24.249 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.32 \\ 5.32 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Rozwiązanie układu równań (5.68) daje wyniki: $U_2 = 1$, $U_3 = 0.40556$, $U_4 = 0.66667$ i $U_5 = 0.69325$.

4. Sformułowanie wariacyjne

Dla tego modelu skończenie elementowego przyjmijmy warunki brzegowe w postaci

$$U_1 = 0 \quad U_5 \equiv u(1) = \ln(1+1) = 0.69315 \quad (5.70)$$

Budując dla tej metody równanie wariacyjne, otrzymamy dla elementu skończonego wzory typu (5.21), na podstawie których obliczono następujące macierze i wektory dla elementów skończonych:

Element 1

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 3 & 0.15 & -3 & 0.1 \\ 0.15 & 0.075 & -0.15 & -0.021 \\ -3 & -0.15 & 3 & -0.1 \\ 0.1 & -0.021 & -0.1 & 0.092 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{0}$$

Element 2

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 4.2 & 0.2 & -4.2 & 0.15 \\ 0.2 & 0.108 & -0.2 & -0.029 \\ -4.2 & -0.2 & 4.2 & -0.15 \\ 0.15 & -0.029 & -0.15 & 0.125 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$$

Globalny układ równań MES ma formę

$$\begin{bmatrix} 3 & 0.15 & -3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.075 & -0.15 & -0.021 & 0 & 0 \\ -3 & -0.15 & 7.2 & 0.1 & -4.2 & 0.15 \\ 0.1 & -0.021 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & -0.029 \\ 0 & 0 & -4.2 & -0.2 & 4.2 & -0.15 \\ 0 & 0 & 0.15 & -0.029 & -0.15 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Wykorzystując w powyższym równaniu warunki brzegowe (5.70), obliczenie niewiadomych pierwotnych sprowadza się do rozwiązania równań drugiego, trzeciego, czwartego i szóstego w postaci

$$\begin{bmatrix} 0.075 & -0.15 & -0.021 & 0 \\ -0.15 & 7.2 & 0.1 & 0.15 \\ -0.021 & 0.1 & 0.2 & -0.029 \\ 0 & 0.15 & -0.029 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.91123 \\ 0.13863 \\ 0.10397 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Wyniki są następujące: $U_2 = 0.99612$, $U_3 = 0.40538$, $U_4 = 0.66728$ oraz $U_6 = 0.50102$. Niewiadome wtórne, obliczone z równań pierwszego i piątego, wynoszą $P_1 = -1$ i $P_5 = 1$.

W tab.5.3 zestawiono wyniki obliczeń dokładnych oraz obliczeń różnymi modelami skończenie elementowymi.

Przykład 5.5. Rozwiążemy problem brzegowy

$$\frac{d^2u}{dx^2} + x^3 \sin x u(x) = -x^2 - x^3 \quad 1 < x < 2 \quad (5.73a)$$

$$u'(1) = 0.5 \quad u(2) = -1 \quad (5.73b)$$

x		Wynik dokładny	Bubnow-Galerkin	Najmniejsze kwadraty	Kollokacja punktowa	Sform. wariacyjne
0	u	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	u'	1.00000	0.99604	0.99902	1.00000	0.99612
0.5	u	0.40547	0.40537	0.40554	0.40556	0.40538
	u'	0.66667	0.66707	0.66645	0.66667	0.66728
1.0	u	0.69315	0.69309	0.69324	0.69325	0.69315
	u'	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50102

Tabela 5.3. Porównanie wyników rozwiązania równania (5.61)

przyjmując 3, 5 i 10 równej długości elementy skończone. Postępując w sposób analogiczny jak w przykładzie 5.1, sformułujemy równanie wariacyjne dla elementu skończonego w formie

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{l^e} \left[\frac{dv^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - (x^e + d^e)^3 \sin(x^e + d^e) v^e u^e \right] dx^e + \\
& + \int_0^{l^e} v^e \left[(x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^e + v^e \frac{du^e}{dx^e} \Big|_0^{l^e} = 0
\end{aligned}$$

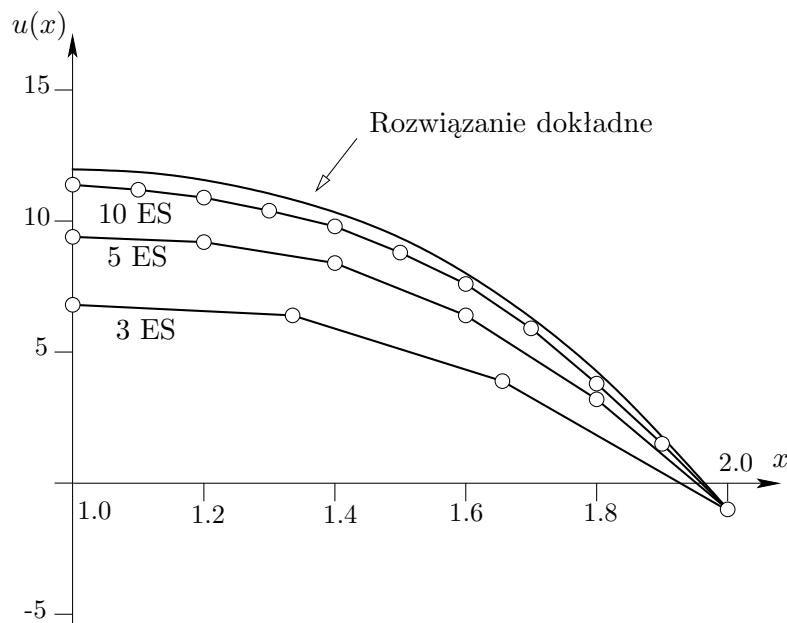
Przyjmując następnie aproksymacje dla $u^e(x^e)$ w postaci (5.19) i podobnie dla $v^e(x^e)$, otrzymamy równanie MES dla elementu skończonego (5.20), gdzie obecnie

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} \left[(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e - (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e (x^e + d^e)^3 \sin(x^e + d^e) \right] dx^e \\
\mathbf{F}^e &= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T \left[(x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^2 + (\mathbf{N}^e)^T \frac{du^e}{dx^e} \Big|_0^{l^e} = \\
&= \int_0^{l^e} (\mathbf{N}^e)^T \left[(x^e + d^e)^2 + (x^e + d^e)^3 \right] dx^e + \begin{bmatrix} -u'^e(0) \\ u'^e(l^e) \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{f}^e + \mathbf{P}^e
\end{aligned}$$

Końcowe rozwiązania równania $\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$ są następujące:

- dla 3 elementów skończonych ($l^e = \frac{1}{3}$, $d_i^e = 1 + \frac{1}{3}(i-1)$, $i = 1, 2, 3$):
 $\mathbf{Q} = [6.886 \ 6.439 \ 3.963]^T$
 $u'(2) = -17.188$
- dla 5 elementów skończonych ($l^e = \frac{1}{5}$, $d_i^e = 1 + \frac{1}{5}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, 5$):
 $\mathbf{Q} = [9.405 \ 9.257 \ 8.386 \ 6.442 \ 3.231]^T$
 $u'(2) = -22.493$
- dla 10 elementów skończonych ($l^e = \frac{1}{10}$, $d_i^e = 1 + \frac{1}{10}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, 10$):
 $\mathbf{Q} = [11.027 \ 11.013 \ 10.844 \ 10.468 \ 9.832 \ 8.884 \ 7.584 \ 5.911 \ 3.877 \ 1.538]^T$
 $u'(2) = -25.898$

Rozwiązanie dokładne dla pochodnej wynosi $u'(2) = -27.284$.



Rys.5.13. Wyniki obliczeń w przykładzie 5.5

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5.13, gdzie dokonano też porównania z rozwiązaniem otrzymanym za pomocą systemu MATHCAD. Jak widać,

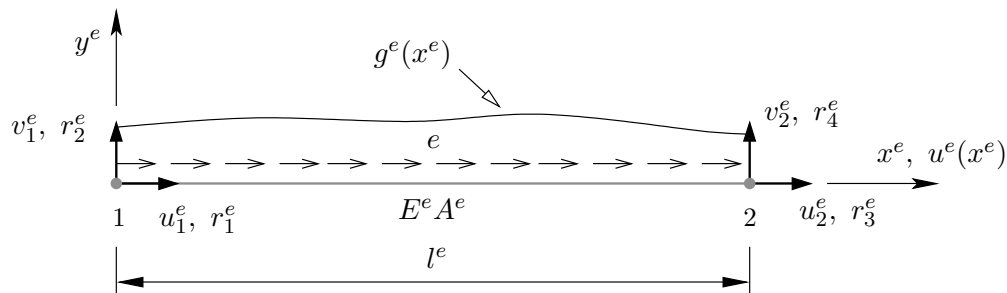
wyniki obliczeń metodą elementów skończonych z adaptacją typu h gwałtownie się poprawiają przy wzroście liczby elementów skończonych.

5.4. Analiza statyczna prostej kratownicy

5.4.1. Element skończony kratowy

Jak to stwierdziliśmy w p.5.3.1, modelem matematycznym problemu rozciągania pręta jest równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Obszar rozwiązania został zdyskretyzowany elementami liniowymi z macierzą \mathbf{K}^e i wektorem \mathbf{F}^e , podanymi wzorami (5.26). Wykorzystamy je do sformułowania elementu skończonego kratowego.

Przed wszystkim, z uwagi na konieczność wprowadzenia dwóch układów współrzędnych: lokalnego, dla elementu skończonego (x^e, y^e) , i globalnego, dla konstrukcji (X, Y) , przyjmiemy umowę, że macierze i wektory w układzie (x^e, y^e) będziemy oznaczali małymi literami, natomiast macierze i wektory w układzie (X, Y) literami dużymi. Przykładowo \mathbf{k}^2 – macierz sztywności elementu 2 w układzie (x^2, y^2) ; \mathbf{K}^2 – macierz sztywności elementu 2 w układzie (X, Y) ; \mathbf{Q} – wektor stopni swobody konstrukcji w układzie (X, Y) itp. Element skończony kratowy jest pokazany na rys.5.14.



Rys.5.14. Element skończony kratowy

Wykorzystując pierwszy wzór w (5.26), mamy w nowych oznaczeniach

$$\mathbf{k}_u^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Macierz sztywności dla elementu kratowego z dwoma stopniami swobody

w węźle otrzymamy ze wzoru

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{k}_u^e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Wektor stopni swobody elementu kratowego ma postać

$$\mathbf{q}^e = \{u_1^e \ v_1^e \ u_2^e \ v_2^e\} \quad (5.76)$$

Przyjmując $g^e(x^e) = g^e = \text{const}$, otrzymamy z drugiego wzoru (5.26) wektor w formie

$$\mathbf{f}_u^e = \frac{g^e l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1^e \\ r_3^e \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Wektor obciążenia dla elementu kratowego z dwoma stopniami swobody w węźle przyjmie postać

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}_u^e = \frac{g^e l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1^e \\ 0 \\ r_3^e \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{p}^{eb} + \mathbf{r}^e \quad (5.78)$$

Transformacja

Wykorzystanie obliczonych macierzy i wektorów dla elementu do analizy statycznej układu kratownicowego wymaga dokonania transformacji tych wielkości do jednego globalnego układu współrzędnych (X, Y) , rys.5.15.

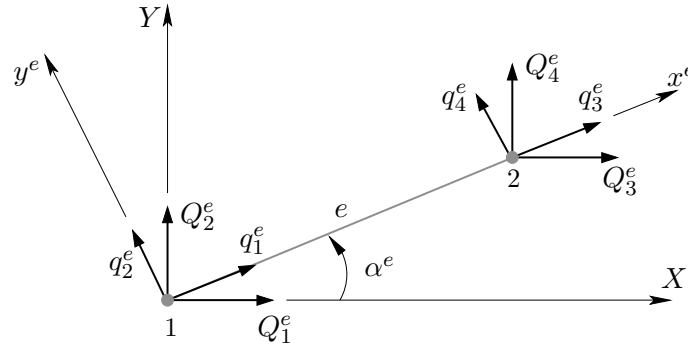
Wzory transformacyjne dla wektorów \mathbf{q}^e i \mathbf{f}^e mają postać

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{Q}^e, \quad \mathbf{f}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{F}^e \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^e \quad (5.79)$$

gdzie:

$\mathbf{Q}^e = \{Q_1^e \ Q_2^e \ Q_3^e \ Q_4^e\}$ – wektor stopni swobody elementu w układzie współrzędnych globalnych,

$\mathbf{F}^e = \{F_1^e \ F_2^e \ F_3^e \ F_4^e\}$ – wektor obciążenia w węzłach elementu w układzie współrzędnych globalnych.



Rys.5.15. Transformacja układu współrzędnych

oraz

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & \sin \alpha^e \\ -\sin \alpha^e & \cos \alpha^e \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

jest macierzą transformacji. Kąt α^e jest kątem transformacji o dodatnim znaku pokazanym na rys.5.15. Macierz sztywności elementu kratowego w układzie współrzędnych globalnych obliczamy ze wzoru

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \quad (5.81)$$

który wynika z przekształcenia formy kwadratowej

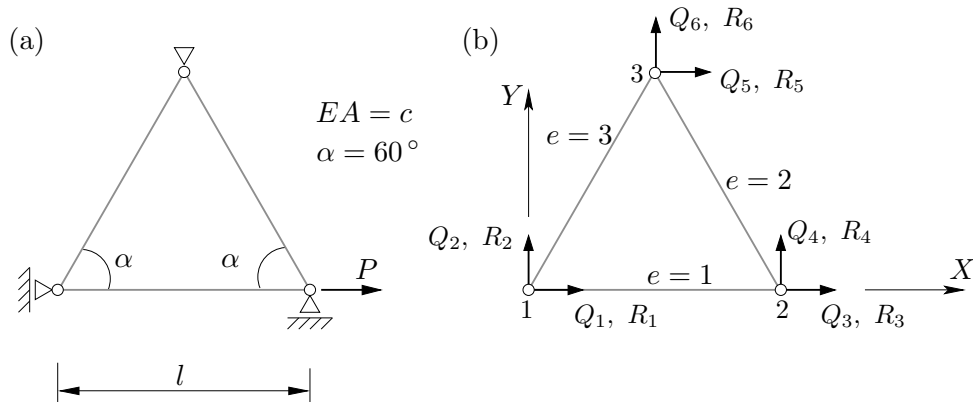
$$(\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = (\mathbf{q}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = (\mathbf{Q}^e)^T \left[(\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \right] \mathbf{Q}^e$$

Element kratowy jest prostym elementem i można dla niego napisać explicit macierz sztywności \mathbf{K}^e (oznaczenia $\cos \alpha^e = c$; $\sin \alpha^e = s$)

$$\mathbf{K}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Przykład 5.6. Rozwiążemy kratownicę pokazaną na rys.5.16a. Obciążeniem jest tylko siła skupiona P , co oznacza, że dla elementów $\mathbf{p}^{eb} = \mathbf{0}$. Pominiemy ciężar własny.

1. Dyskretyzacja MES. Kratownica jest zdyskretyzowana trzema elementami kratowymi. Na rys.5.16b podane zostały numery węzłów i elementów, stop-



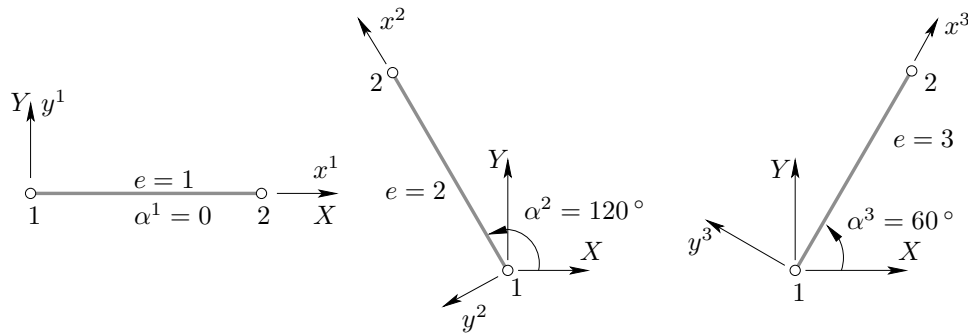
Rys.5.16. Kratownica (a) oraz jej model skończenie elementowy (b)

nie swobody Q_i , siły węzłowe R_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ oraz globalny układ współrzędnych (X, Y) . W tab.5.4 podano topologię zdyskretyzowanej kratownicy.

Numer elementu skończonego	Numer węzła początkowego	Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Tabela 5.4. Tablica topologii kratownicy

Kąty transformacji dla poszczególnych elementów skończonych pokazano na rys.5.17.



Rys.5.17. Kąty transformacji dla elementów skończonych

2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

Element 1: $\alpha^1 = 0$, $l^1 = l$

Macierz sztywności elementu w układzie globalnym

$$\mathbf{K}^1 = \frac{c}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^1 = \{R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1\}$$

Element 2: $\alpha^2 = 120^\circ$, $l^2 = l$

$$\mathbf{K}^2 = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^2 = \{R_1^2 \ R_2^2 \ R_3^2 \ R_4^2\}$$

Element 3: $\alpha^3 = 60^\circ$, $l^3 = l$

$$\mathbf{K}^3 = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych w układzie globalnym

$$\mathbf{R}^3 = \{R_1^3 \ R_2^3 \ R_3^3 \ R_4^3\}$$

3. Agregacja i budowa równań MES. Warunki ciągłości przemieszczeń w węzłach kratownicy mają następującą formę (rys.5.18):

$$\begin{array}{lll} U_1^1 = U_1^3 = Q_1 & V_1^1 = V_1^3 = Q_2 & U_2^1 = U_1^2 = Q_3 \\ V_2^1 = V_1^2 = Q_4 & U_2^2 = U_2^3 = Q_5 & V_2^2 = V_2^3 = Q_6 \end{array}$$

gdzie $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, jest wektorem globalnych stopni swobody.

Układ równań MES utworzony na podstawie tablicy topologii ma postać

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^1 + R_1^3 \\ R_2^1 + R_2^3 \\ R_3^1 + R_1^2 \\ R_4^1 + R_2^2 \\ R_3^2 + R_3^3 \\ R_4^2 + R_4^3 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

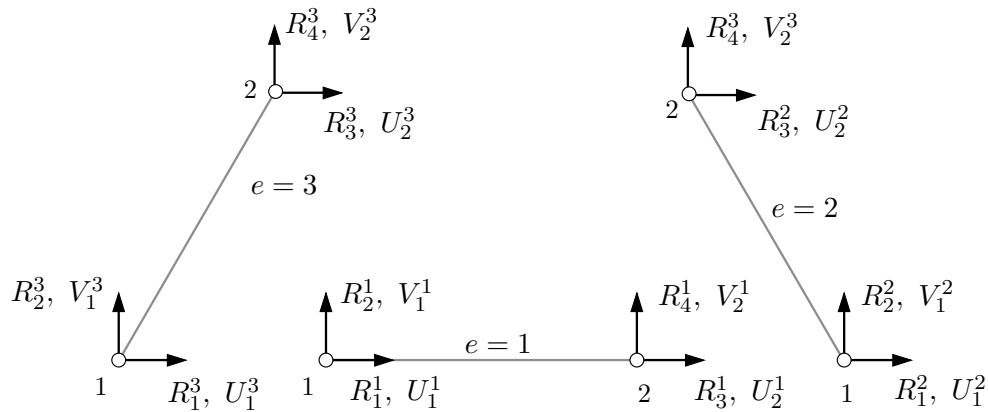
4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił. Kinematyczne warunki brzegowe są jednorodne w postaci

$$Q_1 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0 \quad (5.84)$$

Statyczne warunki brzegowe wyrażają warunki równowagi statycznej w węzłach kratownicy

$$\begin{aligned} R_1^1 + R_1^3 &= R_1 & R_2^1 + R_2^3 &= 0 & R_3^1 + R_1^2 &= P \\ R_4^1 + R_2^2 &= R_4 & R_3^2 + R_3^3 &= R_5 & R_4^2 + R_4^3 &= R_6 \end{aligned} \quad (5.85)$$

gdzie R_1 , R_4 , R_5 , i R_6 są reakcjami w równaniu (5.83)



Rys.5.18. Siły węzłowe i przemieszczenia w globalnym układzie współrzędnych

Wykorzystując (5.84) i (5.85) w równaniu (5.83), otrzymamy układ równań

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ P \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Jest to układ sześciu liniowych równań algebraicznych z sześcioma niewiadomymi: dwiema niewiadomymi pierwotnymi i czterema niewiadomymi wtórnymi. Układ ten można rozwiązać ze względu na niewiadome pierwotne, a następnie z pozostałych (czterech) równań obliczyć niewiadome wtórne. Pokażemy to, przekształcając (5.86) do innej, dogodnej, postaci

$$\frac{c}{4l} \begin{bmatrix} 3 & 0 & \vdots & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 5 & \vdots & -4 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{3} & -4 & \vdots & 5 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & \vdots & 0 & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & -1 & \vdots & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & \vdots & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ \dots \\ R_1 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Pierwsze dwa równania dają rozwiązanie dla niewiadomych pierwotnych

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{4l}{15c} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} = \frac{4Pl}{5c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Niewiadome wtórne obliczymy z drugiej grupy równań

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \frac{c}{4l} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{4Pl}{5c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{P}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

5. Obliczenie sił przywęzłowych w elementach. Siły przywęzłowe w elementach obliczymy z równania równowagi elementu w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e \quad (5.88)$$

Element 1

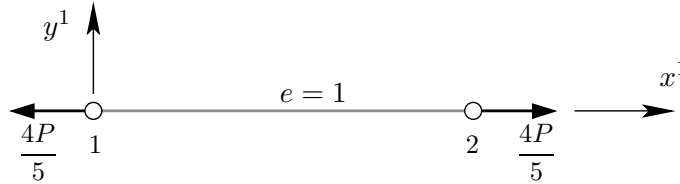
Wektor przemieszczeń węzłowych elementu w układzie współrzędnych lokalnych wyznaczamy na podstawie tablicy topologii

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{Q}^1 = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{4Pl}{5c} \quad 0 \right\}$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{k}^1 \mathbf{q}^1 = \frac{c}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4Pl}{5c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4P}{5} \\ 0 \\ \frac{4P}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na podstawie rys.5.19 stwierdzamy, że element 1 jest rozciągany.



Rys.5.19. Siły przywęzłowe dla elementu 1

Element 2

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu w układzie współrzędnych globalnych

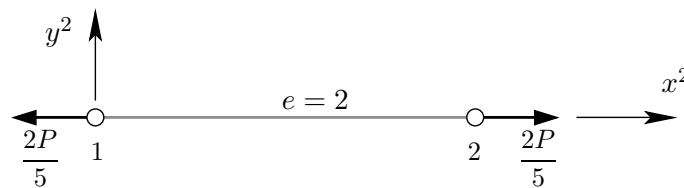
$$\mathbf{Q}^2 = \left\{ \frac{4Pl}{5c} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}$$

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu w układzie współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{T}^2 \mathbf{Q}^2 = \left\{ -\frac{2Pl}{5c} \quad -\frac{2\sqrt{3}Pl}{5c} \quad 0 \quad 0 \right\}$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{2P}{5} \\ 0 \\ \frac{2P}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Rys.5.20. Siły przywęzłowe dla elementu 2

Z rys.5.20 widać, że element 2 jest rozciągany.

Element 3

Dla tego elementu $Q^3 = 0$, skąd wnosimy, że $\mathbf{r}^3 = \mathbf{0}$ (pręt zerowy).

5.5. Równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu

5.5.1. Model skończenie elementowy w sformułowaniu wariacyjnym

Rozwiązanie równania różniczkowego czwartego rzędu za pomocą MES przedstawimy na rozważanym już przykładzie problemu zginania belki sprężystej. Sformułowanie modelu skończenie elementowego wymaga wykonania tych samych etapów, opisanych w punkcie 5.3, z pewnymi zmianami wynikającymi z rzędu rozwiązywanego równania. Modelem matematycznym problemu zginania belki sprężystej jest równanie różniczkowe postaci, rys.5.21

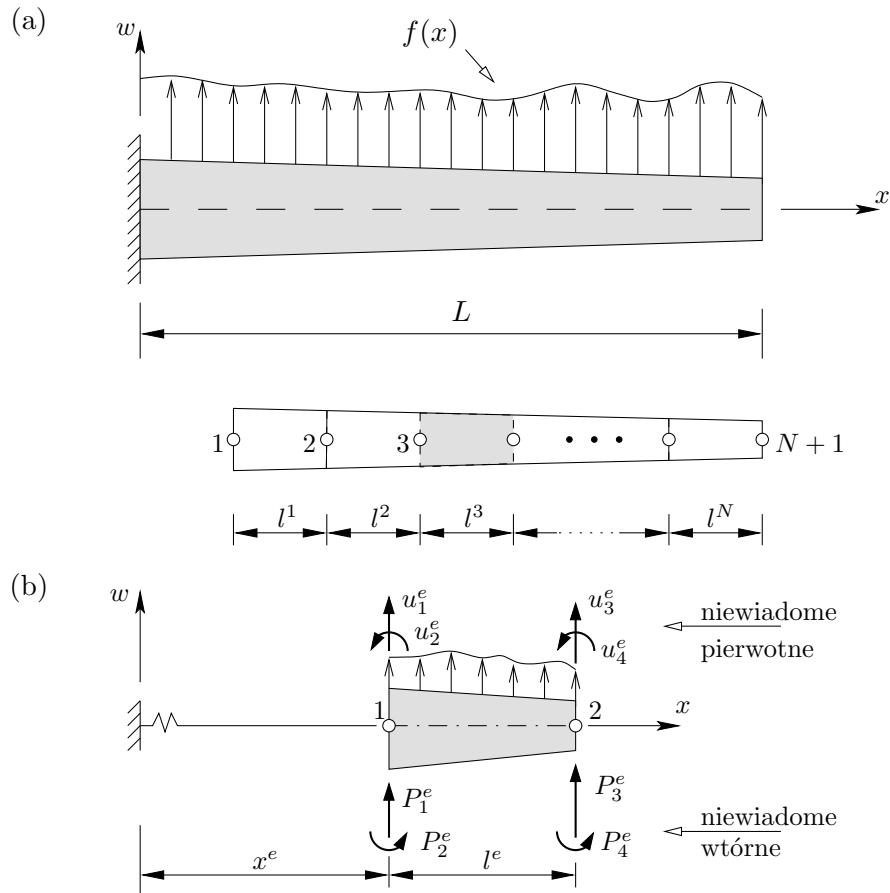
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f \quad 0 < x < L \quad (5.89)$$

gdzie:

$b = EI$ – sztywność na zginanie (E – moduł Younga, I – moment bezwładności względem osi głównej centralnej przekroju poprzecznego),

f – intensywność obciążenia poprzecznego.

1. Dyskretyzacja obszaru. Belka jest zdyskretyzowana przez N elementów dwuwęzłowych.



Rys.5.21. Belka wspornikowa (a) i element skończony (b)

2. Wyznaczenie równań MES dla elementów. W tym etapie budujemy formę wariacyjną równania (5.89) dla elementu skończonego $\Omega^e = (0, l^e)$ (rys.5.21b). Na tej podstawie zidentyfikujemy niewiadome pierwotne i niewiadome wtórne. Następnie przyjmujemy odpowiednią aproksymację dla zmiennych pierwotnych i utworzymy układ równań MES dla elementu skończonego.

a. Sformułowanie wariacyjne. Wykorzystując uzyskaną już wiedzę, napiszemy równanie

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{l^e} v^e \left[\frac{d^2}{dx^{e2}} \left(b^e (d^e + x^e) \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) - f^e (d^e + x^e) \right] dx^e = \\
&= \int_0^{l^e} \left\{ -\frac{dv^e}{dx^e} \frac{d}{dx^e} \left[b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] - v^e f^e \right\} dx^e + \left\{ v^e \frac{d}{dx^e} \left[b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} = \\
&= \int_0^{l^e} \left[b^e \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} - v^e f^e \right] dx^e + \left\{ v^e \frac{d}{dx^e} \left[b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right] \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} + \\
&\quad - \left\{ \frac{dv^e}{dx^e} b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right\} \Big|_{x^e=0}^{x^e=l^e} \quad (5.90)
\end{aligned}$$

gdzie $v^e \in H^2(\Omega^e)$ jest funkcją testową. Z analizy wyrazów brzegowych w powyższym równaniu wynika, że z podstawowymi warunkami brzegowymi są związane zmienne w^e i $\frac{dw^e}{dx^e}$, natomiast naturalne warunki brzegowe wiążą się ze zmiennymi $b^e \left(\frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right)$ i $\frac{d}{dx^e} \left(b^e \left(\frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \right)$ w węzłach końcowych elementu (rys.5.21b). Oznacza to, że w^e i $\frac{dw^e}{dx^e}$ są niewiadomymi pierwotnymi i muszą wystąpić w interpolacji funkcji ugięcia $w^e(x^e)$. Naturalne warunki brzegowe pozostaną w sformułowaniu wariacyjnym i pojawią się po prawej stronie równania MES jako siły brzegowe. Warunki brzegowe występują więc jako:

podstawowe

$$\begin{aligned}
w^e(x^e = 0) &\equiv u_1^e & \frac{dw^e}{dx^e} \Big|_{x=0} &\equiv u_2^e \\
w^e(x^e = l^e) &\equiv u_3^e & \frac{dw^e}{dx^e} \Big|_{x=l^e} &\equiv u_4^e
\end{aligned} \quad (5.91a)$$

naturalne

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx^e} \left(b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \right] \Big|_{x^e=0} &\equiv P_1^e & \left(-b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \Big|_{x^e=0} &\equiv P_2^e \\ \left[-\frac{d}{dx^e} \left(b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \right] \Big|_{x^e=l^e} &\equiv P_3^e & \left(b^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} \right) \Big|_{x^e=l^e} &\equiv P_4^e \end{aligned} \quad (5.91b)$$

Podstawiając (5.91a) i (5.91b) do (5.90), otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{l^e} \left[b^e \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} - v^e f^e \right] dx^e + \\ &- v^e(0)P_1^e - \frac{dv^e}{dx^e}(0)P_2^e - v^e(l^e)P_3^e - \frac{dv^e}{dx^e}(l^e)P_4^e \equiv \\ &\equiv B^e(v^e, w^e) - l^e(v^e) \end{aligned} \quad (5.92a)$$

gdzie formy dwuliniowa i liniowa wyrażone są wzorami

$$\begin{aligned} B^e(v^e, w^e) &= \int_0^{l^e} b^e (d^e + x^e) \frac{d^2 v^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} dx^e \\ l^e(v^e) &= \int_0^{l^e} f^e (d^e + x^e) v^e dx^e + v^e(0)P_1^e + \frac{dv^e}{dx^e}(0)P_2^e + \\ &+ v^e(l^e)P_3^e + \frac{dv^e}{dx^e}(l^e)P_4^e \end{aligned} \quad (5.92b)$$

b. Funkcje interpolacyjne. Z postaci formy wariacyjnej (5.92b) wnioskujemy, że funkcje interpolacyjne dla w^e muszą być wybrane z przestrzeni $H^2(\Omega^e)$, czyli że funkcjami kształtu są wielomiany Hermite'a (5.55). Funkcje te mają własności

$$\begin{aligned} \frac{dN_{2i-1}^e}{dx^e}(x_j^e) &= 0 & \frac{dN_{2i}^e}{dx^e}(x_j^e) &= \delta_{ij} & \sum_{i=1}^2 N_{2i-1}^e &= 1 \\ N_{2i-1}^e(x_j^e) &= \delta_{ij} & N_{2i}^e(x_j^e) &= 0 & & i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.93)$$

gdzie $x_1^e = 0$ i $x_2^e = l^e$ w lokalnym układzie współrzędnych elementu skończonego.

Podstawiając do (5.92a) $v^e = N_i^e(x^e)$ i wzór typu (5.56) za $w^e(x^e)$, otrzymamy układ czterech równań MES dla elementu skończonego w formie

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e = F_i^e, \quad i = 1, \dots, 4$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.94)$$

gdzie

$$K_{ij}^e = \int_0^{l^e} b^e(d^e + x^e) \frac{d^2 N_i^e}{dx^{e2}} \frac{d^2 N_j^e}{dx^{e2}} dx^e \quad (5.95)$$

$$F_i^e = \int_0^{l^e} f^e(d^e + x^e) N_i^e(x^e) dx^e + P_i^e$$

Jeśli b^e i f^e są stałe w elemencie Ω^e , to macierz sztywności \mathbf{K}^e i wektor obciążenia \mathbf{F}^e przybiorą postać

$$\mathbf{K}^e = \frac{2b^e}{(l^e)^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l^e & -6 & 3l^e \\ 3l^e & 2(l^e)^2 & -3l^e & (l^e)^2 \\ -6 & -3l^e & 6 & -3l^e \\ 3l^e & (l^e)^2 & -3l^e & 2(l^e)^2 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

$$\mathbf{F}^e = \frac{f^e l^e}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ l^e \\ 6 \\ -l^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \\ P_3^e \\ P_4^e \end{bmatrix}$$

Można wykazać, że pierwsza kolumna w wektorze na \mathbf{F}^e przedstawia statycznie równoważne siły i momenty w więzach belki obustronnie utwierdzonej od obciążenia równomiernie rozłożonego f^e .

3. Agregacja równań dla elementów. W porównaniu z agregacją dla równania różniczkowego drugiego rzędu obecnie węzeł ma dwa stopnie swobody. Wykorzystując do agregacji macierz topologii, otrzymamy dla dwóch elementów skończonych globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążenia w formie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{bmatrix}$$

4. Uwzględnienie warunków brzegowych. Warunki brzegowe dla przemieszczeń i sił uwzględniamy tak samo jak w p.5.3.1. Warunek równowagi sił w węzłach uwzględniamy, modyfikując odpowiednio drugi składnik w wektorze \mathbf{F} (5.97). Na przykład, jeśli w I -tym węźle globalnym jest przyłożona siła F_0 , a w węźle K -tym jest moment M_0 , to warunki równowagi będą miały postać:

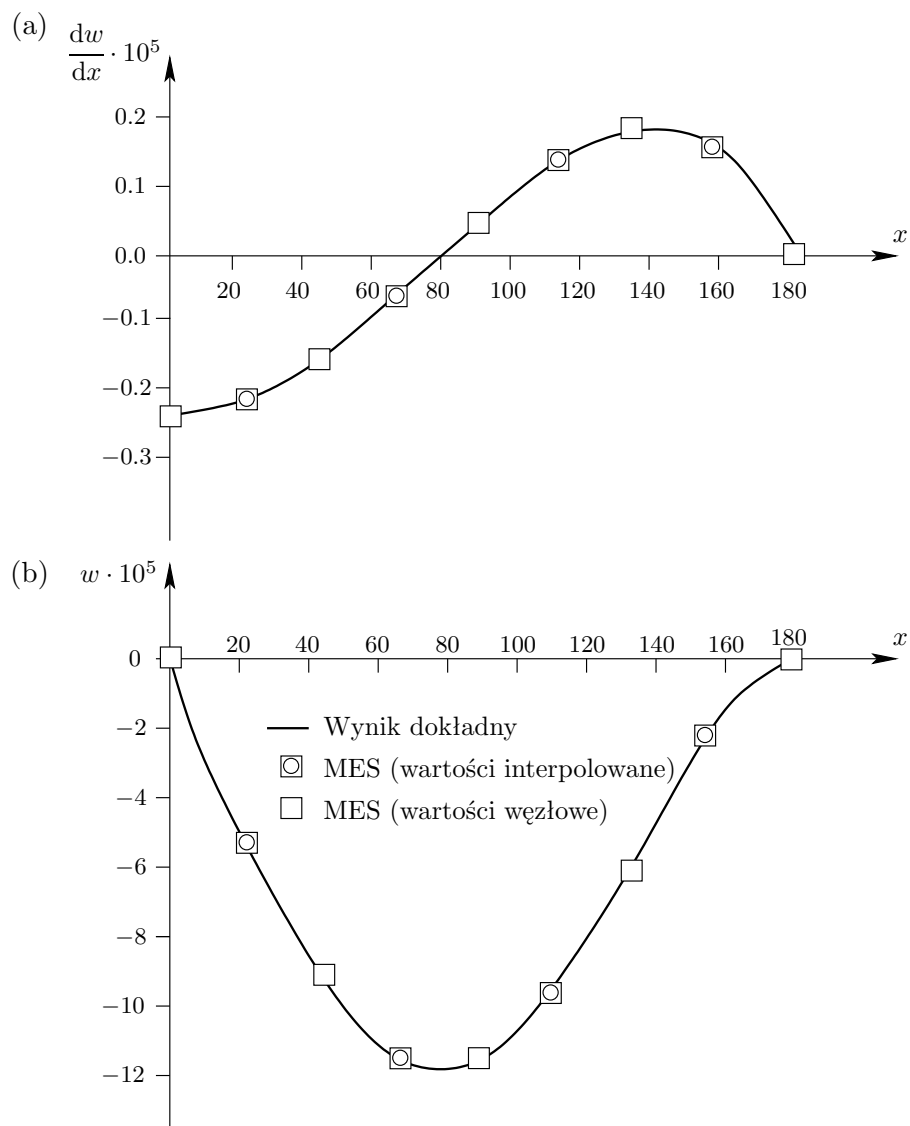
$$P_3^{I-1} + P_1^I = F_0 \quad P_4^{K-1} + P_2^K = M_0$$

Jeśli nie będzie obciążeń skupionych, to powyższe sumy będą równe zeru. Dalsze postępowanie jest już całkowicie analogiczne do postępowania opisanego w p.5.3.1.

Przykład 5.7. Rozważmy belkę jednoprzęsłową swobodnie podpartą na lewej podporze ($w(0)=0$) i utwierdzoną na podporze prawej ($w(L)=\frac{dw}{dx}(L)=0$). Pozostałe dane wynoszą: $L=180$ cm, $I=723$ cm⁴, $E=29 \cdot 10^6$ N/m², $f=-q_0x/L$. Przyjmijmy dyskretyzację belki dwoma i czterema elementami o równej długości.

Ponieważ $b^e = \text{const}$, to macierz sztywności elementów możemy obliczyć ze wzoru (5.96), a wektor obciążenia \mathbf{F}^e wyznaczymy z drugiego członu wzoru (5.95)

$$f_i^e = - \int_0^{l^e} \left(q_0 \frac{d^e + x^e}{L} \right) N_i^e(x^e) dx^e \quad i = 1, \dots, 4$$



Rys.5.22. Porównanie wyników obliczeń MES z rozwiązaniem dokładnym dla przykładu 5.7

Dla dwóch elementów ($l^e=90$ cm) wektor obciążenia dla elementu 1 wynosi

$$\mathbf{f}^1 = \{-6.75 \ 135 \ -15.75 \ 202.5\}q_0$$

Warunki brzegowe mają postać

$$U_1 = 0 \quad U_5 = U_6 = 0 \quad P_2^1 = 0 \quad P_3^1 + P_1^2 = 0 \quad P_4^1 + P_2^2 = 0$$

Obliczone niewiadome pierwotne U_2 , U_3 , i U_4 są wartościami dokładnymi w węzłach. Ponieważ rozwiązanie dokładne w jest wielomianem stopnia piątego, to w punktach pomiędzy węzłami rozwiązanie będzie przybliżone. Na rys.5.22 porównano wyniki obliczeń MES otrzymane dla dyskretyzacji czterema elementami z wynikami dokładnymi. Zwraca uwagę bardzo dobra jakość rozwiązania MES.

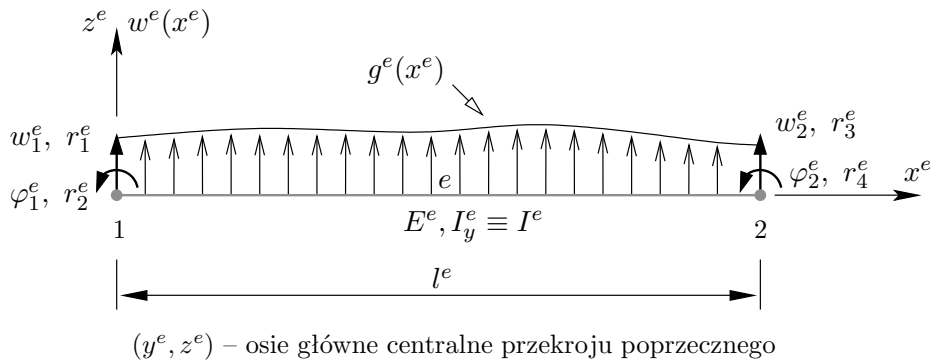
5.6. Analiza statyczna belki ciągłej

5.6.1. Element skończony belkowy

Macierze dla elementu belkowego zostały już wyprowadzone w p.5.5.1, w którym rozpatrywaliśmy model skończenie elementowy dla równania różniczkowego zwyczajnego czwartego rzędu, rządzącego problemem zginania belki sprężystej.

Na rys.5.23 przedstawiono element skończony wraz ze stopniami swobody i uogólnionymi siłami węzłowymi. Wektor stopni swobody ma postać

$$\mathbf{Q}^e = \left\{ w_1^e \quad \frac{dw^e}{dx^e}(0) \equiv \varphi_1^e \quad w_2^e \quad \frac{dw^e}{dx^e}(l^e) \equiv \varphi_2^e \right\}$$



Rys.5.23. Element skończony belkowy

Przyjmując obecne oznaczenia, macierz sztywności obliczona w (5.96) ma formę

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (5.98)$$

gdzie $I^e \equiv I_y^e$ jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego oraz $E^e I^e = \text{const.}$ Wektor obciążenia \mathbf{F}^e obliczymy za pomocą drugiego wzoru (5.96)

$$\mathbf{F}^{eb} = \begin{bmatrix} \frac{gl}{2} \\ \frac{gl^2}{12} \\ \frac{gl}{2} \\ -\frac{gl^2}{12} \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}^e = \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^e \quad (5.99)$$

gdzie przyjęto, że obciążenie ma stałą intensywność $g^e(x^e) = g^e$.

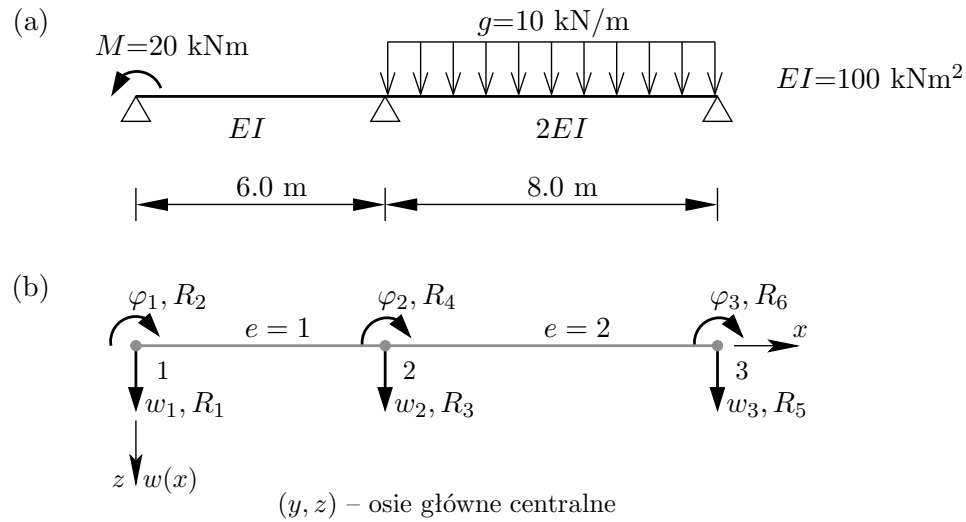
Przykład 5.8. Rozwiążemy belkę ciągłą pokazaną na rys.5.24a. Pominiemy ciężar własny.

1. Dyskretyzacja MES. Belka jest zdyskretyzowana dwoma elementami belkowymi, rys.5.24b. Wektory globalne stopni swobody i uogólnionych sił węzłowych mają postać

$$\mathbf{Q} = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, w_3, \varphi_3\}$$

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}.$$

Tablica topologii została podana w tab.5.5.



Rys.5.24. Belka ciągła (a) i jej model skończenie elementowy (b)

Numer elementu skończonego	Numer węzła początkowego	Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3

Tabela 5.5. Tablica topologii belki ciągłej

2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

Element 1 $l^1=6.0$ m, $E^1 I^1=100$ kNm²

Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 5.5556 & 16.1667 & -5.5556 & 16.6667 \\ 16.1667 & 66.6667 & -16.1667 & 33.3333 \\ -5.5556 & -16.1667 & 5.5556 & -16.1667 \\ 16.1667 & 33.3333 & -16.1667 & 66.6667 \end{bmatrix}$$

Wektory sił węzłowych $\mathbf{P}^{1b} = \mathbf{0}$ oraz

$$\mathbf{R}^1 = \{R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1\}$$

Element 2 $l^2=8.0$ m , $E^2I^2=200$ kNm²

Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 4.6875 & 18.7500 & -4.6875 & 18.7500 \\ 18.7500 & 100.0000 & -18.7500 & 50.0000 \\ -4.6875 & -18.7500 & 4.6875 & -18.7500 \\ 18.7500 & 50.0000 & -18.7500 & 100.0000 \end{bmatrix}$$

Wektory sił węzłowych

$$\mathbf{P}^{2b} = \{40.0000 \quad 53.3333 \quad 40.0000 \quad -53.3333\}$$

oraz

$$\mathbf{R}^2 = \{R_1^2 \quad R_2^2 \quad R_3^2 \quad R_4^2\}$$

3. Agregacja i budowa równań MES. Warunki ciągłości przemieszczeń uogólnionych w węzłach belki mają następującą postać (rys.5.25):

$$\begin{aligned} w_1^1 &= w_1 & w_2^1 &= w_1^2 = w_2 & w_2^2 &= w_3 \\ \varphi_1^1 &= \varphi_1 & \varphi_2^1 &= \varphi_1^2 = \varphi_2 & \varphi_2^2 &= \varphi_3 \end{aligned}$$

Układ równań MES utworzony przy wykorzystaniu tablicy topologii ma formę

$$\begin{bmatrix} 5.5556 & 16.6667 & -5.5556 & 16.6667 & 0 & 0 \\ 16.6667 & 66.6667 & -16.6667 & 33.3333 & 0 & 0 \\ -5.5556 & -16.6667 & 10.2431 & 2.0833 & -4.6875 & 18.7500 \\ 16.6667 & 33.3333 & 2.0833 & 166.6667 & -18.7500 & 50.0000 \\ 0 & 0 & -4.6875 & -18.7500 & 4.6875 & -18.7500 \\ 0 & 0 & 18.7500 & 50.0000 & -18.7500 & 100.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40.0000 \\ 53.3333 \\ 40.0000 \\ -53.3333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 + R_1^2 \\ R_4^1 + R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

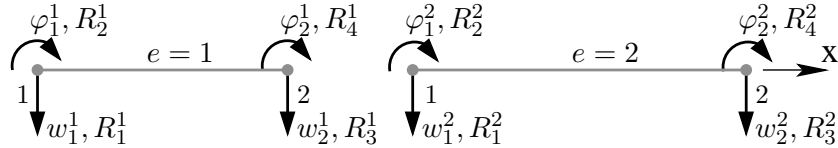
4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach. Jednorodne kinematyczne warunki brzegowe mają postać

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0 \quad (5.101)$$

natomiast statyczne warunki brzegowe wyrażają równania

$$\begin{aligned} R_1^1 = R_1 & & R_3^1 + R_1^2 = R_3 & & R_3^2 = R_5 \\ R_2^1 = -20 & & R_4^1 + R_2^2 = 0 & & R_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

gdzie R_1, R_3, R_5 są reakcjami na podporach belki (por. rys.5.24 i rys.5.25).



Rys.5.25. Siły węzłowe i przemieszczenia uogólnione dla elementów

Podstawiając (5.101) i (5.102), do (5.100) otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} 5.5556 & 16.6667 & -5.5556 & 16.6667 & 0 & 0 \\ 16.6667 & 66.6667 & -16.6667 & 33.3333 & 0 & 0 \\ -5.5556 & -16.6667 & 10.2431 & 2.0833 & -4.6875 & 18.7500 \\ 16.6667 & 33.3333 & 2.0833 & 166.6667 & -18.7500 & 50.0000 \\ 0 & 0 & -4.6875 & -18.7500 & 4.6875 & -18.7500 \\ 0 & 0 & 18.7500 & 50.0000 & -18.7500 & 100.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -20.0000 \\ R_3 + 40.0000 \\ 53.3333 \\ R_5 + 40.0000 \\ -53.3333 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

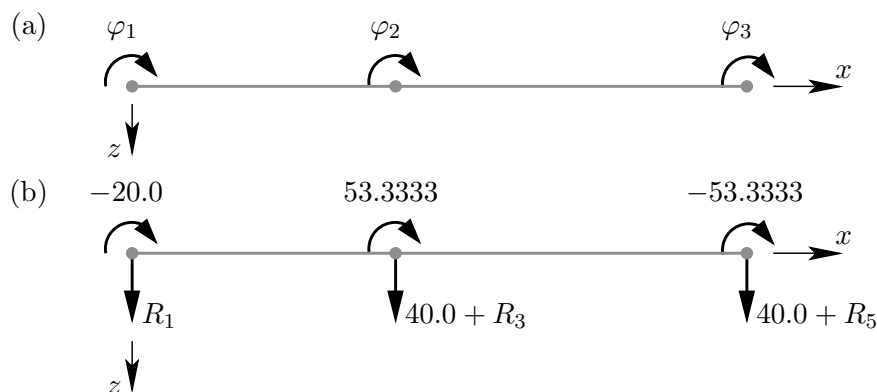
z sześcioma niewiadomymi: trzema niewiadomymi pierwotnymi i trzema niewiadomymi wtórnymi, rys.5.26.

Niewiadome pierwotne obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} 66.6667 & 33.3333 & 0 \\ 33.3333 & 166.6667 & 50.0000 \\ 0 & 50.0000 & 100.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0000 \\ 53.3333 \\ -53.3333 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie to ma postać

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6600 \\ 0.7200 \\ -0.8933 \end{bmatrix}$$



Rys.5.26. Niewiadome pierwotne (a) i niewiadome wtórne z siłami węzłowymi (b) dla belki ciągłej

Niewiadome wtórne wyznaczymy z pierwszego, trzeciego i piątego równania (5.102)

$$R_1 = 16.6667 \cdot \varphi_1 + 16.6667 \cdot \varphi_2 = 1.0000 \text{ kN}$$

$$R_3 = -40.0000 - 16.6667 \cdot \varphi_1 + 2.0833 \cdot \varphi_2 + 18.7500 \cdot \varphi_3 = -44.2500 \text{ kN}$$

$$R_5 = -40.0000 - 18.7500 \cdot \varphi_2 - 18.7500 \cdot \varphi_3 = -36.7500 \text{ kN}$$

5. Obliczenie wektorów sił przywęzłowych w elementach. Siły przywęzłowe obliczymy z równania równowagi elementu

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - \mathbf{P}^{eb} \quad (5.104)$$

Element 1 (rys.5.27)

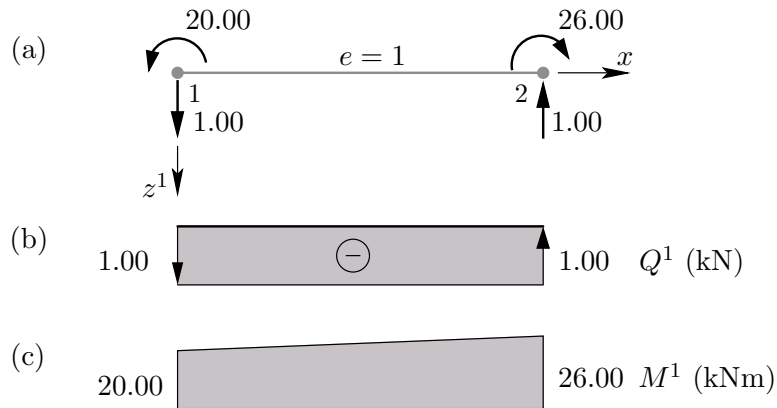
Wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$\mathbf{Q}^1 = \{0 \quad -0.6600 \quad 0 \quad 0.7200\}$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{R}^1 = \{1.0000 \quad -20.0000 \quad -1.0000 \quad 26.0000\}$$

Na rys.5.27b i c i na dalszych wykresach sił przekrojowych wprowadzono dodatkowo znaki z konwencji znakowania stosowanego często w wytrzymałości materiałów (nie ma to nic wspólnego z rys.5.27a, gdzie zwroty sił są związane z przyjętym układem współrzędnych dla elementu skończonego).



Rys.5.27. Siły przywęzłowe dla elementu 1 (a), wykresy siły poprzecznej (b) i momentu zginającego (c)

Element 2 (rys.5.28)

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$\mathbf{Q}^2 = \{0 \quad 0.7200 \quad 0 \quad -0.8933\}$$

Wektor sił przywęzłowych

$$\mathbf{R}^2 = \{-43.2500 \quad -26.0000 \quad -36.7500 \quad 0.0000\}$$

Na rys.5.28c dorysowano do rozwiązania MES parabolę wynikającą z działania obciążenia ciągłego w elemencie 2.

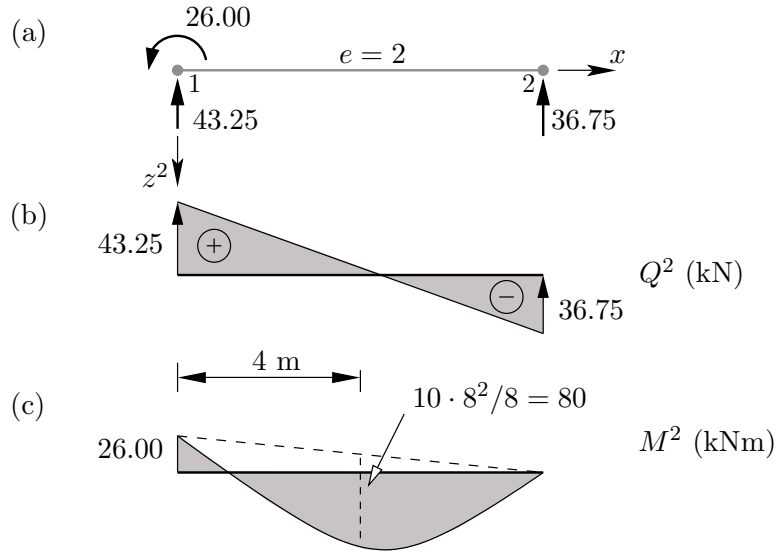
5.7. Analiza statyczna ramy płaskiej

5.7.1. Element skończony ramowy

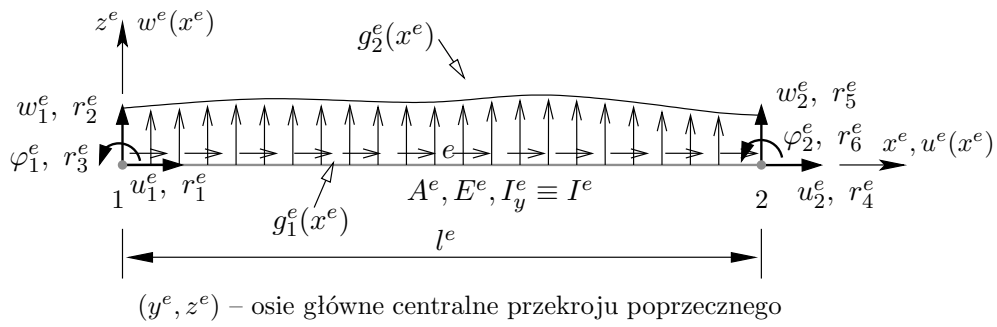
Element skończony ramowy przedstawiono na rys.5.29. Jest to element dwuwęzłowy o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Wektor stopni swobody ma postać

$$\mathbf{q}^e = \{u_1^e \quad w_1^e \quad \varphi_1^e \quad u_2^e \quad w_2^e \quad \varphi_2^e\} \quad (5.105)$$

Macierze dla tego elementu można wyprowadzić w taki sam sposób jak to czyniliśmy dla elementów kratowego i belkowego. Różnica w porównaniu z tamtymi rozwiązaniami polega jednakże na tym, że obecnie nieznane jest



Rys.5.28. Siły przywęzłowe dla elementu 2 (a), wykresy siły poprzecznej (b) i momentu zginającego (c)



Rys.5.29. Element skończony ramowy

pole wektorowe, w którym poszukiwane są dwie funkcje przemieszczeń, a mianowicie $u^e(x^e)$ i $w^e(x^e)$. Łącząc ze sobą równania (5.17) i (5.92a), napiszemy dla elementu ramowego równanie wariacyjne w postaci

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^{l^e} \left[a^e \frac{dv_1^e}{dx^e} \frac{du^e}{dx^e} - v_1^e(x^e) g_1^e(x^e) \right] dx^e - r_1^e v_1^e(0) - r_4^e v_1^e(l^e) + \\
& + \int_0^{l^e} \left[b^e \frac{d^2 v_2^e}{dx^{e2}} \frac{dw^e}{dx^{e2}} - v_2^e(x^e) g_2^e(x^e) \right] dx^e + \\
& - r_2^e v_2^e(0) - r_3^e \left. \frac{dv_2^e}{dx^e} \right|_{x^e=0} - r_5^e v_2^e(l^e) - r_6^e \left. \frac{dv_2^e}{dx^e} \right|_{x^e=l^e}
\end{aligned} \tag{5.106}$$

gdzie oznaczenia dostosowano do rys. 5.29 oraz $a^e \equiv E^e A^e$ i $b^e \equiv E^e I^e$.

Aproksymacje funkcji $u^e(x^e)$ i $w^e(x^e)$ oraz funkcji wagowych $v_1^e(x^e)$ i $v_2^e(x^e)$ wyrażają wzory

$$\begin{aligned}
u^e(x^e) &= \mathbf{N}_1^e(x^e) \mathbf{q}^e & w^e(x^e) &= \mathbf{N}_2^e(x^e) \mathbf{q}^e \\
v_1^e(x^e) &= \mathbf{N}_1^e(x^e) \mathbf{d}^e & v_2^e(x^e) &= \mathbf{N}_2^e(x^e) \mathbf{d}^e
\end{aligned} \tag{5.107}$$

gdzie macierze jednowierszowe funkcji kształtu $\mathbf{N}_1^e(x^e)$ oraz $\mathbf{N}_2^e(x^e)$ wynoszą

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1^e(x^e) &= [N_1^e(x^e) \ 0 \ 0 \ N_4^e(x^e) \ 0 \ 0] \\
\mathbf{N}_2^e(x^e) &= [0 \ N_2^e(x^e) \ N_3^e(x^e) \ 0 \ N_5^e(x^e) \ N_6^e(x^e)]
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Funkcje kształtu $N_1^e(x^e)$ i $N_4^e(x^e)$ są liniowymi funkcjami Lagrange'a (5.24b), a $N_2^e(x^e)$, $N_3^e(x^e)$, $N_5^e(x^e)$ i $N_6^e(x^e)$ są sześciennymi funkcjami Hermite'a (5.55). Wykorzystując następnie (5.107) w równaniu (5.106), otrzymamy po przekształceniach i wykorzystaniu warunku $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, równanie macierzowe w formie

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & \left[\int_0^{l^e} \left(\left(\mathbf{N}'_1(x^e) \right)^T a^e \mathbf{N}'_1(x^e) + \left(\mathbf{N}''_2(x^e) \right)^T b^e \mathbf{N}''_2(x^e) \right) dx^e \right] \mathbf{q}^e + \\
& - \left[\int_0^{l^e} \left(\left(\mathbf{N}_1^e(x^e) \right)^T g_1^e(x^e) + \left(\mathbf{N}_2^e(x^e) \right)^T g_2^e(x^e) \right) dx^e \right] + \\
& - \left[r_1^e \left(\mathbf{N}_1^e(0) \right)^T + r_2^e \left(\mathbf{N}_2^e(0) \right)^T + r_3^e \left(\mathbf{N}'_2(0) \right)^T + r_4^e \left(\mathbf{N}_1^e(l^e) \right)^T + \right. \\
& \left. + r_5^e \left(\mathbf{N}_2^e(l^e) \right)^T + r_6^e \left(\mathbf{N}'_2(l^e) \right)^T \right] \quad (5.109a)
\end{aligned}$$

lub

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{f}^e \quad (5.109b)$$

gdzie dodatkowo oznaczono całkowity wektor obciążenia elementu

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{p}^{eb} + \mathbf{r}^e \quad (5.110)$$

oraz zdefiniowano:

macierz sztywności elementu ramowego

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{l^e} \left(\left(\mathbf{N}'_1(x^e) \right)^T E^e A^e \mathbf{N}'_1(x^e) + \left(\mathbf{N}''_2(x^e) \right)^T E^e I^e \mathbf{N}''_2(x^e) \right) dx^e \quad (5.111)$$

wektor równoważników obciążenia ciągłego

$$\mathbf{p}^{eb}(x^e) = \int_0^{l^e} \left(\left(\mathbf{N}_1^e(x^e) \right)^T g_1^e(x^e) + \left(\mathbf{N}_2^e(x^e) \right)^T g_2^e(x^e) \right) dx^e \quad (5.112)$$

wektor sił węzłowych (niewiadomych wtórnych)

$$\mathbf{r}^e = \{r_1^e \ r_2^e \ r_3^e \ r_4^e \ r_5^e \ r_6^e\} \quad (5.113)$$

Przyjmując, że $E^e A^e = \text{const}$, $E^e I^e = \text{const}$ oraz $g_i^e = \text{const}$ i $g_2^e = \text{const}$ otrzymamy z wzorów (5.111) i (5.112), po wykonaniu koniecznych całkowań,

macierz sztywności \mathbf{k}^e w postaci

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (5.114)$$

Wektor równoważników obciążeń ciągłych ($g_1 = \text{const}$, $g_2 = \text{const}$)

$$\mathbf{p}^{eb} = \left\{ \frac{g_1 l}{2} \quad \frac{g_2 l}{2} \quad \frac{g_2 l^2}{12} \quad \frac{g_1 l}{2} \quad \frac{g_2 l}{2} \quad -\frac{g_2 l^2}{12} \right\}^e \quad (5.115)$$

Transformacja

Macierze i wektory zdefiniowane w lokalnym układzie współrzędnych (x^e , z^e) transformujemy do układu globalnego (X , Z) wg wzorów (5.79) i (5.81). Macierz transformacji ma formę

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

gdzie macierz \mathbf{t}^e obliczamy wzorem (5.80)₂.

Macierz sztywności elementu ramowego można explicite przedstawić w układzie współrzędnych globalnych w postaci sumy dwóch macierzy odpowiadających udziałowi sztywności osiowej (wyrazy zawierające EA) oraz udziałowi sztywności zginania (wyrazy zawierające EI)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_a^e + \mathbf{K}_b^e$$

gdzie

$$\mathbf{K}_a^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (5.117)$$

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{E^e I^e}{(l^e)^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12cs & -6sl & -12s^2 & 12cs & -6sl \\ -12cs & 12c^2 & 6cl & 12cs & -12c^2 & 6cl \\ -6sl & 6cl & 4l^2 & 6sl & -6cl & 2l^2 \\ -12s^2 & 12cs & 6sl & 12s^2 & -12cs & 6sl \\ 12cs & -12c^2 & -6cl & -12cs & 12c^2 & -6cl \\ -6sl & 6cl & 2l^2 & 6sl & -6cl & 4l^2 \end{bmatrix}^e \quad (5.118)$$

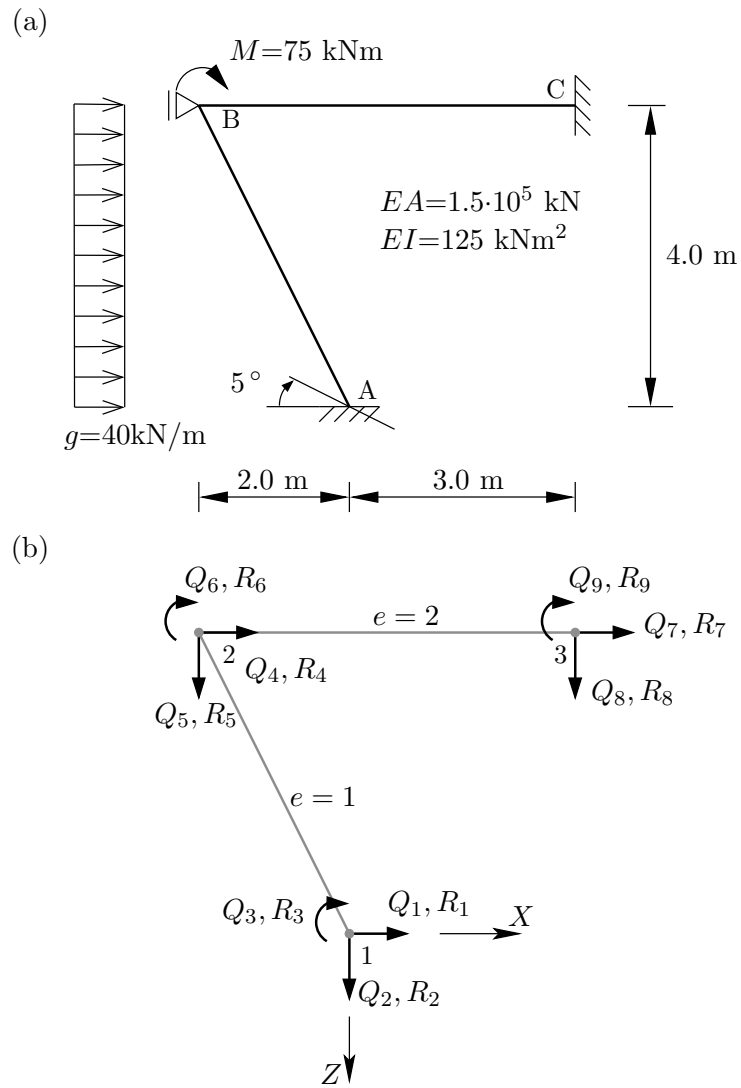
Przykład 5.9. Rozwiążemy ramę pokazaną na rys.5.30a. Jest ona obciążona obciążeniem statycznym oraz geometrycznym, którym jest obrót podpory A o kąt $5^\circ = 0.087$ rad. W obliczeniach pominiemy ciężar własny ramy.

1. Dyskretyzacja MES. Rama jest zdyskretyzowana dwoma elementami ramowymi. Na rys.5.30b opisano numery węzłów i elementów oraz zdefiniowano uogólnione globalne stopnie swobody Q_i , $i = 1, \dots, 9$, wraz z siłami węzłowymi i globalny układ współrzędnych (X, Z) . Tablicę topologii pokazano w tab.5.6.

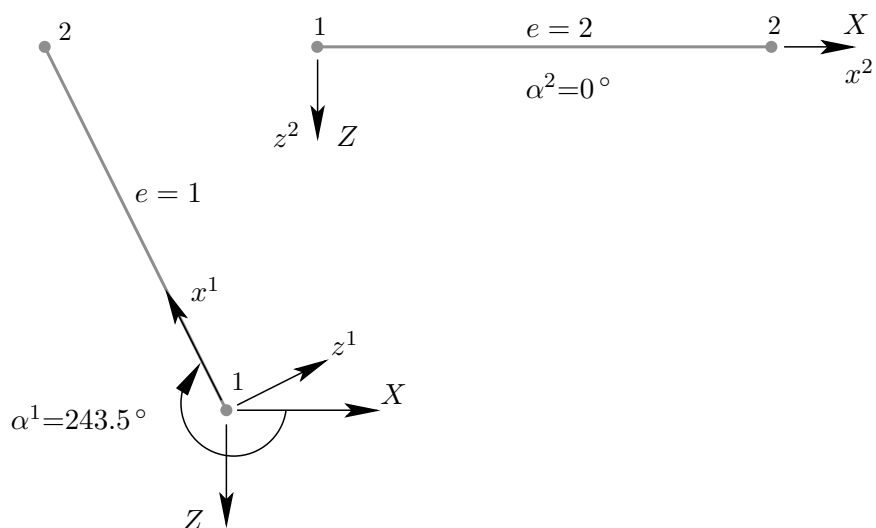
Numer elementu skończonego	Numer węzła początkowego	Numer węzła końcowego
1	1	2
2	2	3

Tabela 5.6. Tablica topologii ramy

Kąty transformacji dla elementów wyznaczono zgodnie z rys.5.31 (oś X jest osią pierwszą).



Rys.5.30. Rama (a) oraz jej model skończenie elementowy (b)



Rys.5.31. Kąty transformacji dla elementów skończonych

2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

Element 1 $\alpha^1=243.5^\circ$, $l^1=4.472$ m

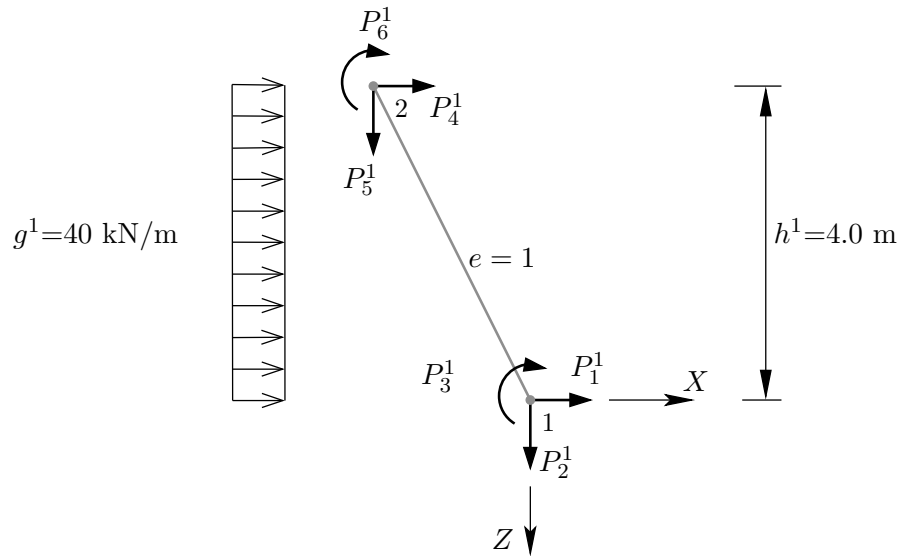
Macierz sztywności

$$\mathbf{K}^1 = (\mathbf{T}^1)^T \mathbf{k}^1 \mathbf{T}^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 6.7216 & 13.4097 & 0.0335 & -6.7216 & -13.4097 & 0.0335 \\ 13.4097 & 26.8362 & -0.0168 & -13.4097 & -26.8362 & -0.0168 \\ 0.0335 & -0.0167 & 0.1118 & -0.0335 & 0.0168 & 0.0559 \\ -6.7216 & -13.4097 & -0.0335 & 6.7216 & 13.4097 & -0.0335 \\ -13.4097 & -26.8362 & 0.0168 & 13.4097 & 26.8362 & 0.0168 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.0559 & -0.0335 & 0.0168 & 0.1118 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Wektor sił węzłowych

Wykorzystamy w obliczeniach, że obciążenie g w elemencie jest obciążeniem ciągłym na mb rzutu elementu 1 na oś globalną Z . W ten sposób możemy od razu napisać wektor sił węzłowych w globalnym układzie współrzędnych, rys.5.32.

Rys.5.32. Wektor równoważników obciążenia \mathbf{P}^{1b}

$$\mathbf{P}^{1b} = \begin{bmatrix} \frac{gh}{2} \\ 0 \\ \frac{gh^2}{12} \\ \frac{gh}{2} \\ 0 \\ -\frac{gh^2}{12} \end{bmatrix}^{1b} = \begin{bmatrix} 80.000 \\ 0.000 \\ 53.333 \\ 80.000 \\ 0.000 \\ -53.333 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{R}^1 = \{R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1 \ R_5^1 \ R_6^1\}$$

Element 2 $\alpha=0^\circ$, $l^2=5.0$ m

Macierz sztywności

$\mathbf{K}^2 = \mathbf{k}^2 =$

$$= \begin{bmatrix} 30.0000 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0120 & 0.0300 & 0 & -0.0120 & 0.0300 \\ 0 & 0.0300 & 0.1000 & 0 & -0.0300 & 0.0500 \\ -30.0000 & 0 & 0 & 30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0120 & -0.0300 & 0 & 0.0120 & -0.0300 \\ 0 & 0.0300 & 0.0500 & 0 & -0.0300 & 0.1000 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Wektor sił węzłowych $\mathbf{P}^{2b} = \mathbf{0}$ oraz

$$\mathbf{R}^2 = \{R_1^2 \ R_2^2 \ R_3^2 \ R_4^2 \ R_5^2 \ R_6^2\}$$

3. Agregacja i budowa równań MES. Globalny układ równań MES budujemy, wykorzystując tablicę topologii oraz warunki ciągłości przemieszczeń uogólnionych w węzłach (rys.5.33)

$$\begin{array}{lll} U_1^1 = Q_1 & U_2^1 = U_1^2 = Q_4 & U_2^2 = Q_7 \\ W_1^1 = Q_2 & W_2^1 = W_1^2 = Q_5 & W_2^2 = Q_8 \\ \varphi_1^1 = Q_3 & \varphi_2^1 = \varphi_1^2 = Q_6 & \varphi_2^2 = Q_9 \end{array}$$

gdzie U_i^e , W_i^e , $e, i = 1, 2$ są przemieszczeniami elementów w globalnym układzie współrzędnych, a φ_i^e kątami ugięcia. W rezultacie otrzymamy układ równań w postaci (5.119) (s. 190).

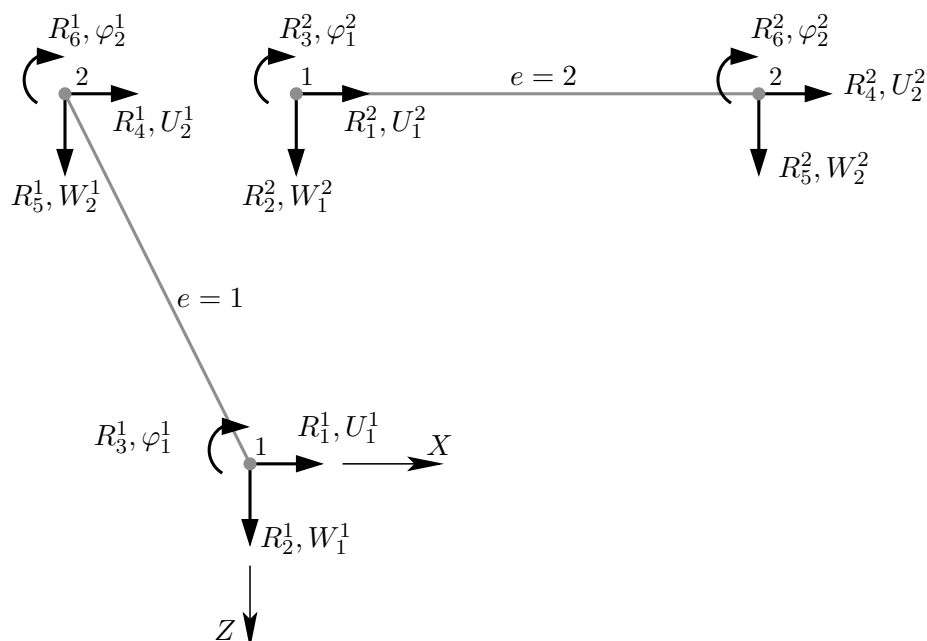
4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach. Kinematyczne warunki brzegowe są niejednorodne i mają postać

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = 0 \\ Q_3 = 0.087 \end{aligned} \quad (5.120)$$

Statyczne warunki brzegowe są równaniami równowagi sił w węzłach ramy o postaci

$$\begin{array}{lll} R_1^1 = R_1 & R_4^1 + R_1^2 = R_4 & R_4^2 = R_7 \\ R_2^1 = R_2 & R_5^1 + R_2^2 = R_5 = 0 & R_5^2 = R_8 \\ R_3^1 = R_3 & R_6^1 + R_3^2 = R_6 = 80 & R_6^2 = R_9 \end{array} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned}
 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 6.7216 & 13.4097 & 0.0335 & -6.7216 & -13.4097 & 0.0335 & 0 & 0 & 0 \\ 13.4097 & 26.8362 & -0.0168 & -13.4097 & -26.8362 & -0.0168 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.1118 & -0.0335 & 0.0168 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7216 & -13.4097 & -0.0335 & 36.7216 & 13.4097 & -0.0335 & -30.0000 & 0 & 0 \\ -13.4097 & -26.8362 & 0.0168 & 13.4097 & 26.8482 & 0.0468 & 0 & -0.0120 & 0.0300 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.0559 & -0.0335 & 0.0468 & 0.2118 & 0 & -0.0300 & 0.0500 \\ 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 & 0 & 30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0120 & -0.0300 & 0 & 0.0120 & -0.0300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0300 & 0.0500 & 0 & -0.0300 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} 80.000 \\ 0 \\ 53.333 \\ 80.000 \\ 0 \\ -53.333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_4^1 + R_1^2 \\ R_5^1 + R_2^2 \\ R_6^1 + R_3^2 \\ R_4^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{bmatrix} \quad (5.119)
 \end{aligned}$$



Rys.5.33. Siły węzłowe i przemieszczenia uogólnione dla elementów w globalnym układzie współrzędnych

gdzie R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_7 , R_8 i R_9 są reakcjami podpór.

Podstawiając (5.120) i (5.121) do (5.119), otrzymamy końcowy układ równań w formie (5.122) (s. 192). Jest to układ dziewięciu równań z dwiema niewiadomymi pierwotnymi Q_5 i Q_6 oraz siedmioma niewiadomymi wtórnymi (reakcjami).

Niewiadome pierwotne obliczymy, rozwiązując piąte i szóste równanie (5.122)

$$10^3 \begin{bmatrix} 26.8480 & 0.0468 \\ 0.0468 & 0.2118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0870 \cdot 0.0168 \cdot 10^3 \\ 21.667 - 0.0870 \cdot 0.0559 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymamy

$$\mathbf{Q} = \{0 \ 0 \ 0.0870 \ 0 \ -0.1926 \cdot 10^{-3} \ 0.0794 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (5.123)$$

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 6.7216 & 13.4097 & 0.0335 & -6.7216 & -13.4097 & 0.0335 & 0 & 0 & 0 \\ 13.4097 & 26.8362 & -0.0168 & -13.4097 & -26.8362 & -0.0168 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.1118 & -0.0335 & 0.0168 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7216 & -13.4097 & -0.0335 & 36.7216 & 13.4097 & -0.0335 & -30.0000 & 0 & 0 \\ -13.4097 & -26.8362 & 0.0168 & 13.4097 & 26.8482 & 0.0468 & 0 & -0.0120 & 0.0300 \\ 0.0335 & -0.0168 & 0.0559 & -0.0335 & 0.0468 & 0.2118 & 0 & -0.0300 & 0.0500 \\ 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 & 0 & 30.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0120 & -0.0300 & 0 & 0.0120 & -0.0300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0300 & 0.0500 & 0 & -0.0300 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0870 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} 80.000 + R_1 \\ R_2 \\ 53.333 + R_3 \\ 80.000 + R_4 \\ 0 \\ 21.667 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

Pozostałe równania w (5.122) wykorzystujemy do obliczenia reakcji

$$R_1 = -80.000 + 0.0335 \cdot 10^3 \cdot 0.0870 - 13.4097 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} + 0.0335 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = -71.837 \text{ kN}$$

$$R_2 = -0.0168 \cdot 10^3 \cdot 0.0870 - 26.8362 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} - 0.0168 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = 2.379 \text{ kN}$$

$$R_3 = -53.333 + 0.1118 \cdot 10^3 \cdot 0.0870 + 0.0168 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} + 0.0559 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = -39.172 \text{ kNm}$$

$$R_4 = -80.000 - 0.0335 \cdot 10^3 \cdot 0.0870 + 13.4100 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} - 0.0335 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = -88.163 \text{ kN}$$

$$R_7 = 0$$

$$R_8 = -0.0120 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} - 0.0300 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = -2.379 \text{ kN}$$

$$R_9 = 0.0300 \cdot 10^3 \cdot -0.1926 \cdot 10^{-3} + 0.0500 \cdot 10^3 \cdot 0.0794 = 3.963 \text{ kNm}$$

5. Obliczenie wektorów sił przywęzłowych w elementach. Siły przywęzłowe możemy obliczyć z równania równowagi elementów skończonych w lokalnych układach współrzędnych. Dla celów dydaktycznych (nie do końca zgodnie z algorytmem MES) najpierw obliczymy siły przywęzłowe w układzie współrzędnych globalnych, a następnie dopiero otrzymane wektory przemieszczeń przetransformujemy do układów lokalnych. W analizie statycznej konstrukcji prętowych jest to nieraz postępowanie dogodniejsze.

Element 1 (rys.5.34)

Wektor stopni swobody elementu w układzie współrzędnych globalnych

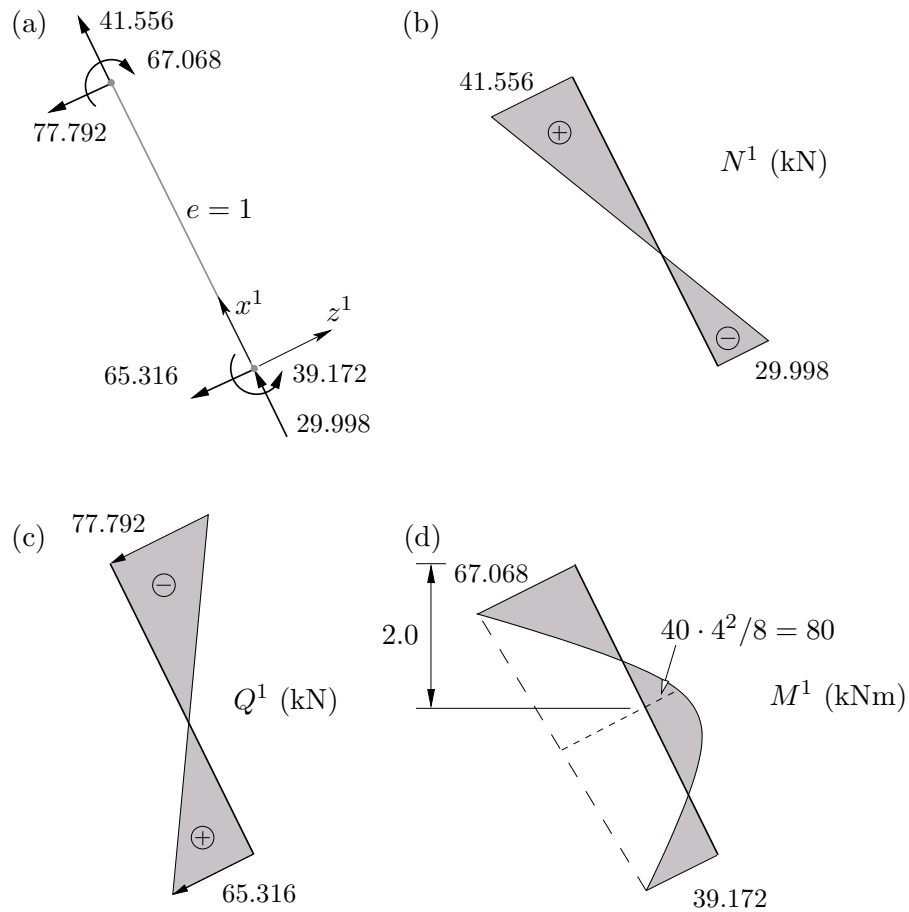
$$\mathbf{Q}^1 = \{0 \ 0 \ 0.0870 \ 0 \ -0.1926 \cdot 10^{-3} \ 0.0794\}$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych globalnych

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{Q}^1 - \mathbf{P}^{1b} = \begin{bmatrix} -71.837 \\ 2.379 \\ -39.172 \\ -88.163 \\ -2.379 \\ 67.068 \end{bmatrix}$$

Wektor sił przywęzłowych w układzie współrzędnych lokalnych

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{T}^1 \mathbf{R}^1 = \{29.998 \quad -65.316 \quad -39.172 \quad 41.556 \quad -77.792 \quad 67.068\}$$



Rys.5.34. Siły przywęzłowe dla elementu 1 (a) i wykresy sił podłużnych i poprzecznych (b), (c) oraz momentu zginającego (d)

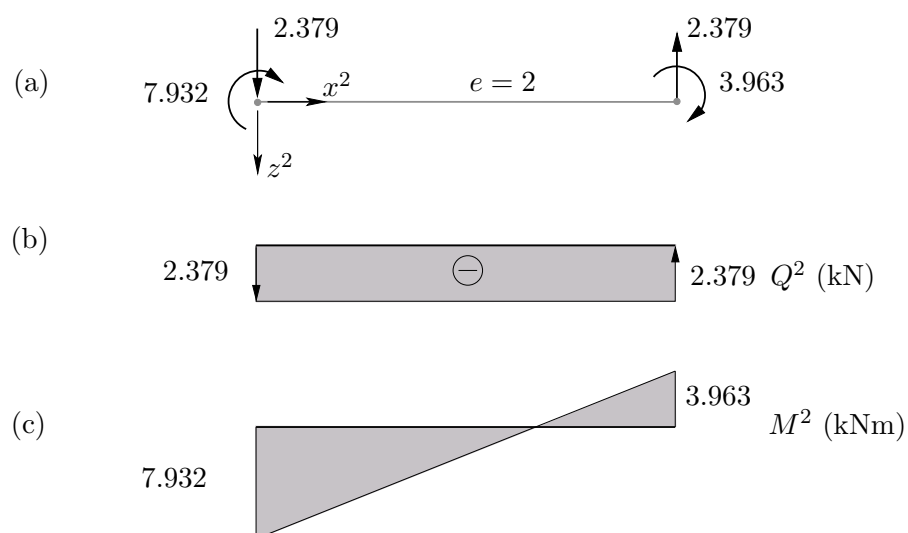
Element 2 (rys.5.35)

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = \{0 \quad -0.1926 \cdot 10^{-3} \quad 0.0794 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Wektor sił przywęzłowych ($\mathbf{q}^2 = \mathbf{Q}^2$)

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2 = \{0 \quad 2.379 \quad 7.932 \quad 0 \quad -2.379 \quad 5.143\}$$



Rys.5.35. Siły przywęzłowe dla elementu 2 (a) i wykresy siły poprzecznej (b) oraz momentu zginającego (c)

Rama z rys.5.27 została również rozwiązana za pomocą pakietu CALFEM [2]. Czytelnik może, porównując obliczenia ręczne z poszczególnymi instrukcjami programu, utrwalić sobie algorytm rozwiązywania konstrukcji prętowych metodą elementów skończonych.

Wydruk przykładowych instrukcji z pakietu CALFEM przedstawiono poniżej.

```
function rama()
% definicja macierzy stopni swobody dla elementów
Edof=[1 1 2 3 4 5 6;
      2 4 5 6 7 8 9];
K=zeros(9);
F=zeros(9,1);

% uwzględnienie sił węzłowych
F(6)=75;
```

```
% stałe materiałowe
E=2e7;
I=6.25e-6;
A=7.5e-3;
ep=[E,A,I];

% macierz współrzędnych węzłów
Coord=[2 4;
        0 0;
        5 0];

% macierz stopni swobody
Dof=[1 2 3;
     4 5 6;
     7 8 9];

%obliczenie wektora obciążenia od obciążenia równomiernego
%eq=[sx,sy]*dl_sil*[dx,-dy;dy,dx]/(dl_el)^2
eq=[40,0]*4*[-2,4;-4,-2]/((-2)^2+(-4)^2);

% obliczenie wektorów współrzędnych dla elementów
[Ex,Ey]=coordxtr(Edof,Coord,Dof,2);

%obliczenie macierzy sztywności i wektora zastępników dla elementów
[Ke1,Fe1]=beam2e(Ex(1,:),Ey(1,:),ep,eq);
Ke2=beam2e(Ex(2,:),Ey(2,:),ep);

%agregacja macierzy sztywności i wektora obciążenia
[K,F]=assem(Edof(1,:),K,Ke1,F,Fe1);
K=assem(Edof(2,:),K,Ke2);

%uwzględnienie warunków brzegowych
bc=[ 1 0; 2 0; 3 0.087; 4 0; 7 0 ; 8 0; 9 0];

%wyliczenie wektora przemieszczeń i reakcji
[Q,R]=solveq(K,F,bc)
```

```
% powrót do elementu - obliczenie sił przywęzłowych
Q1=extract(Edof(1,:),Q);
f1=beam2s(Ex(1,:),Ey(1,:),ep,Q1,eq)
Q2=extract(Edof(2,:),Q);
f2=beam2s(Ex(2,:),Ey(2,:),ep,Q2)
```

Poniżej wydruk z wynikami

Q =

```
      0
      0
  0.0870
      0
 -0.0002
  0.0794
      0
      0
      0
```

R =

```
-71.8366
  2.3790
-39.1724
-88.1634
 -0.0000
      0
      0
 -2.3790
  3.9630
```

f1 =

```
-29.9985   65.3165   39.1724
 41.5557  -77.7919   67.0681
```

f2 =

```
      0   -2.3790  -7.9319
      0   -2.3790   3.9630
```

e	\mathbf{r}^{eb}	Obliczenia ręczne	CALFEM	
			$Q_3 = 0.087$	$Q_3 = 0$
Element 1	N_1^1	29.998	29.9985	30.4289
	Q_1^1	-65.316	-65.3165	-67.7179
	M_1^1	-39.172	-39.1724	-47.6156
	N_2^1	41.556	41.5557	41.1253
	Q_2^1	-77.792	-77.7919	-75.3904
	M_2^1	67.068	67.0681	64.7718
Element 2	N_1^2	0	0	0
	Q_1^2	2.379	2.3790	3.0679
	M_1^2	7.932	7.9319	10.2282
	N_2^2	0	0	0
	Q_2^2	-2.379	-2.3790	-3.0679
	M_2^2	3.963	3.9630	5.1114

Tabela 5.7. Porównanie wyników obliczeń ramy z przykładu 5.9

W tab.5.7 zestawiono wyniki obliczeń ręcznych z obliczeniami programem CALFEM z niejednorodnym ($Q_3 = 0.087$) i jednorodnym warunkiem brzegowym ($Q_3 = 0$). Należy jednak zwrócić uwagę na znakowanie sił przywęzłowych dla wyników z CALFEMa. W odróżnieniu od klasycznego MES zwroty tych sił na początku elementu skończonego są przeciwne do zwrotów sił przekrojowych na końcu elementu.

5.8. Równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego

W tym punkcie przedstawimy zastosowanie MES do rozwiązywania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego, które można zapisać w ogólnej postaci

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_0 u = f \quad (5.124)$$

gdzie $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$, $a_0 = a_0(x, y)$ i $f = f(x, y)$ są znanymi funkcjami zdefiniowanymi w obszarze Ω .

Przyjmując oznaczenia

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

gdzie ∇u jest wektorem gradientu funkcji u , równanie (5.124) przyjmie postać macierzową

$$-\operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla u) + a_0 u = f \quad (5.126)$$

w której div jest oznaczeniem dywergencji różniczkowalnego pola wektorowego

$$\text{(dla } \mathbf{a} = (a_x, a_y) : \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \text{)}.$$

Równanie (5.124) jest modelem matematycznym dla wielu problemów inżynierskich, jak na przykład skręcanie pręta czy też ustalony przepływ ciepła. W porównaniu z dotychczas rozwiązywanymi zadaniami jednowymiarowymi obecnie poziom trudności rozwiązania MES wzrasta, ponieważ nie tylko mamy aproksymować rozwiązanie równania z pochodnymi cząstkowymi, ale również sam obszar rozwiązania należy aproksymować, dobierając odpowiednią siatkę elementów skończonych².

5.8.1. Model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza

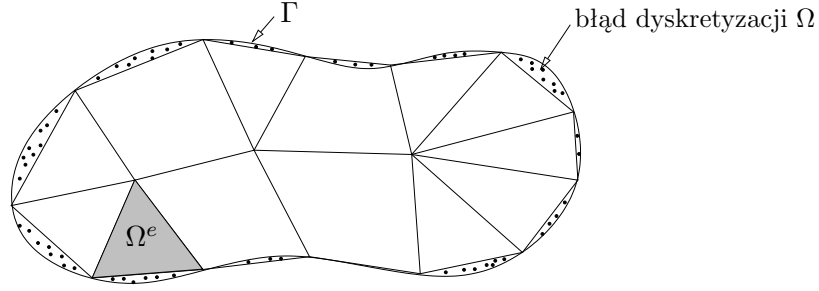
1. Dyskretyzacja obszaru. Obszar dwuwymiarowy może być zdyskretyzowany elementami trójkątnymi i/lub elementami czworobocznymi tak, aby możliwie najlepiej opisać obszar Ω , rys.5.36.

W dalszym ciągu założymy, że obszar Ω został w całości zdyskretyzowany elementami trójkątnymi Ω^e .

2. Wyznaczenie równań MES dla elementów. Rozważymy typowy element skończony Ω^e , nie określając na razie bliżej jego geometrii. Funkcjami kształtu są N_i^e , $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie n jest liczbą węzłów w elemencie.

a. Sformułowanie wariacyjne. Zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 4. mnożymy równanie (5.124) przez funkcję wagową $v^e \in S^h \subset H^1(\Omega^e)$, następnie

²Powszechnie dostępny program dydaktyczny *freefem+* do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych w 2D metodą elementów skończonych można znaleźć pod adresem: <ftp://ftp.ann.jussieu.fr/~pironneau>

Rys.5.36. Dyskretyzacja obszaru Ω elementami trójkątnymi i czworobocznymi

całkujemy po obszarze Ω^e i w końcu wykonujemy uogólnione całkowanie przez części, otrzymując równanie w formie

$$\begin{aligned}
 0 = \int_{\Omega^e} & \left[\frac{\partial v^e}{\partial x} \left(a_{11}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{12}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial v^e}{\partial y} \left(a_{21}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{22}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + a_0^e v^e u^e - v^e f^e \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} v^e \left[n_x^e \left(a_{11}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{12}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + n_y^e \left(a_{21}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{22}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) \right] ds
 \end{aligned} \quad (5.127)$$

gdzie n_x^e i n_y^e są współrzędnymi (cosinusami kierunkowymi) wektora \mathbf{n}^e , normalnego do brzegu Γ^e , i ds jest elementem łukowym brzegu elementu skończonego

$$\mathbf{n}^e = n_x^e \mathbf{i} + n_y^e \mathbf{j} = \cos \alpha^e \mathbf{i} + \sin \alpha^e \mathbf{j} \quad (5.128)$$

Z analizy członu brzegowego w (5.127) wynika, że u jest niewiadomą pierwotną (i dla niej ustalone będą podstawowe warunki brzegowe), natomiast wyspecyfikowana funkcja

$$q_n^e \equiv n_x^e \left(a_{11}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{12}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) + n_y^e \left(a_{21}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} + a_{22}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) \quad (5.129)$$

jest naturalnym warunkiem brzegowym (co oznacza, że q_n^e jest niewiadomą wtórną). Funkcja q_n^e ma zwykle konkretną interpretację fizyczną, na przykład w problemie ustalonego przepływu ciepła przez ośrodek anizotropowy (a_{ij} jest wówczas współczynnikiem przewodnictwa cieplnego), będzie to intensywność strumienia przepływu ciepła przez brzeg elementu.

Wykorzystując oznaczenia (5.125), równanie wariacyjne (5.127) i naturalny warunek brzegowy (5.129) można zapisać w formie macierzowej

$$\int_{\Omega^e} [(\nabla v^e)^T \mathbf{D}^e \nabla u^e + a_0^e v^e u^e] dx dy = \oint_{\Gamma^e} v^e q_n^e ds + \int_{\Omega^e} v^e f^e dx dy \quad (5.130a)$$

$$q_n^e = (\nabla u^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{n}^e \quad (5.130b)$$

b. Aproksymacja MES. Z postaci równania wariacyjnego (5.130a) wynika, że aproksymacja dla u^e powinna być co najmniej dwuliniowa ze względu na x i y tak, że $u^e \in H^1(\Omega^e)$. Przyjmijmy, że u^e jest aproksymowana wzorem

$$u^e = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e \quad \text{oraz} \quad v^e = \sum_{j=1}^n d_j^e N_j^e \quad (5.131)$$

gdzie u_j^e są wartościami u^e w punktach (x_j, y_j) , d_j^e są parametrami funkcji wagowej v^e , a N_j^e – funkcjami kształtu z własnością, że

$$N_i^e(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

Funkcje te dla elementu trójkątnego wyprowadzimy w punkcie 5.8.2. Podstawiając (5.131) do (5.130a), otrzymamy równanie MES dla elementu w postaci

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j^e = F_i^e \quad (5.132)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left(a_{11}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + a_{12}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \left(a_{21}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + a_{22}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a_0^e N_i^e N_j^e \right] dx dy \\ F_i^e &= \int_{\Omega^e} f^e N_i^e dx dy + \oint_{\Gamma^e} q_n^e N_i^e ds \equiv f_i^e + P_i^e \end{aligned} \quad (5.133a)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y} \right)^T \right] \mathbf{D}^e \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial y} \end{bmatrix} + a_0^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e \right\} dx dy = \\
 &= \int_{\Omega^e} \left[(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e + a_0^e (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e \right] dx dy \\
 \mathbf{F}^e &= \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T f^e dx dy + \oint_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^T q_n^e ds = \mathbf{f}^e + \mathbf{P}^e
 \end{aligned} \tag{5.133b}$$

gdzie:

\mathbf{B}^e – macierz pochodnych funkcji kształtu (o wymiarze $2 \times n$).

Macierz \mathbf{K}^e jest symetryczna, jeśli $a_{ij}^e = a_{ji}^e$.

3. Agregacja macierzy elementów. Agregacja macierzy odbywa się według tych samych zasad, które wykorzystaliśmy w problemach jednowymiarowych. Dla przykładu rozważmy dwa trójkątne elementy skończone Ω^e i Ω^f , pokazane na rys.5.37. Macierz topologii ma postać przedstawioną w tab.5.8.

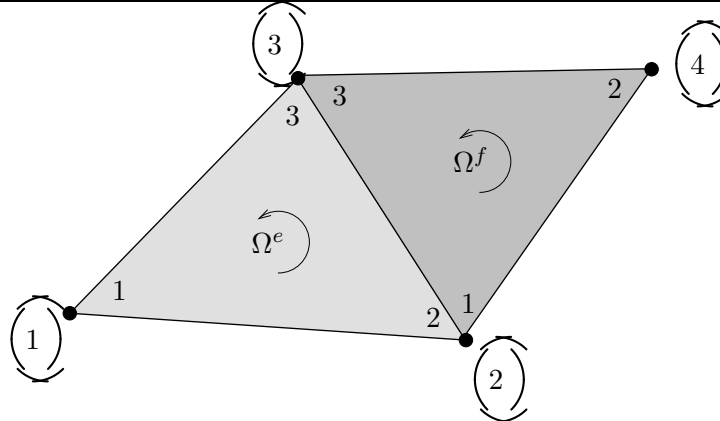
Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	2 4 3

Tabela 5.8. Macierz topologii dla dwóch elementów trójkątnych

Dla identyfikacji numerów lokalnych i globalnych węzłów elementów na rys.5.37 podano obydwie numeracje (numery globalne w kółkach). Kolejność numerów węzłów w tab.5.8 jest określona przez porządek zdefiniowany strzałkami (przeciwny do obrotu wskazówek zegara).

Z rys.5.37 wynika, że

$$U_1 = u_1^e \quad U_2 = u_2^e = u_1^f \quad U_3 = u_3^e = u_3^f \quad U_4 = u_2^f \tag{5.134}$$



Rys.5.37. Agregacja dwóch elementów trójkątnych

Powyzsze warunki gwarantują, że funkcja pierwotna u jest ciągła wzdłuż wspólnego brzegu 2-3.

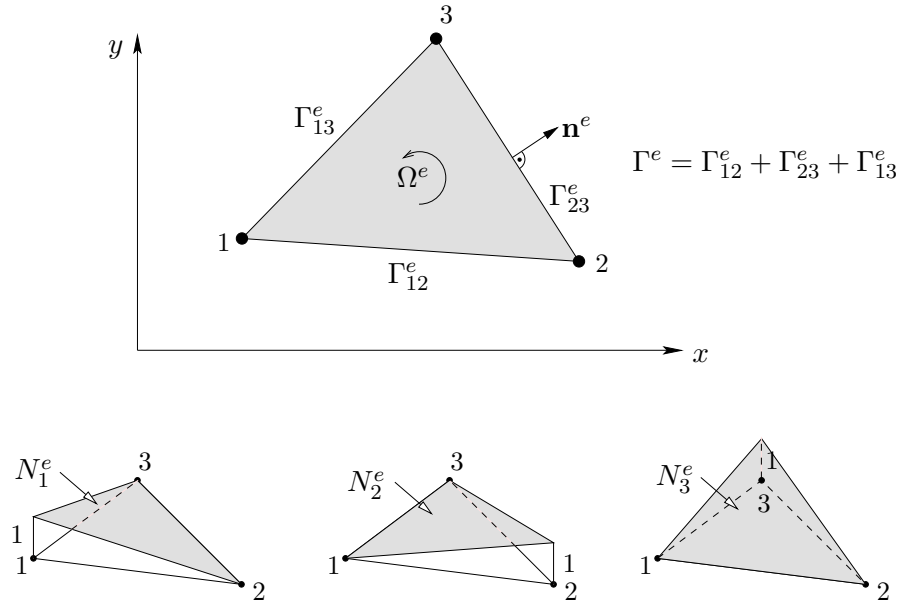
Na podstawie tab.5.8 i warunków (5.134) obliczamy globalną macierz \mathbf{K} i globalny wektor \mathbf{F} układu równań MES dla dwóch elementów

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & 0 \\ K_{21}^e & K_{22}^e + K_{11}^f & K_{23}^e + K_{13}^f & K_{12}^f \\ K_{31}^e & K_{32}^e + K_{31}^f & K_{33}^e + K_{33}^f & K_{32}^f \\ 0 & K_{21}^f & K_{23}^f & K_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e + F_1^f \\ F_3^e + F_3^f \\ F_2^f \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

4. Uwzględnienie warunków brzegowych. Warunki brzegowe dla niewiadomych pierwotnych i wtórnych uwzględnia się w taki sam sposób, jak w problemach jednowymiarowych. Agregując wektory elementów \mathbf{P}^e , musimy oddzielnie przeanalizować elementy z wnętrza siatki i elementy, których bok (lub boki) tworzą brzeg obszaru Ω . Dla elementów wewnętrznych Ω^e suma P_i^e w węźle wewnętrznym obszaru jest równa zero. Jeśli natomiast jeden z boków elementu Ω^r stanowi część brzegu Γ , to wówczas na tym boku q_n^r jest albo znane, albo nieznanne. Jeśli q_n^r jest znane, to P_i^r obliczymy z drugiego składnika wzoru (5.133a)₂. Jeśli q_n^r jest nieznanne, to wtedy na brzegu tym będzie znana niewiadoma pierwotna u^r . Wówczas P_i^r będzie niewiadomą wtórną obliczaną po wyznaczeniu pierwotnych stopni swobody.

5.8.2. Liniowy element trójkątny

Jest to najprostszy element dwuwymiarowy o trzech węzłach (rys.5.38).



Rys.5.38. Liniowy element trójkątny i funkcje kształtu

Aproksymacja u^e dla elementu jest funkcją liniową ze względu na x i y

$$u^e = c_0^e + c_1^e x + c_2^e y \quad (5.136)$$

Współczynniki c_k^e , $k = 0, 1, 2$ obliczymy z warunków

$$u_i^e \equiv u^e(x_i, y_i) = c_0^e + c_1^e x_i + c_2^e y_i \quad i = 1, 2, 3$$

gdzie (x_i, y_i) są globalnymi współrzędnymi wężła i elementu Ω^e . Otrzymujemy w ten sposób układ równań w postaci

$$\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^e \\ c_1^e \\ c_2^e \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

Podstawiając rozwiązanie (5.137) do (5.136), otrzymamy po uporządkowaniu składników wzór

$$u^e = \sum_{i=1}^3 u_i^e N_i^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{u}^e \quad (5.138)$$

gdzie

$\mathbf{u}^e = \{u_1^e, u_2^e, u_3^e\}$ – wektor stopni swobody,

$\mathbf{N}^e(x, y) = [N_1^e(x, y), N_2^e(x, y), N_3^e(x, y)]$ – macierz jednowierszowa funkcji kształtu.

oraz

$$\begin{aligned} N_i^e &= \frac{1}{2A^e}(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \\ \alpha_i^e &= x_j y_k - x_k y_j \quad \beta_i^e = y_j - y_k \quad \gamma_i^e = x_k - x_j \\ & \quad i \neq j \neq k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.139)$$

i A^e jest powierzchnią trójkąta (lub: $2A^e$ jest wyznacznikiem macierzy układu równań (5.137)). Indeksy we współczynnikach $\alpha_i^e, \beta_i^e, \gamma_i^e$ zmieniają się wg permutacji podstawowej (np. dla α_1^e jest $i = 1, j = 2, k = 3$, czyli $\alpha_1^e = x_2 y_3 - x_3 y_2$). Znak wyznacznika się zmieni, jeśli węzły zostaną ponumerowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Funkcje kształtu N_i^e spełniają warunek kompletności $\sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) = 1$.

Należy zauważyć, że pochodne N_i^e względem x i y są stałe, co oznacza, że pochodne funkcji niewiadomej u^e są też stałe w całym elemencie. Stałość pochodnej funkcji kształtu pozwala łatwo obliczyć elementy macierzy \mathbf{K}^e .

Przyjmując, dla przykładu, $a_0^e = a_{12}^e = a_{21}^e = 0$ i $a_{11}^e = a_{22}^e = a^e = \text{const}$, wzór (5.133a)₁ przyjmie postać

$$K_{ij}^e = a^e \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy$$

stąd po podstawieniu

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{\beta_i^e}{2A^e} \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{\gamma_i^e}{2A^e}$$

otrzymujemy

$$K_{ij}^e = \frac{a^e}{4(A^e)^2} (\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e) \left(\int_{\Omega^e} dx dy \right) = \frac{a^e}{4A^e} (\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (5.140a)$$

Powyższy wzór można też zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{B}^e a^e A^e \quad (5.140b)$$

gdzie w tym przypadku macierz pochodnych funkcji kształtu ma postać ($n = 3$)

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \beta_1^e & \beta_2^e & \beta_3^e \\ \gamma_1^e & \gamma_2^e & \gamma_3^e \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

5.8.3. Ustalony przepływ ciepła w obszarze dwuwymiarowym

Analiza ustalonego przepływu ciepła w obszarze dwuwymiarowym jest praktycznym przykładem rozwiązania równania cząstkowego rzędu drugiego. Równanie Poissona rządzące tym problemem jest specjalnym przypadkiem równania (5.124) i dla materiału jednorodnego i izotropowego w obszarze dwuwymiarowym o stałej grubości (przyjmujemy $h = 1$) ma ono postać (patrz również p.1.4)

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{f}{k} \quad (5.142)$$

gdzie

$T(x, y)$ – funkcja temperatury,

k – współczynnik przewodnictwa cieplnego ($\text{J}/^\circ\text{C m s}$),

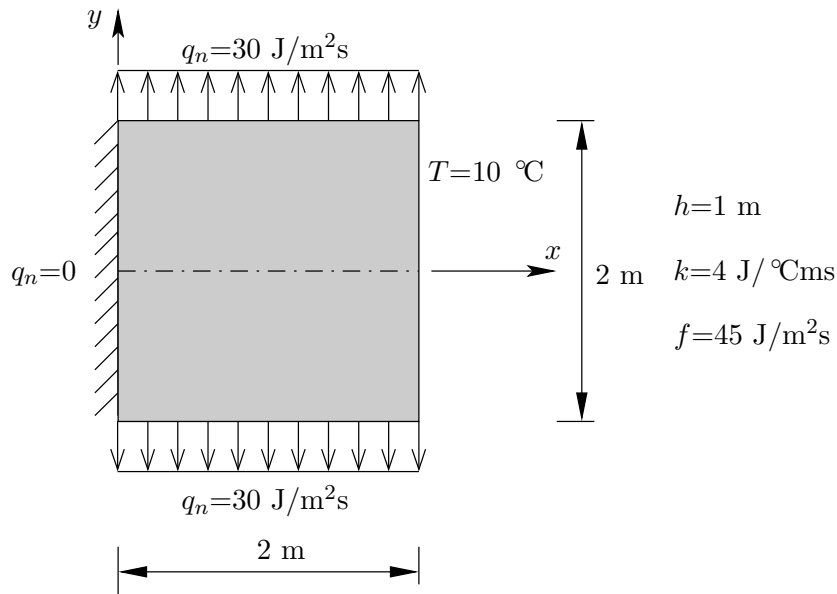
f – intensywność generacji ciepła wewnątrz ciała ($\text{J} / \text{m}^2\text{s}$).

W problemie tym niewiadomą pierwotną jest temperatura T , a niewiadomą wtórną intensywność strumienia przepływu ciepła, przepływającego przez jednostkę powierzchni brzegu q_n (o znaku przeciwnym do przyrostu temperatury) na części brzegu, gdzie znany jest rozkład temperatury.

Przykład 5.10. Wyznamy rozkład temperatury dla tarczy pokazanej na rys.5.39. Jest ona wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego, dla którego $k = 4 \text{ J}/^\circ\text{Cms}$. Grubość tarczy $h = 1\text{m}$. Intensywność generacji ciepła $f = 45 \text{ J}/\text{m}^2\text{s}$. Na brzegu $x = 2\text{m}$ zadany jest podstawowy warunek brzegowy $T = 10^\circ\text{C}$, natomiast naturalny warunek brzegowy $q_n = 30 \text{ J}/\text{m}^2\text{s}$ jest określony na brzegach $y = 1\text{m}$ i $y = -1\text{m}$ oraz $q_n = 0$ jest na brzegu $x = 0$.

Uwzględniając symetrię tarczy względem osi x rozpatrzmy jej połowę pokazaną na rys.5.40a.

Tarczę z rys.5.40a zdyskretyzowano dwoma liniowymi elementami trójkątnymi, rys.5.40b. Macierz topologii została podana w tab.5.9.



Rys.5.39. Tarcza z przepływem ciepła

Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	1 3 4

Tabela 5.9. Macierz topologii dla przykładu 5.10

1. Macierze \mathbf{K}^e dla elementów

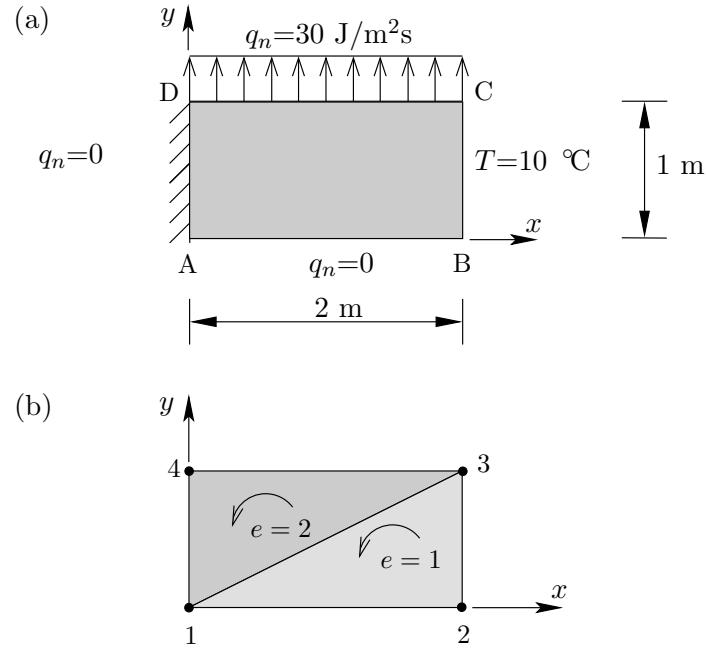
Macierze \mathbf{K}^e dla elementów obliczymy, korzystając ze wzoru (5.140b) (przyjmując, że $a = k$).

Element 1: $i = 1, j = 2, k = 3, A^1 = 1, x_i = y_i = 0, x_j = 2, y_j = 0, x_k = 2, y_k = 1$

$$N_1^1 = \frac{1}{2}(2 - y) \quad N_2^1 = \frac{1}{2}(x - 2y) \quad N_3^1 = y$$

Macierz \mathbf{B}^1 obliczona wg (5.141) wynosi

$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.143)$$



Rys.5.40. Rozwiązująca tarcza (a) oraz dyskretyzacja skończenie elementowa (b)

stąd po podstawieniu do (5.140b) dostaniemy

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Element 2: $i = 1, j = 2, k = 3, A^2 = 1, x_i = y_i = 0, x_j = 2, y_j = 1, x_k = 0, y_k = 1$

$$N_1^2 = 1 - y \quad N_2^2 = \frac{1}{2}x \quad N_3^2 = \frac{1}{2}(-x + 2y)$$

Podobnie jak w elemencie 1 mamy

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

oraz

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Wektor \mathbf{F}^e dla elementów

Z pierwszego składnika wzoru (5.133a) dla \mathbf{f}^e otrzymamy

$$\mathbf{f}^e = \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} f^e dx dy$$

skąd mamy

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2 = \frac{f}{3} A^e \{1 \ 1 \ 1\} = 15 \{1 \ 1 \ 1\}$$

Wektor \mathbf{P}^e obliczymy z drugiego składnika wzoru (5.133a), odpowiednio dla brzegu B-C elementu 1 i dla brzegu D-C elementu 2 (pamiętając o zmianie znaku dla q_n)

Element 1

$$\mathbf{P}_{B-C}^1 = - \int_0^1 q_n \begin{bmatrix} N_1^1(x=2, y) \\ N_2^1(x=2, y) \\ N_3^1(x=2, y) \end{bmatrix} dy = - \int_0^1 q_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1-y \\ 0 \end{bmatrix} dy = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \end{bmatrix}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia $P_2^{1b} = - \int_0^1 q_n N_2^1(x=2, y) dy$ i $P_3^{1b} = - \int_0^1 q_n N_3^1(x=2, y) dy$

Element 2

$$\mathbf{P}_{D-C}^2 = - \int_0^2 30 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x}{2} \\ 1 - \frac{x}{2} \end{bmatrix} dx = - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Dodając wektory \mathbf{f}^e i \mathbf{P}^e , otrzymamy wektory \mathbf{F}^e w formie

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 + P_2^{1b} \\ 15 + P_3^{1b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 - 30 \\ 15 - 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

3. Agregacja i budowa równań MES

Na podstawie macierzy topologii budujemy macierze globalne \mathbf{K} i \mathbf{F} , otrzymując układ równań

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 + P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \\ -15 \end{bmatrix} \quad (5.145)$$

4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych

Wprowadzając podstawowe warunki brzegowe $T_2 = 10$ i $T_3 = 10$ do (5.145), otrzymamy układ czterech równań z dwiema niewiadomymi podstawowymi i dwiema niewiadomymi wtórnymi

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 10 \\ 10 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 + P_2^{1b} \\ P_3^{1b} \\ -15 \end{bmatrix} \quad (5.146)$$

Z pierwszego i czwartego równania dostaniemy

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 30 \\ 10 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -5 \end{bmatrix}$$

z rozwiązaniem

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

Niewiadome wtórne obliczymy z równania drugiego i trzeciego, otrzymując

$$P_2^{1b} = - \int_0^1 q_n(1-y) dy = -25 \quad P_3^{1b} = - \int_0^1 g_n y dy = -5$$

Funkcje kształtu N_2^1 i N_3^1 są dodatnie, co oznacza, że q_n jest dodatnie wzdłuż brzegu B-C, tzn. aby na brzegu B-C utrzymana została temperatura $T=10$ °C, to wzdłuż tego brzegu ciepło musi być wydzielane. Równanie bilansu cieplnego jest spełnione, ponieważ $\sum_{i=1}^4 F_i = 0$.

5. Obliczenie wektora intensywności strumienia przepływu ciepła w elementach

Wektor intensywności strumienia przepływu ciepła w elemencie obliczymy według wzoru Fouriera

$$\mathbf{q}^e = -\mathbf{D}^e \nabla T^e = -k^e \nabla T^e = -k^e \mathbf{B}^e \mathbf{T}^e \quad (5.147)$$

Element 1

$$\mathbf{T}^1 = \{20 \ 10 \ 10\}$$

Wykorzystując (5.143), mamy

$$\mathbf{q}^1 = -2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

Element 2

$$\mathbf{T}^2 = \{20 \ 10 \ 15\}$$

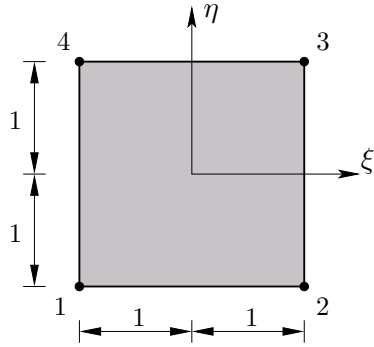
Korzystając z (5.144), otrzymamy

$$\mathbf{q}^2 = -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ (J/m}^2\text{s)}$$

5.8.4. Model skończenie elementowy Bubnowa-Galerkina

Ten model skończenie elementowy przedstawimy na przykładzie prostej postaci równania Poissona (5.124)

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \quad \text{w } \Omega \quad (5.148)$$



Funkcje interpolacyjne dla zmiennych:

$$u : \frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i^2)(\eta\eta_i - 2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} : -\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} : -\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} : \frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Rys.5.41. Sześcienne funkcje kształtu Hermite'a dla elementu prostokątnego we współrzędnych unormowanych (ξ, η)

Ogólnie, w modelu skończenie elementowym metody residuów ważonych poszukujemy rozwiązania przybliżonego $u^e \in S^h \subset H^2(\Omega^e)$ funkcji u w elemencie Ω^e , w postaci

$$u^e = \sum_{j=1}^{16} u_j^e N_j^e(x, y) \quad (5.149)$$

gdzie N_j^e są funkcjami kształtu Hermite'a i u_1^e, u_5^e, u_9^e i u_{13}^e są wartościami u^e w czterech węzłach elementu prostokątnego, natomiast u_2^e, u_6^e, u_{10}^e i u_{14}^e – wartościami pochodnej $\frac{\partial u^e}{\partial x}$ w czterech węzłach i tak samo dla pochodnych $\frac{\partial u^e}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 u^e}{\partial x \partial y}$, rys.5.41.

Sformułowanie wariacyjne dla elementu ma formę

$$0 = \int_{\Omega^e} v^e \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11}^e \frac{\partial u^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{22}^e \frac{\partial u^e}{\partial y} \right) - f^e \right] dx dy$$

co prowadzi znowu do równanie MES dla elementu

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.150)$$

W metodzie Bubnowa-Galerkina mamy $v^e = N_i^e$ i elementy macierzy \mathbf{K}^e i wektora \mathbf{F}^e obliczamy wg wzorów

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= - \int_{\Omega^e} N_i^e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{22}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ F_i^e &= \int_{\Omega^e} N_i^e f^e dx dy \end{aligned} \quad (5.151)$$

W taki sam sposób można zbudować model skończenie elementowy dla innej metody residuów ważonych.

5.9. Układ równań MES dla LPTS

5.9.1. Sformułowanie lokalne

1. Układ równań liniowego problemu teorii sprężystości (LPTS). Stosując metodę elementów skończonych do analizy statycznej konstrukcji, korzystać będziemy z zapisu macierzowego. Dlatego najpierw napiszemy równania macierzowe LPTS, a dopiero potem przedstawimy wynikające z nich sformułowania wariacyjne.

a. Równania geometryczne Cauchy'ego. Równania te

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z \quad (5.152a)$$

z podstawowymi (kinematycznymi) warunkami brzegowymi

$$u_i(x, y, z) = u_i^o \quad \text{na powierzchni ciała } S_u \quad (5.152b)$$

w zapisie macierzowym mają postać

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (5.153a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^o \quad \text{na powierzchni ciała } S_u \quad (5.153b)$$

W powyższych równaniach występują wektory i macierz:

$\mathbf{u} = \{u_x \equiv u(x, y, z), u_y \equiv v(x, y, z), u_z \equiv w(x, y, z)\}$ – wektor funkcji przemieszczeń,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}$ – wektor odkształceń ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – odkształcenia liniowe; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – kąty odkształcenia postaciowego),

\mathbf{L} – macierz operatorów różniczkowych.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.154)$$

b. Równania równowagi Naviera. Jest to układ równań

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{w objętości ciała } V \quad (5.155a)$$

z naturalnymi (statycznymi) warunkami brzegowymi

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^o \quad \text{na powierzchni ciała } S_\sigma \quad (5.155b)$$

gdzie:

$$S = S_u \cup S_\sigma \text{ i } S_u \cap S_\sigma = \emptyset,$$

S – powierzchnia ograniczająca V ,

n_x, n_y, n_z – współrzędne wektora normalnego do powierzchni S_σ .

Zapis macierzowy tych równań ma postać

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{w objętości ciała } V \quad (5.156a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^o \quad \text{na powierzchni ciała } S_\sigma \quad (5.156b)$$

W powyższych wzorach zdefiniowane są wektory:

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\}$ – wektor naprężeń ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – naprężenia normalne, $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – naprężenia styczne),

$\mathbf{f} = \{f_x \ f_y \ f_z\}$ – wektor intensywności sił objętościowych,

$\mathbf{t} = \{t_x \ t_y \ t_z\}$ – wektor intensywności sił powierzchniowych.

c. Równania fizyczne Hooke’a. Równania fizyczne Hooke’a dla materiału liniowo sprężystego mają postać

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.157a)$$

gdzie:

G – moduł Kirchhoffa,

ν – liczba Poissona,

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$,

δ_{ij} – delta Kroneckera.

W zapisie macierzowym równanie to ma formę

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.157b)$$

gdzie:

\mathbf{D} – macierz modułów sprężystości (nazywana też macierzą konstytutywną lub macierzą sztywności materiału).

2. Sformułowanie wariacyjne. Sformułowanie wariacyjne otrzymamy, korzystając z metody residuów ważonych

$$\int_V v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) dv = 0 \quad i, j = x, y, z \quad (5.158)$$

dla $v_i \in S^h \subset H^1(V)$ z warunkiem, że $v_i = 0$ na powierzchni S_u .

Podstawiając do (5.158) wzór

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

otrzymamy równanie

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij}v_i)}{\partial x_j} dv - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv + \int_V v_i f_i dv = 0 \quad (5.159)$$

Dalsze postępowanie wymaga skorzystania z twierdzenia Gaussa o dywergencji

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij}v_i)}{\partial x_j} dv = \int_S \sigma_{ij}v_i n_j ds = \int_{S_u} (\sigma_{ij}n_j)v_i ds + \int_{S_\sigma} t_i^o v_i ds \quad (5.160)$$

Podstawiając (5.160) do (5.159) z warunkiem $v_i = 0$ na S_u , otrzymamy końcową postać sformułowania wariacyjnego

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv = \int_V f_i v_i dv + \int_{S_\sigma} t_i^o v_i ds \quad (5.161a)$$

które po wykorzystaniu symetrii $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $i \neq j$, co prowadzi do równości $\sigma_{ij}v_{i,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, przyjmuje w zapisie macierzowym formę

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dv = \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{f} dv + \int_{S_\sigma} \mathbf{v}^T \mathbf{t}^o ds \quad (5.161b)$$

gdzie wyraźnie zaznaczono zależność $\boldsymbol{\varepsilon}$ od funkcji wagowych zawartych w wektorze \mathbf{v} i zależność $\boldsymbol{\sigma}$ od nieznanego pola rzeczywistych przemieszczeń \mathbf{u} .

Problem liniowej teorii sprężystości można teraz sformułować w następujący sposób:

Należy wyznaczyć przemieszczenia u_i , odkształcenia ε_{ij} i naprężenia σ_{ij} jako wystarczająco gładkie funkcje x, y, z , spełniające równania (5.152a) i (5.157a), warunki brzegowe (5.152b) i równanie wariacyjne (5.161) dla wszystkich funkcji wagowych v_i z własnością, że $v_i = 0$ na powierzchni S_u .

5.9.2. Sformułowanie globalne

Problem brzegowy sformułowany w p.5.9.1 przez układ równań (5.152a) – (5.157b) (nazywany też *eliptycznym problemem brzegowym*) jest samosprężony i może być sformułowany w sposób równoważny w postaci minimalizacji

funkcjonału energii potencjalnej. Dla uwzględnienia niejednorodnych podstawowych warunków brzegowych (oraz, jak się okaże, obliczenia niewiadomych wtórnych) napiszemy funkcyjonał energii potencjalnej w rozszerzonej postaci

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dv - \int_V f_i u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i^0 u_i ds - \int_{S_u} t_i u_i ds \quad (5.162)$$

gdzie niewiadomymi pierwotnymi są funkcje przemieszczeń u_i , a niewiadomymi wtórnymi funkcje obciążenia powierzchniowego t_i , $i = x, y, z$. Funkcyjonał energii w formie (5.162) jest zmodyfikowaną postacią tzw. drugiej rozszerzonej formy funkcyjonału całkowitej energii potencjalnej. Modyfikacja polega na włączeniu do (5.162) pracy nieznanymi sił powierzchniowych t_i na znanych przemieszczeniach u_i , z tym, że warunek $u_i = u_i^0$ na S_u nie jest bezpośrednio wprowadzony do funkcyjonału.

Problem liniowej teorii sprężystości ma teraz następujące sformułowanie:

Należy wyznaczyć przemieszczenia u_i , odkształcenia ε_{ij} i naprężenia σ_{ij} jako wystarczająco gładkie funkcje x, y, z , spełniające równania (5.152a) i (5.157a), warunki brzegowe (5.152b) i minimalizujące funkcyjonał całkowitej energii potencjalnej (5.162).

W dalszej części tego rozdziału omówimy zastosowanie metody elementów skończonych do analizy statycznej tarcz sprężystych w płaskim stanie naprężenia. Model skończenie elementowy Rayleigha-Ritza zbudujemy, minimalizując funkcyjonał (5.162). Ponieważ w modelu tym za niewiadome pierwotne przyjmujemy przemieszczenia, to w mechanice konstrukcji tak sformułowana metoda elementów skończonych jest nazywana *metodą elementów skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym*.

5.9.3. Układ równań MES

Obszar rozwiązania V dzielimy na zbiór elementów skończonych $\{V^e\}$ i przedstawiamy całkowitą energię potencjalną w postaci sumy energii potencjalnej elementów Φ^e

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \left[\frac{1}{2} \int_{V^e} (\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}^e))^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}^e) dv - \int_{V^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e dv + \right. \\ \left. - \int_{S_\sigma^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{t}_o^e ds - \int_{S_u^e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{t}^e ds \right] \quad (5.163)$$

gdzie skorzystano z zapisu macierzowego oraz wykorzystano równanie fizyczne $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e$.

1. Wyznaczenie równań MES dla elementów. Przyjmujemy, że $u_i^e \in H^1(V^e)$, $i = x, y, z$, jest aproksymowane wzorem

$$\mathbf{u}^e(x, y, z) = \mathbf{N}^e(x, y, z) \mathbf{Q}^e \quad (5.164)$$

gdzie

$\mathbf{Q}^e = \{Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_n^e\}$ – wektor stopni swobody (nieznanych parametrów węzłowych elementu),

$\mathbf{N}^e(x, y, z)$ – macierz funkcji kształtu o wymiarze $(3 \cdot n)$,

n – liczba stopni swobody elementu.

Równanie geometryczne (5.153a) po wykorzystaniu (5.164) przyjmie postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L} \mathbf{u}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e \quad (5.165)$$

gdzie, jak już wcześniej definiowaliśmy, $\mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e$ jest macierzą zróżniczkowanych funkcji kształtu. Podstawiając (5.164) i (5.165) do funkcjonału Φ^e , otrzymamy

$$\begin{aligned} \Phi^e &= \frac{1}{2} \int_{V^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e dv - \int_{V^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e dv + \\ &\quad - \int_{S_\sigma^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e ds - \int_{S_u^e} (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e ds = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \left[\int_{V^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dv \right] \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \int_{V^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e dv + \\ &\quad - (\mathbf{Q}^e)^T \left[\int_{S_\sigma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e ds + \int_{S_u^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T (\mathbf{P}^e + \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^{eb}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - (\mathbf{Q}^e)^T \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (5.166)$$

Pierwszy składnik w ostatnim równaniu jest formą kwadratową energii sprężystej elementu skończonego. W równaniu (5.166) wprowadzono następujące oznaczenia macierzy i wektorów:

macierz sztywności elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dv \quad (5.167)$$

wektor obciążenia elementu (równoważników węzłowych obciążenia w elemencie)

$$\mathbf{P}^e = \int_{V^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e dv \quad (5.168)$$

wektor obciążenia brzegu S_σ^e elementu

$$\mathbf{P}^{eb} = \int_{S_\sigma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e ds \quad (5.169)$$

wektor obciążenia brzegu S_u^e elementu

$$\mathbf{R}^{eb} = \int_{S_u^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e ds \quad (5.170)$$

Dodatkowo całkowity wektor obciążenia elementu oznaczono

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{P}^{eb} + \mathbf{R}^{eb} \quad (5.171)$$

Uwagi:

1. Dla obliczenia \mathbf{K}^e należy wyznaczyć \mathbf{B}^e z analizy równań geometrycznych Cauchy'ego oraz \mathbf{D}^e z prawa fizycznego Hooke'a.
2. Ze wzoru na \mathbf{K}^e wynika, że jest to macierz symetryczna ($\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}^e)^T$).
3. Macierz \mathbf{K}^e jest macierzą osobliwą ($\det \mathbf{K}^e = 0$).
4. Wektor \mathbf{P}^{eb} jest znany, natomiast wektor \mathbf{R}^{eb} jest nieznan.

Warunek konieczny ekstremum funkcji energii potencjalnej elementu skończonego $\frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{Q}^e} = \mathbf{0}$ prowadzi do układu równań MES równowagi elementu w formie

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.172)$$

2. Agregacja macierzy elementów. Globalny układ równań MES dla całego ciała zdyskretyzowanego elementami skończonymi otrzymamy z wzoru (5.163), który obecnie ma postać

$$\Phi = \sum_{e=1}^E \Phi^e = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (5.173)$$

gdzie

$\mathbf{K} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{K}^e$ – macierz globalna sztywności,

$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{P}^b + \mathbf{R} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{P}^e + \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{P}^{eb} + \mathop{\text{A}}_{e=1}^E \mathbf{R}^{eb}$ – globalny wektor obciążenia,

\mathbf{Q} – wektor globalny stopni swobody,

A – operator agregacji.

Powtórne wykorzystanie warunku koniecznego ekstremum funkcji, tym razem całkowitej energii potencjalnej, daje układ równań MES równowagi konstrukcji w postaci

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (5.174)$$

3. Uwzględnienie warunków brzegowych. Powtarzając uwagi z p.5.3.1, punkt 4, stwierdzamy, że usunięcie osobliwości macierzy \mathbf{K} w równaniu (5.174) wymaga uwzględnienia podstawowych warunków brzegowych w wektorze pierwotnych stopni swobody \mathbf{Q} . W wektorze prawej strony występuje wektor niewiadomych wtórnych \mathbf{R} . Obliczając ten wektor, wykorzystujemy równania równowagi w węzłach siatki skończenie elementowej. Niewiadome R_i^{eb} są nieznanne, jednak ich suma w węźle jest znana. Jest ona mianowicie równa zeru lub równa się wartości obciążenia skupionego w węźle (jeśli na kierunku R_j nie jest znana niewiadoma pierwotna) bądź jest równa reakcji (jeśli na kierunku R_j niewiadoma pierwotna jest znana). Dalsze postępowanie jest zgodne z procedurą metody elementów skończonych.

5.9.4. Kryteria zbieżności

W tym punkcie podsumujemy kryteria zbieżności metody elementów skończonych dla rozwiązania problemów mechaniki konstrukcji, gdzie niewiadomymi pierwotnymi są funkcje $u_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$. Jest to praktyczna interpretacja kryteriów zbieżności podanych w p.5.2.4.

Zbieżność MES oznacza, że rozwiązanie aproksymacyjne \mathbf{u}^h zmierza do rozwiązania dokładnego \mathbf{u} przy zmniejszaniu wymiarów elementów skończonych. Dla zapewnienia zbieżności muszą być jednocześnie spełnione *warunki kompletności* i *zgodności* (*kompatybilności*).

Warunki kompletności

1. Aproksymacja wektora przemieszczeń \mathbf{u} musi umożliwić opis ruchu sztywnego ciała.
2. Aproksymacja wektora przemieszczeń \mathbf{u} musi umożliwić opis dowolnego stałego stanu odkształceń.

Warunek zgodności

Aproksymacja wektora przemieszczeń \mathbf{u} musi się zmieniać w sposób ciągły na wspólnych brzegach elementów skończonych. Elementy skończone, które nie spełniają warunku zgodności nazywamy *elementami niedostosowanymi*. Są one również z powodzeniem stosowane.

Zbieżność rozwiązania MES wymaga także, aby funkcje kształtu były kompletne. Jeśli

$$u^e(x^e) = \sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) u^e(x_i^e) = \mathbf{N}(x^e) \mathbf{u}^e$$

gdzie wartość funkcji $u^e(x^e)$ w węźle i jest równa

$$u^e(x_i^e) = a_0 + a_1 x_i^e + \dots + a_k x_i^k \quad (5.175)$$

to warunek kompletności wymaga, aby

$$u^e(x^e) = \sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) u^e(x_i^e) = a_0 + a_1 x_i^e + a_2 (x^e)^2 + \dots + a_k (x^e)^k \quad (5.176)$$

Podstawiając (5.175) do (5.176), dostaniemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) (a_0 + a_1 x_i^e + a_2 (x_i^e)^2 + \dots + a_k (x_i^e)^k) \\ = a_0 + a_1 x^e + a_2 (x^e)^2 + \dots + a_k (x^e)^k \end{aligned} \quad (5.177)$$

Porównując ze sobą obie strony równania (5.177) otrzymamy następujące warunki kompletności:

$$\sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) = 1 - \text{kompletność rzędu zerowego,}$$

$$\sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) x_i^e = x^e - \text{kompletność rzędu pierwszego,}$$

· · · · ·

$$\sum_{i=1}^k N_i^e(x^e) (x_i^e)^k = (x^e)^k - \text{kompletność rzędu } k\text{-tego.}$$

Na przykład dla liniowych funkcji kształtu

$$N_1^e(x^e) = 1 - \frac{x^e}{l^e} \quad N_2^e(x^e) = \frac{x^e}{l^e} \quad 0 \leq x^e \leq l^e$$

mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 N_i^e(x^e) &= 1 - \frac{x^e}{l^e} + \frac{x^e}{l^e} = 1 \\ \sum_{i=1}^2 N_i^e(x^e) x_i^e &= \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) \cdot 0 + \frac{x^e}{l^e} \cdot l^e = x^e \end{aligned}$$

Oznacza to, że takie funkcje kształtu mogą być wykorzystane do uzyskania dokładnego rozwiązania problemów, których rozwiązaniem jest funkcja stała lub funkcja liniowa.

Przykład 5.11. Czytelnik może sprawdzić wcześniej wyprowadzone wzory dla macierzy sztywności dla elementu kratowego i belkowego, wykonując powtórnie obliczenia przy wykorzystaniu wzoru (5.167).

Element skończony kratowy

Przyjmując

$$\varepsilon_x^e = \frac{du^e}{dx^e} = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e$$

gdzie

$$\mathbf{q}^e = \{u_1^e \ v_1^e \ u_2^e \ v_2^e\}$$

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & 0 & \frac{1}{l^e} & 0 \end{bmatrix}$$

oraz $\mathbf{D} \equiv E^e$, otrzymamy wzór

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{l^e} \left(\int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T E^e \mathbf{B}^e da \right) dx^e$$

a stąd, dla $E^e A^e = \text{const}$, macierz sztywności (5.75).**Element skończony belkowy**

Podobnie, przyjmując dla teorii zginania Eulera-Bernoulliego

$$\varepsilon_x^e = -z^e \frac{d^2 w^e}{dx^{e2}} = \mathbf{B}^e \mathbf{Q}^e$$

gdzie

$$\mathbf{Q}^e = \{w_1^e \ \varphi_1^e \ w_2^e \ \varphi_2^e\}$$

$$\mathbf{B}^e = -z^e \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^e} + 12 \frac{x^e}{(l^e)^2} & -\frac{4}{l^e} + 6 \frac{x^e}{(l^e)^2} & \frac{6}{l^e} - 12 \frac{x^e}{(l^e)^2} & 6 \frac{x^e}{(l^e)^2} - \frac{2}{l^e} \end{bmatrix} = -z^e \overline{\mathbf{B}}^e$$

oraz $\mathbf{D}^e \equiv E^e I^e$, otrzymamy wzór

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e} (\overline{\mathbf{B}}^e)^T E^e \left(\int_{A^e} (z^e)^2 da \right) \overline{\mathbf{B}}^e dx^e = \int_0^{l^e} (\overline{\mathbf{B}}^e)^T E^e I^e \overline{\mathbf{B}}^e dx$$

który, dla $E^e I^e = \text{const}$, prowadzi do macierzy sztywności (5.98).

5.10. Analiza stanu naprężeń w tarczy

Tarcza jest przykładem konstrukcji spełniającej warunki płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie (x, y) . Wykorzystując sformułowanie globalne z p.5.9.2, przepisemy ważniejsze wzory i oznaczenia dla tego stanu naprężenia.

Wektor funkcji przemieszczeń

$$\mathbf{u} = \{u(x, y) \ v(x, y)\} \quad (5.178)$$

Wektor odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\} \quad (5.179)$$

Wektor naprężeń

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\} \quad (5.180)$$

Wektor intensywności sił objętościowych

$$\mathbf{f} = \{f_x \ f_y\} \quad (5.181)$$

Wektor intensywności sił brzegowych

$$\mathbf{t} = \{t_x \ t_y\} \quad (5.182)$$

Macierz modułów sprężystości

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.183)$$

gdzie

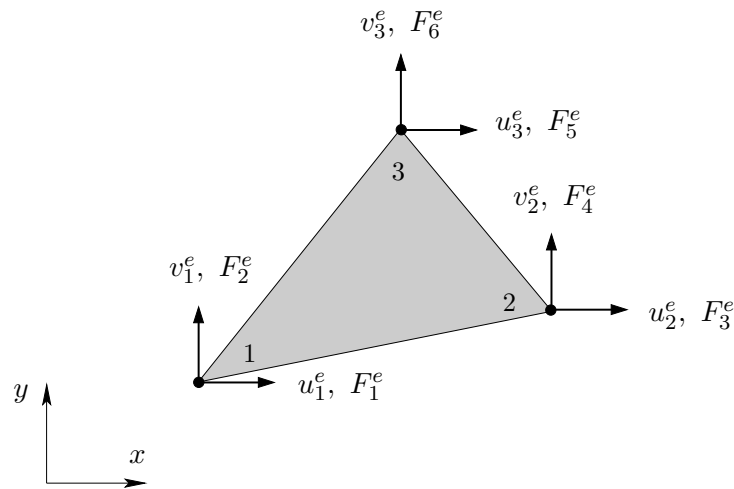
E , ν – moduł sprężystości Younga i liczba Poissona.

Macierz sztywności elementu skończonego

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e h^e dx dy \quad (5.184)$$

gdzie

A^e , h^e – powierzchnia i grubość elementu skończonego.



Rys.5.42. Element skończony trójkątny stałego odkształcenia

Wektor obciążenia elementu

$$\mathbf{P}^e = \int_{A^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e h^e dx dy \quad (5.185)$$

Wektor sił brzegowych S_σ^e elementu

$$\mathbf{P}^{eb} = \oint_{S_\sigma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}_o^e dx dy \quad (5.186)$$

Wektor sił brzegowych S_u^e elementu

$$\mathbf{R}^{eb} = \oint_{S_u^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e dx dy \quad (5.187)$$

5.10.1. Element skończony trójkątny stałego odkształcenia

Na rys.5.42 przedstawiono liniowy element skończony trójkątny, nazywany również elementem skończonym stałego odkształcenia.

Odnosząc się do definicji macierzy sztywności (5.184), wnioskujemy, że dla aproksymacji pola przemieszczeń wystarczająca jest liniowa interpolacja Lagrange'a

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) u_i^e \quad v^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) v_i^e \quad (5.188)$$

lub w formie macierzowej

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{Q}^e \quad (5.189)$$

gdzie wektor stopni swobody elementu \mathbf{Q}^e ma postać

$$\mathbf{Q}^e = \{\mathbf{u}^e \ \mathbf{v}^e\} = \left\{ u_1^e \ u_2^e \ u_3^e \ ; \ v_1^e \ v_2^e \ v_3^e \right\} \quad (5.190)$$

oraz macierz funkcji kształtu \mathbf{N}^e wynosi

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^e \\ \mathbf{N}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} \quad (5.191)$$

Całkowity wektor obciążenia \mathbf{F}^e ma postać

$$\mathbf{F}^e = \{\mathbf{F}_1^e \ \mathbf{F}_2^e\} = \left\{ F_1^e \ F_3^e \ F_5^e \ ; \ F_2^e \ F_4^e \ F_6^e \right\} \quad (5.192)$$

Funkcje interpolacyjne dla liniowego elementu trójkątnego $N_i^e(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, podane są za pomocą (5.139).

Równanie równowagi MES dla elementu można zapisać w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ (\mathbf{K}_{12}^e)^T & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^e \\ \mathbf{P}_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{eb} \\ \mathbf{P}_2^{eb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{eb} \\ \mathbf{R}_2^{eb} \end{bmatrix} \quad (5.193)$$

Podstawiając (5.139) i (5.183) do równań (5.184) i (5.185), otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11e} &= \frac{1}{4A^e} (c_1^e \beta_i^e \beta_j^e + c_2^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \\ K_{ij}^{12e} &= \frac{1}{4A^e} (c_3^e \beta_i^e \gamma_j^e + c_2^e \gamma_i^e \beta_j^e) \quad i, j = 1, 2, 3 \\ k_{ij}^{22e} &= \frac{1}{4A^e} (c_2^e \beta_i^e \beta_j^e + c_1^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \end{aligned} \quad (5.194)$$

$$P_i^{1e} = \frac{f_x^e A^e}{3} \quad P_i^{2e} = \frac{f_y^e A^e}{3} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.195)$$

gdzie przyjęto stałe wartości f_x^e , f_y^e oraz

$$c_1 = \lambda + 2G \quad c_2 = G \quad c_3 = \lambda \quad (5.196)$$

W powyższych wzorach $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$, G są stałymi Lamego.

Wektor sił brzegowych \mathbf{P}^{eb} obliczamy za pomocą wzoru (5.186) dla danych funkcji obciążenia brzegu t_i^{0e} , $i = x, y$.

Przyjęta definicja wektora stopni swobody elementu \mathbf{Q}^e (5.190) jest wygodna dla sformułowania wzorów (5.194), natomiast powoduje, że globalny układ równań MES ma dużą szerokość półpasma macierzy \mathbf{K} . Szerokość tę można zredukować, przyjmując wektor \mathbf{Q}^e z uporządkowaniem wg kolejności numerów węzłów

$$\mathbf{Q}^e = \{u_1^e \ v_1^e \ u_2^e \ v_2^e \ u_3^e \ v_3^e\} \quad (5.197)$$

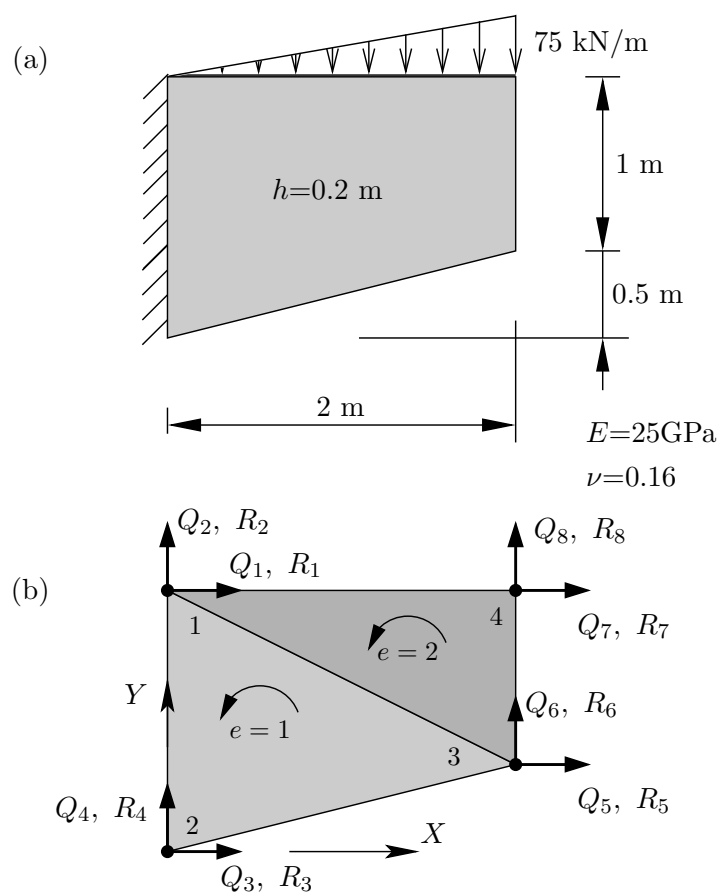
co można otrzymać poprzez odpowiednie przestawienie wierszy i kolumn w równaniu (5.193).

Przykład 5.12. Przeprowadzimy analizę statyczną tarczy z rys.5.43a. Dla celów dydaktycznych obliczenia wykonamy, przyjmując uporządkowanie stopni swobody elementu (5.197), a macierze i wektory będziemy obliczać bezpośrednio z definicji, wykorzystując rachunek macierzowy. W obliczeniach pominiemy ciężar własny, przyjmując $\mathbf{P}^e = \mathbf{0}$.

1. Dyskretyzacja MES. Tarcza została zdyskretyzowana dwoma elementami trójkątnymi stałego odkształcenia. Na rys.5.43b pokazano stopnie swobody konstrukcji Q_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ wraz z siłami węzłowymi R_i , w układzie współrzędnych (x, y) . Topologię elementów podano w tab.5.10.

Numer elementu skończonego	Numery węzłów
1	1 2 3
2	1 3 4

Tabela 5.10. Tablica topologii tarczy



Rys.5.43. Tarcza (a) oraz jej model skończenie elementowy (b)

2. Obliczenie macierzy i wektorów dla elementów

Element 1

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^1 = \{u_1^1 \ v_1^1 \ u_2^1 \ v_2^1 \ u_3^1 \ v_3^1\}$$

Funkcje kształtu ($i \equiv 1, j \equiv 2, k \equiv 3$)

$$A^1 = \frac{3}{2} \quad x_i = 0 \quad y_i = 1.5 \quad x_j = 0 \quad y_j = 0 \quad x_k = 2 \quad y_k = 0.5$$

Podstawiając do (5.139), otrzymamy

$$N_1^1(x, y) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

$$N_2^1(x, y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$$

$$N_3^1(x, y) = \frac{1}{2}x$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz stałych materiałowych

$$\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 25.657 & 4.105 & 0 \\ 4.105 & 25.657 & 0 \\ 0 & 0 & 10.776 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

Macierz sztywności obliczymy z wzoru (5.184)

$$\mathbf{K}^1 = A^1 h^1 (\mathbf{B}^1)^T \mathbf{D}^1 \mathbf{B}^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6506 & -0.4960 & -1.0092 & -0.5816 & -0.6414 & 1.0776 \\ -0.4960 & 3.5107 & 0.0855 & -3.2413 & 0.4105 & -0.2694 \\ -1.0092 & 0.0855 & 2.2920 & 0.9921 & -1.2828 & -1.0776 \\ -0.5816 & -3.2413 & 0.9921 & 3.7801 & -0.4105 & -0.5388 \\ -0.6414 & 0.4105 & -1.2828 & -0.4105 & 1.9243 & 0 \\ 1.0776 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 & 0 & 0.8082 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Wektor sił węzłowych \mathbf{R}^{1b}

$$\mathbf{R}^{1b} = \{R_1^1 \ R_2^1 \ R_3^1 \ R_4^1 \ R_5^1 \ R_6^1\}$$

Element 2

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = \{u_1^2 \ v_1^2 \ u_2^2 \ v_2^2 \ u_3^2 \ v_3^2\}$$

Funkcje kształtu ($i \equiv 1, j \equiv 2, k \equiv 3$)

$$A^2 = 1 \quad x_i = 0 \quad y_i = 1.5 \quad x_j = 2 \quad y_j = 0.5 \quad x_k = 2 \quad y_k = 1.5$$

Z wzoru (5.139) mamy

$$N_1^2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$N_2^2(x, y) = \frac{3}{2} - y$$

$$N_3^2(x, y) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + y$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

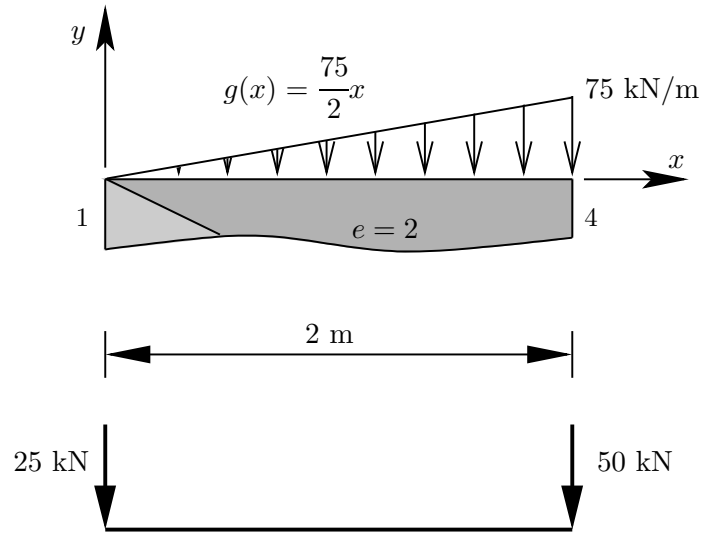
$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności obliczona z wzoru (5.184) ma postać ($\mathbf{D}^1 = \mathbf{D}^2$).

$$\mathbf{K}^2 = A^2 h^2 (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{D}^2 \mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2828 & 0 & 0 & 0.4105 & -1.2828 & -0.4105 \\ 0 & 0.5388 & 1.0776 & 0 & -1.0776 & -0.5388 \\ 0 & 1.0776 & 2.1552 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 0.4105 & 0 & 0 & 5.1314 & -0.4105 & -5.1314 \\ -1.2828 & -1.0776 & -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -0.4105 & -0.5388 & -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Wektor sił węzłowych \mathbf{P}^{2b} od obciążenia ciągłego brzegu 1-4 obliczymy, wykorzystując rys.5.44.



Rys.5.44. Równoważniki w węzłach od obciążenia ciągłego

Przyjmijmy na brzegu 1-4 oś lokalną i równoważniki obciążenia w węzłach elementu obliczymy z wzoru (5.186)

$$\mathbf{P}^{2b} = \int_0^2 (\mathbf{N}^2(x, y = 1.5))^T \mathbf{t}_0^2 dx = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}x & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{75}{2}x \end{bmatrix} dx$$

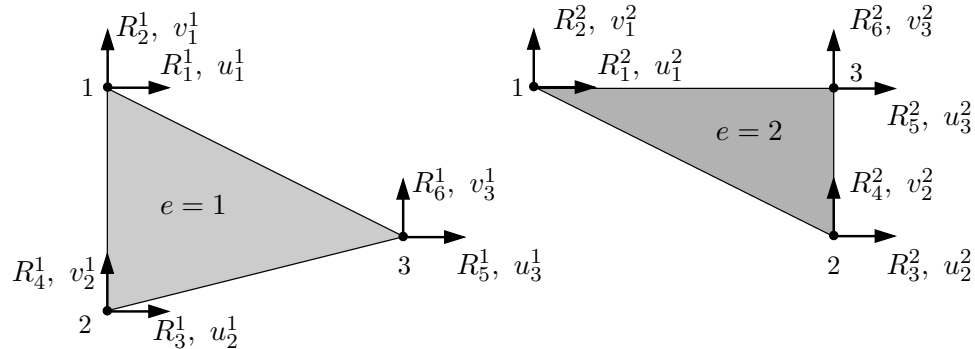
$$= \int_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -(1 - \frac{1}{2}x) \cdot \frac{75}{2}x \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x \cdot \frac{75}{2}x \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Wektor sił węzłowych \mathbf{R}^{2b}

$$\mathbf{R}^{2b} = \{R_1^2 \quad R_2^2 \quad R_3^2 \quad R_4^2 \quad R_5^2 \quad R_6^2\}$$

3. Agregacja i budowa równań MES. Warunki ciągłości przemieszczeń w węzłach tarczy mają postać (por. rys.5.43 i rys.5.45)

$$\begin{array}{llll} u_1^1 = u_1^2 = Q_1 & v_1^1 = v_1^2 = Q_2 & u_2^1 = Q_3 & v_2^1 = Q_4 \\ u_3^1 = u_2^2 = Q_5 & v_3^1 = v_2^2 = Q_6 & u_3^2 = Q_7 & v_3^2 = Q_8 \end{array}$$



Rys.5.45. Siły węzłowe i przemieszczenia dla elementów w globalnym układzie współrzędnych

Wykorzystując tablicę topologii budujemy układ równań MES w formie (5.198) (s. 233).

4. Uwzględnienie podstawowych warunków brzegowych i warunków równowagi sił w węzłach. Kinematyczne (podstawowe) warunki brzegowe są następujące:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0 \quad (5.199)$$

natomiast statyczne (naturalne) warunki brzegowe wyrażają warunki równowagi sił w węzłach tarczy

$$\begin{array}{llll} R_1^1 + R_1^2 = R_1 & R_3^1 = R_3 & R_5^1 + R_3^2 = R_5 = 0 & R_5^2 = R_7 = 0 \\ R_2^1 + R_2^2 = R_2 & R_4^1 = R_4 & R_6^1 + R_4^2 = R_6 = 0 & R_6^2 = R_8 = 0 \end{array} \quad (5.200)$$

gdzie R_1 do R_4 są reakcjami.

Podstawienie (5.199) i (5.200) do (5.198) prowadzi do układu równań w formie (5.201) (s. 234).

Układ równań (5.201) zawiera cztery niewiadome pierwotne od Q_5 do Q_8 i cztery niewiadome wtórne od R_1 do R_4 .

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 2.9334 & -0.4960 & -1.0092 & -0.5816 & -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 \\ -0.4960 & 4.0495 & 0.0855 & -3.2413 & 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 \\ -1.0092 & 0.0855 & 2.2920 & 0.9921 & -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 \\ -0.5816 & -3.2413 & 0.9921 & 3.7801 & -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 \\ -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 & 4.0794 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 & 0 & 5.9396 & -0.4105 & -5.1314 \\ -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 & -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 & -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^1 + R_1^2 \\ R_2^1 + R_2^2 \\ R_3^1 \\ R_4^1 \\ R_5^1 + R_3^2 \\ R_6^1 + R_4^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 2.9334 & -0.4960 & -1.0092 & -0.5816 & -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 \\ -0.4960 & 4.0495 & 0.0855 & -3.2413 & 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 \\ -1.0092 & 0.0855 & 2.2920 & 0.9921 & -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 \\ -0.5816 & -3.2413 & 0.9921 & 3.7801 & -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 \\ -0.6414 & 1.4881 & -1.2828 & -0.4105 & 4.0794 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 1.4881 & -0.2694 & -1.0776 & -0.5388 & 0 & 5.9396 & -0.4105 & -5.1314 \\ -1.2828 & -1.0776 & 0 & 0 & -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -0.4105 & -0.5388 & 0 & 0 & -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -25 + R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \quad (5.201)$$

Niewiadome pierwotne obliczymy, rozwiązując cztery ostatnie równania

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 4.0794 & 0 & -2.1552 & -1.0776 \\ 0 & 5.9396 & -0.4105 & -5.1314 \\ -2.1552 & -0.4105 & 3.4380 & 1.4881 \\ -1.0776 & -5.1314 & 1.4881 & 5.6702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.00818 \\ -0.05213 \\ 0.01529 \\ -0.06156 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

Reakcje podpór obliczymy natomiast z czterech pierwszych równań (5.201) i wynoszą one

$$R_1 = -66.667 \text{ kN}$$

$$R_2 = 43.556 \text{ kN}$$

$$R_3 = 66.667 \text{ kN}$$

$$R_4 = 31.444 \text{ kN}$$

5. Obliczenie odkształceń i naprężeń w elemencie

Element 1

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^1 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.00818 \ -0.05213\} \cdot 10^{-3}$$

Wektor odkształceń obliczymy wg wzoru (5.165)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^1 = \mathbf{B}^1 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} -0.00409 \\ 0 \\ -0.02606 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Wektor naprężeń obliczymy z równania fizycznego (5.157)

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^1 = \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \begin{bmatrix} -104.9643 \\ -16.7943 \\ -280.8512 \end{bmatrix} \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

Element 2

Wektor stopni swobody elementu

$$\mathbf{Q}^2 = \{0 \ 0 \ -0.00818 \ -0.05213 \ 0.01529 \ -0.06156\} \cdot 10^{-3}$$

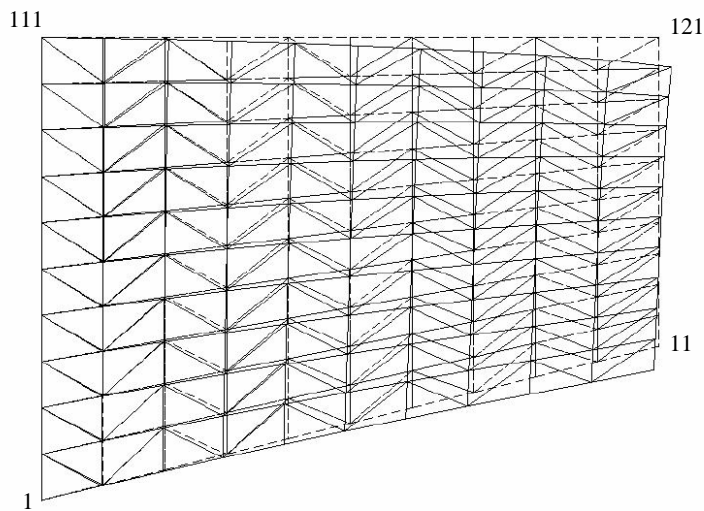
Wektor odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^2 = \mathbf{B}^2 \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0.00765 \\ -0.00943 \\ -0.00731 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Wektor naprężeń

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^2 = \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{bmatrix} 157.4465 \\ -210.6384 \\ -78.7232 \end{bmatrix} \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

Obliczenia tarczy powtórzone, wykorzystując program komputerowy FELT [6]. Tarczę zdyskretyzowano dwoma i dwustoma elementami trójkątnymi tarczowymi. Dyskretyzację tarczy z 200 elementami przedstawiono na rys.5.46.



Rys.5.46. Konfiguracja początkowa i aktualna tarczy zdyskretyzowanej 200 elementami trójkątnymi

W tab.5.11 zestawiono porównanie wyników obliczeń ręcznych z obliczeniami komputerowymi. Na pewno wyniki obliczeń z dwustoma elementami skończonymi są bliskie rozwiązaniu dokładnemu. Praktycznym sposobem oceny jakości rozwiązania może być wykonanie powtórnych obliczeń, na przykład dla siatki dwukrotnie zagęszczonej, i porównanie wyników. Jeśli są bliskie sobie, to można je uznać za wiarygodne, w przeciwnym przypadku należałoby znowu siatkę dwukrotnie zagęścić itp.

	Obliczenia ręczne	FElt – 2 elementy	FElt – 200 elementów
u_3	$-8.182e - 06$	$-8.1822e - 06$	$-2.2471e - 05$
v_3	$-5.213e - 05$	$-5.2126e - 05$	$-1.3353e - 04$
u_4	$1.529e - 05$	$1.5292e - 05$	$5.0246e - 05$
v_4	$-6.156e - 05$	$-6.1559e - 05$	$-1.4195e - 04$
σ_x^1	-104.9643	-104.96	-
σ_y^1	-16.7943	-16.794	-
τ_{xy}^1	-280.8512	-280.85	-
σ_x^2	157.4465	157.45	-
σ_y^2	-210.6384	-210.64	-
τ_{xy}^2	-78.7232	-78.723	-

Tabela 5.11. Porównanie wyników obliczeń ręcznych z obliczeniami komputerowymi tarczy z przykładu 5.12

Uwaga

Sposób rozwiązywania globalnego układu równań MES w tym przykładzie (również i w następnych przykładach) jest oczywiście poprawny, ale nieefektywny, jeśli obliczenia chcielibyśmy zautomatyzować, pisząc np. program komputerowy. W takim przypadku wygodniej jest uwzględnić podstawowe warunki brzegowe w taki sposób, aby obliczanie niewiadomych pierwotnych nie wymagało zmiany wymiarów globalnej macierzy sztywności. W ten sposób również i niewiadome wtórne obliczymy, wykorzystując niezmienny wymiar macierzy \mathbf{K} . Sposób postępowania wyjaśnimy bardziej szczegółowo na przykładzie rozwiązanej tarczy.

Niewiadome pierwotne zawarte w wektorze \mathbf{Q} obliczymy, rozwiązując układ równań MES, w którym jednorodne warunki brzegowe uwzględnimy, zerując wiersze i kolumny w macierzy \mathbf{K} , odpowiadające zerowym wartościom Q_1 do Q_4 , oraz wpisując 1 w tych równaniach na przekątnej głównej macierzy

sztyności \mathbf{K} i zera w pierwszych czterech współrzędnych wektora prawej strony \mathbf{F} .

W takim przypadku układ równań (5.198) przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (5.202)$$

gdzie:

$\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ – macierz diagonalna,

$\mathbf{F}_2 = \{0 \ 0 \ 0 \ -50\}$ – podwektor wektora \mathbf{F} ,

\mathbf{K}_{22} – podmacierz macierzy sztywności \mathbf{K} .

Rozwiązanie układu równań (5.202) daje wynik

$$\mathbf{Q} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.00818 \ -0.05213 \ 0.01529 \ -0.06156\} \cdot 10^{-3}$$

Wektor reakcji obliczymy teraz ze wzoru

$$\mathbf{R} = \mathbf{KQ} - \mathbf{P}^b$$

otrzymując

$$\mathbf{R} = \{-66.667 \ 43.556 \ 66.667 \ 31.444 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

W przypadku jeśli warunki brzegowe są niejednorodne, np. $Q_j = a$, wówczas oprócz opisanej modyfikacji macierzy \mathbf{K} należy również zmodyfikować wektor prawej strony \mathbf{F} , podstawiając $F_k := F_k - aK_{kj}$, dla $k = 1, \dots, n$ i $k \neq j$, oraz $F_j = a$.

Rozdział 6

Metoda elementów brzegowych

6.1. Uwagi wstępne

W rozdziale pierwszym przedstawiono różne modele matematyczne stacjonarnego przepływu ciepła. Punktami wyjścia były: sformułowanie lokalne, inaczej silne, czyli równanie różniczkowe (1.8) i warunki brzegowe (1.2), (1.3), które spełnia poszukiwana funkcja (temperatura) w pewnym obszarze dwuwymiarowym.

Po pomnożeniu równania (1.8) przez funkcję testową, dwukrotnym całkowaniu przez części i skorzystaniu z własności rozwiązania fundamentalnego otrzymuje się tożsamość Somigliany (1.25). Jest ona ogólnym wzorem na rozwiązanie zagadnienia brzegowego, gwarantującym dokładne spełnianie równania różniczkowego dla każdej nieznannej a priori funkcji, określonej na brzegu obszaru (T na Γ_q i q_n na Γ_T). Dopiero odpowiedni dobór tej niewiadomej funkcji zapewnia spełnianie przez wyrażenie Somigliany również warunków brzegowych. Aby znaleźć taką funkcję, rozwiązuje się odpowiednie, brzegowe, równanie całkowe, najczęściej za pomocą metody elementów brzegowych (MEB), omawianej w tym rozdziale.

W kolejnych punktach zajmiemy się wymienionymi poniżej tematami.

- (1) Przedstawienie idei metody na przykładzie dwuwymiarowego (2D) problemu ustalonego przepływu ciepła z warunkami brzegowymi typu Dirichleta, opisanego równaniem (1.28).

- (2) Sformułowanie i zastosowanie metody do problemu jednowymiarowego (1D) na przykładzie zagadnienia rozciągania pręta.
- (3) Ogólne sformułowanie metody dla wybranych zagadnień 2D i 3D w obszarach ograniczonych i nieograniczonych.
- (4) Pewne szczegóły algorytmu, m.in. obliczanie całek niewłaściwych i właściwych.
- (5) Podstawy oszacowania błędu rozwiązania i adaptacji siatki w metodzie elementów brzegowych.
- (6) Inne metody brzegowe.

6.2. Idea MEB na przykładzie problemu dwuwymiarowego

Idea metody elementów brzegowych zostanie przedstawiona na możliwie prostym przykładzie. Będzie nim równanie Laplace'a w obszarze kwadratowym z warunkami brzegowymi typu Dirichleta. Jest to szczególny przypadek zagadnienia (1.8), (1.2), (1.3) rozważanego w rozdziale 1, modelującego stacjonarny przepływ ciepła. Przyjmijmy, że obszar Ω jest kwadratem o boku długości 1 (rys. 6.1), a rozwiązanie ma postać $T(x, y) = xy$. Spełnia ono następujące zagadnienie brzegowe:

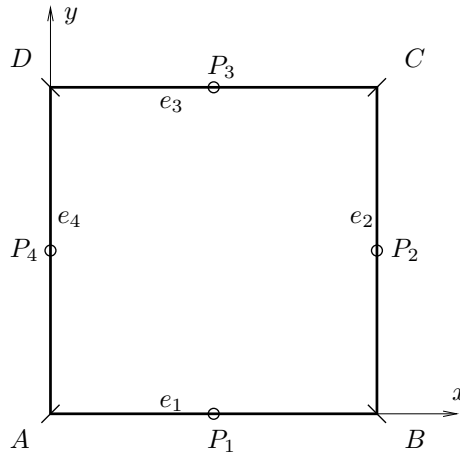
$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & \text{w } \Omega \\ T = \bar{T} & \text{na } \Gamma \end{cases} \quad (6.1)$$

gdzie:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \bar{T} = \begin{cases} 0 & \text{na } AB \\ y & \text{na } BC \\ x & \text{na } CD \\ 0 & \text{na } AD \end{cases} \quad (6.2)$$

Zgodnie z tożsamością Somigliany (1.25) rozwiązania tego zagadnienia będziemy szukać w postaci

$$c T(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \left[\bar{T}(x, y) q_n^*(x, y, \xi, \eta) - q_n(x, y) T^*(x, y, \xi, \eta) \right] dt_{(x, y)} \quad (6.3)$$



Rys.6.1. Przykład testowy – dyskretyzacja czterema elementami brzegowymi stopnia zerowego

gdzie (ξ, η) jest dowolnym punktem wewnętrznym, brzegowym albo nawet zewnętrznym kwadratu. Parametr c oraz funkcje \bar{T} , q_n^* , T^* są znane, a jedyną niewiadomą jest funkcja q_n określona na brzegu Γ . Będziemy ją dalej oznaczać, dla skrócenia zapisu, literą φ i, podobnie, odpowiednie rozwiązanie fundamentalne za pomocą φ^*

$$q_n \doteq \varphi \quad q_n^* \doteq \varphi^* \quad (6.4)$$

Jeżeli tożsamość (6.3) zapiszemy dla punktów brzegowych $(\xi, \eta) \in \Gamma$, to otrzymamy następujące sformułowanie brzegowe:

Znaleźć funkcję $\varphi[x(t), y(t)] : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall (\xi, \eta) \in \Gamma$

$$c \bar{T}(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \left[\bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi, \eta) - \varphi(x, y) T^*(x, y, \xi, \eta) \right] dt_{(x,y)} \quad (6.5)$$

gdzie $c = \frac{1}{4}$ w wierzchołkach A, B, C, D albo $c = \frac{1}{2}$ w pozostałych punktach brzegu.

Numerycznie można równanie (6.5) rozwiązać *metodą elementów brzegowych*, której algorytm w najprostszej wersji przedstawiono poniżej.

1. Dzielimy brzeg na elementy skończone, zwane elementami brzegowymi. Przyjmujemy dla nich stałe funkcje kształtu (jeden węzeł w środku), dające aproksymację „schodkową”, czyli odcinkowo stałą. Można ją tu

zastosować, gdyż niewiadoma funkcja φ nie jest różniczkowana, a ponadto może być nieciągła, np. w narożach i w tych punktach nieciągłość aproksymacji jest w pełni uzasadniona.

2. Spełniamy równanie (6.5) w punktach kolokacji pokrywających się z węzłami elementów brzegowych. Dzięki temu otrzymujemy układ równań algebraicznych, z którego oblicza się dyskretne wartości funkcji niewiadomej, a tym samym przybliżone rozwiązanie brzegowego równania całkowego i całego zagadnienia.
3. Temperaturę w wybranych punktach wnętrza obszaru obliczamy ze wzoru (6.3), wstawiając za funkcję φ jej aproksymację (w tym zadaniu schodkową).

Zastosujemy powyższy algorytm, przyjmując dodatkowo, że

- brzeg jest podzielony, dla ułatwienia, tylko na 4 elementy brzegowe e_1, e_2, e_3, e_4 , którymi są boki kwadratu (rys. 6.1),
- wartości rozwiązania brzegowego w węzłach $P_1(\xi_1, \eta_1), P_2(\xi_2, \eta_2), P_3(\xi_3, \eta_3), P_4(\xi_4, \eta_4)$ oznaczymy odpowiednio $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Korzystając z powyższych założeń i dodatkowo zastępując całki po brzegu sumą całek po kolejnych elementach

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dt = \int_{e_1} F(x, y) dt + \int_{e_2} F(x, y) dt + \int_{e_3} F(x, y) dt + \int_{e_4} F(x, y) dt$$

równanie całkowe (6.5) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{T}(\xi_i, \eta_i) &= \sum_{j=1}^4 \int_{e_j} \bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} + \\ &\quad - \sum_{j=1}^4 \varphi_j \int_{e_j} T^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$(\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (\xi_2, \eta_2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\xi_3, \eta_3) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (\xi_4, \eta_4) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Punkty kolokacji (ξ_i, η_i) nazywa się czasem *punktami obserwacyjnymi*. Każdemu z nich odpowiada jedno równanie, którego współczynniki są odpowiednimi całkami po kolejnych elementach brzegowych. Tak więc dla ustalonego (wybranego) punktu obserwacyjnego dokonuje się „obiegnięcia” całego brzegu *po punktach całkowania* (x, y) .

Układ 4 równań algebraicznych z 4 niewiadomymi (6.6), $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, można krótko zapisać

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij} \varphi_j = b_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.7)$$

gdzie

$$A_{ij} = \int_{e_j} T^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)}$$

$$b_i = \sum_{j=1}^4 \left[\int_{e_j} \bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \right] - \frac{1}{2} \bar{T}(\xi_i, \eta_i)$$

Po obliczeniu współczynników A_{ij}, b_i , w sposób opisany pod koniec tego punktu, układ równań (6.7) przybiera postać

$$\begin{bmatrix} .2695E+0 & .5329E-1 & -.6186E-2 & .5329E-1 \\ .5329E-1 & .2695E+0 & .5329E-1 & -.6186E-2 \\ -.6186E-2 & .5329E-1 & .2695E+0 & .5329E-1 \\ .5329E-1 & -.6186E-2 & .5329E-1 & .2695E+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} .1378 \\ -.1378 \\ -.1378 \\ .1378 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

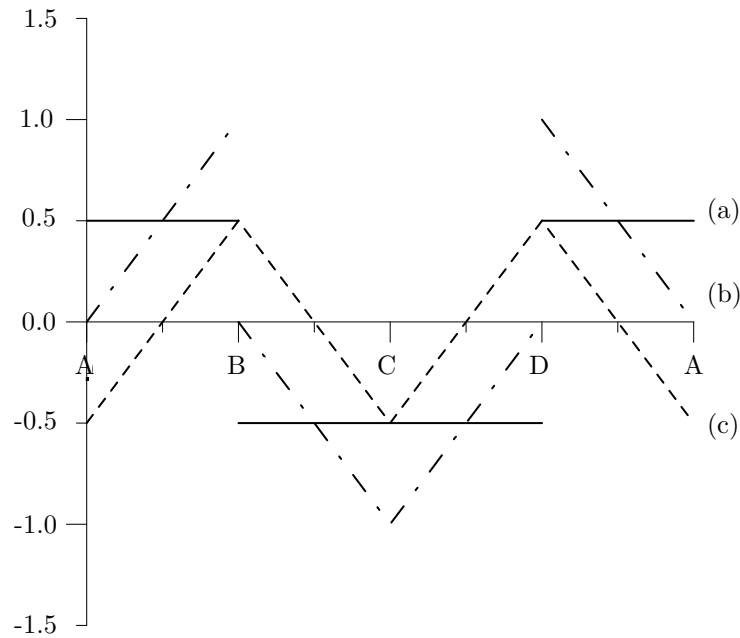
Ze względu na przejrzystość podano te współczynniki z dokładnością do czterech cyfr. Faktycznie obliczenia prowadzono w podwójnej precyzji za pomocą prostego programu komputerowego. Po rozwiązaniu układu (6.8) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że wartości węzłowe pokrywają się z dokładnymi wartościami nawet na 6-7 miejscach znaczących. Natomiast poza węzłami rozwiązania numeryczne

$$\varphi^h = \begin{cases} \varphi_1 & \text{na } e_1 \\ \varphi_2 & \text{na } e_2 \\ \varphi_3 & \text{na } e_3 \\ \varphi_4 & \text{na } e_4 \end{cases}$$

i dokładne różnią się istotnie. Pokazano je na wykresie (rys. 6.2) jako funkcje naturalnego parametru brzegu, zaczynającego się w punkcie (A) i przebiegającego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ znane



Rys.6.2. Przykład testowy – porównanie wybranych funkcji na brzegu: rozwiązanie numeryczne (a), rozwiązanie dokładne (b), błąd (c)

jest rozwiązanie dokładne φ , więc łatwo jest obliczyć błąd rozwiązania numerycznego (φ^h), czyli funkcję e^φ

$$e^\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi^h(t) \quad (6.9)$$

Wykres błędu również pokazano na rys. 6.2. Jego norma L_2 , obliczona wzorem

$$\|e^\varphi\|_{0,\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma} [e^\varphi(t)]^2 dt} \quad (6.10)$$

ma wartość około 0.5774, co stanowi 25% normy wyniku dokładnego i jest to błąd globalny numerycznego rozwiązania równania całkowego.

W sytuacjach gdy nie jest znane rozwiązanie dokładne, błąd obliczeń można oszacować za pomocą residuum rozwiązywanego równania. W przypadku równań całkowych, z którymi mamy tu do czynienia, jest to funkcja klasy co najmniej $L_2(\Gamma)$ (całkowalna z kwadratem) i ma w rozwiązywanym przykładzie postać

$$\begin{aligned} R[\xi(s), \eta(s)] = & \sum_{e_j}^4 \int \bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \\ & - c\bar{T}(\xi, \eta) - \sum_{j=1}^4 \varphi_j \int_{e_j} T^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \quad (6.11) \end{aligned}$$

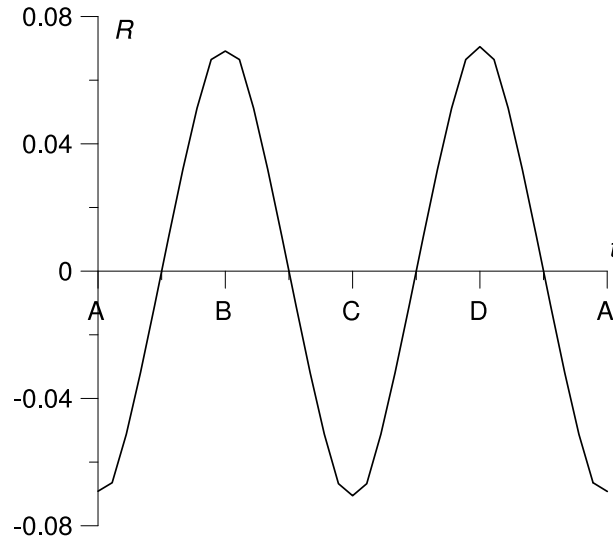
Wykres residuum przedstawiono na rys. 6.3. Jego norma równa się 0.0978, czyli stanowi 34% normy prawej strony równania całkowego (6.6).

Temperaturę lub jej pochodne w wybranych punktach wnętrza obszaru Ω oblicza się na podstawie tożsamości Somigliany, z której otrzymujemy po uwzględnieniu dyskretyzacji następujący wzór:

$$\begin{aligned} T^h(\xi, \eta) = & \sum_{j=1}^4 \int_{e_j} \bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \\ & - \sum_{j=1}^4 \varphi_j \int_{e_j} T^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \quad \forall (\xi, \eta) \in \Omega \quad (6.12) \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń temperatury w wybranych punktach wnętrza pokazano w tab. 6.1. Można zauważyć, że największy błąd występuje w pobliżu brzegu, natomiast w środku kwadratu uzyskano wynik z 5-cyfrową dokładnością.

Jak w każdej metodzie komputerowej większą dokładność obliczeń można uzyskać po zmniejszeniu wymiarów elementów brzegowych. W tab. 6.2 i na rys. 6.4 pokazano wyniki *testu zbieżności*, czyli normę błędu rozwiązania (na



Rys.6.3. Przykład testowy – residuum równania całkowego

x	y	T^h	T
0.50	0.50	0.2500	0.2500
0.30	0.30	0.0755	0.0900
0.10	0.10	-0.0449	0.0100
0.50	0.90	0.4331	0.4500

Tabela 6.1. Rozwiązanie numeryczne (T^h) i dokładne (T) w wybranych punktach wnętrza

brzegu i wewnątrz) oraz normę residuum jako funkcje długości elementów. Normę błędu we wnętrzu obliczano wg wzoru

$$\|e^T\|_{0,\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (T - T^h)^2 d\Omega}$$

Dla przykładu rozwiązywanego w tym punkcie wykres logarytmu błędu niewiadomej brzegowej φ^h , w zależności od logarytmu wymiaru elementu h , jest praktycznie linią prostą, czyli

$$\ln \|e^\varphi\| = \alpha \ln h + \ln C$$

Długość elementu h	Norma błędu na brzegu $\ e^\varphi\ _{0,\Gamma}$	Norma residuum $\ R\ _{0,\Gamma}$	Norma błędu we wnętrzu $\ e^T\ _{0,\Omega}$
1.000	0.57735	0.0978170	0.11927
0.500	0.29823	0.0164449	0.06428
0.333	0.19648	0.0064721	0.05100
0.250	0.14668	0.0033617	0.04185
0.200	0.11699	0.0020559	0.03568
0.167	0.09729	0.0014005	0.03050
0.143	0.08326	0.0010327	0.02556
0.125	0.07277	0.0008098	0.02326
0.111	0.06463	0.0006666	0.02065
0.100	0.05812	0.0005703	0.01870

Tabela 6.2. Wyniki testu zbieżności

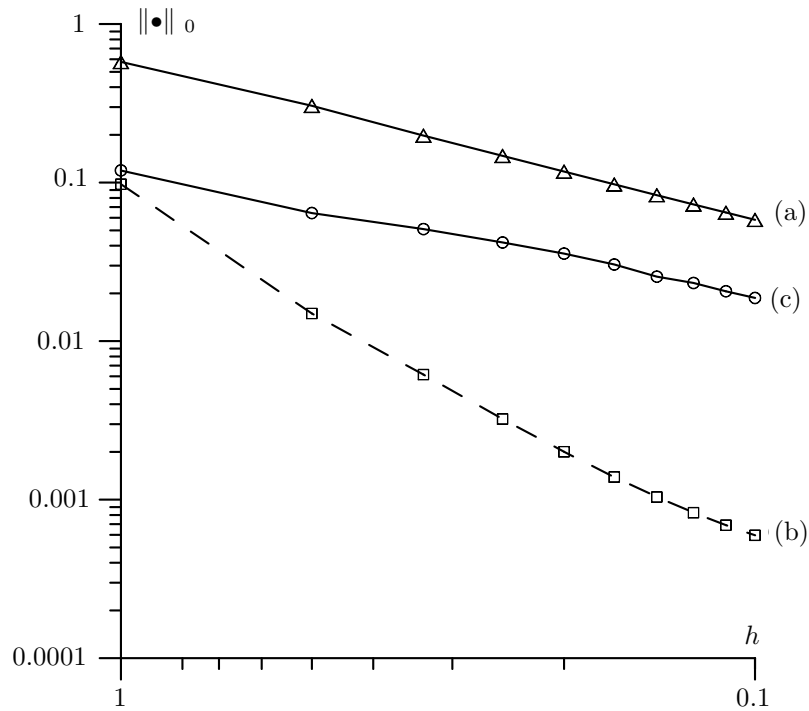
Wynika stąd, że

$$\|e^\varphi\| = Ch^\alpha \quad (6.13)$$

gdzie C, α są dodatnimi stałymi. Wykładnik α , zwany *tempem zbieżności*, zależy m.in. od stopnia aproksymacji funkcji niewiadomej. W przykładzie stopień aproksymacji wynosi 0, a tempo zbieżności około 1 (rozwiązania na brzegu, rozwiązania we wnętrzu dla mniejszych h i residuum na brzegu). Na wykresie 6.4 norma błędu we wnętrzu jest mniejsza niż na brzegu i jest to charakterystyczna cecha MEB.

W ogólnym przypadku nieciągła aproksymacja, np. taka, jaką zastosowano dla ułatwienia w rozwiązywanym przykładzie, nie gwarantuje jednostajnej zbieżności rozwiązania, dlatego też w praktyce częściej stosuje się ciągłą aproksymację funkcji niewiadomej.

Test zbieżności jest jednym z podstawowych sprawdzianów każdego programu komputerowego, w którym stosowane są metody omawiane w tym podręczniku. Taki test pozwala sprawdzić poprawność zastosowanego sformułowania, poprawność aproksymacji rozwiązania i samego kodu programu komputerowego. Ponadto na podstawie jego wyników można sprawdzić, czy uzyskuje się przewidywane teoretycznie tempo zbieżności albo eksperymentalnie stwierdzić jakie ono jest.



Rys.6.4. Przykład testowy. Zbieżność norm: błędu rozwiązania brzegowego (a), residuum (b) i rozwiązania we wnętrzu (c)

Na zakończenie tego punktu omówimy sposób obliczania całek krzywoliniowych po elementach brzegowych. Całki te występują we wzorach na

- współczynniki układu równań algebraicznych,
- residuum równania brzegowego,
- rozwiązanie we wnętrzu kwadratu.

Są one dwojakiego typu, a mianowicie:

$$I_{ij} = \int_{e_j} T^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \quad J_{ij} = \int_{e_j} \bar{T}(x, y) \varphi^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \quad (6.14)$$

gdzie $i, j = 1, \dots, 4$. Przyjmijmy dodatkowo, że jeżeli (ξ_i, η_i) należy do wnętrza obszaru Ω (we wzorze (6.3)), to $i = 0$.

Współczynniki I_{ij}, J_{ij} dla $i \neq j$ można obliczyć numerycznie, np. kwadraturą Gaussa-Legendre'a (stosowano pięć węzłów), natomiast dla $i = j$ obliczymy je analitycznie. Są one wtedy niewłaściwe, ponieważ funkcja podcałkowa zależy od logarytmu odległości albo od odwrotności odległości od punktu (ξ_i, η_i) , należącego do odcinka, po którym odbywa się całkowanie.

Przykładowo

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{e_1} T^*(x, 0, \frac{1}{2}, 0) dx = -\frac{1}{4\pi k} \int_0^1 \ln(x - \frac{1}{2})^2 dx \\ &= -\frac{1}{\pi k} \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x - \frac{1}{2}) dx = -\frac{1}{\pi k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \ln(x - \frac{1}{2}) dx \\ &= -\frac{1}{\pi k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \right) = \frac{1}{2\pi k} (\ln 2 + 1) \end{aligned}$$

Całki drugiego typu

$$J_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (6.15)$$

gdyż

$$\varphi^*(x, y, \xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(x - \xi_i)n_x + (y - \eta_i)n_y}{r^2} \right]$$

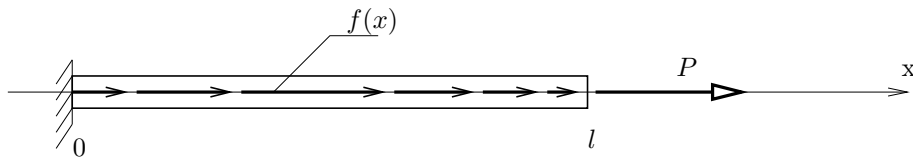
a dla elementu prostoliniowego wektor $(x - \xi_i, y - \eta_i)$ jest do niego styczny, więc licznik wzoru (6.15) będzie iloczynem skalarnym dwóch prostopadłych wektorów.

Celem tego punktu było przedstawienie, w możliwie jak najprostszy sposób, metody elementów brzegowych. Bazuje ona na sformułowaniu rozwiązywanego zagadnienia w postaci brzegowego równania całkowego, które rozwiązuje się np. metodą kollokacji punktowej, korzystając z aproksymacji, takiej jak w metodzie elementów skończonych. Ponieważ funkcja niewiadoma nie jest różniczkowana, więc można zastosować nawet stałe funkcje kształtu. W dalszych punktach zostaną omówione aproksymacja wyższego stopnia i zastosowanie metody Bubnowa-Galerkina zamiast metody kollokacji do rozwiązania równania całkowego.

6.3. Metoda brzegowa w zagadnieniu jednowymiarowym

Szczególnie proste jest rozwiązywanie metodą brzegową zagadnień jednowymiarowych (1D), gdyż brzeg składa się wtedy z dwóch punktów, a niewiadomymi brzegowymi są nie funkcje, tylko liczby. W związku z tym zamiast całkowego równania brzegowego otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych, który można rozwiązać dokładnie i tym samym uzyskać dokładne rozwiązanie całego zadania. Dzięki temu metoda brzegowa w zagadnieniach 1D nie jest metodą numeryczną, tylko sposobem otrzymania dokładnego rozwiązania na drodze analitycznej.

Rozważmy pręt (rys.6.5) o długości l i o stałej sztywności AE , obciążony obciążeniem ciągłym $f(x)$ działającym w kierunku prostoliniowej osi pręta i przyłożonym wzdłuż tej osi, zamocowany na jednym albo obu końcach. Zakładamy standardowo, że każdy punkt dowolnego przekroju poprzecznego przemieszcza się jednakowo w kierunku osi pręta i że jedyna niezerowa składowa tensora naprężenia σ_{xx} , oznaczana dalej krótko σ , jest stała w przekroju poprzecznym.



Rys.6.5. Zadanie rozciągania pręta – przykładowe zamocowanie i obciążenie

Rozwiązanie tego zadania polega na obliczeniu funkcji przemieszczeń $u(x)$, odkształceń $\varepsilon(x)$ (składowa ε_{xx}) i naprężeń $\sigma(x)$ lub siły osiowej $S(x) = \sigma(x)A$. Z drugiej zasady dynamiki Newtona i z założenia o krótkozasięgowości sił międzycząsteczkowych wynika następujące równanie równowagi dla pręta o stałym przekroju A z obciążeniem f , którego wartość jest funkcją ciągłą

$$A \frac{d\sigma}{dx} = -f(x) \quad \forall x \in (0, l) \quad (6.16)$$

Po założeniu geometrycznej liniowości $\left(\varepsilon = \frac{du}{dx} \right)$ i przyjęciu prawa Hooke'a

($\sigma = E\varepsilon$), ze stałym modułem Younga E , otrzymamy równanie

$$\begin{cases} AE \frac{d^2 u}{dx^2} = -f(x) & \forall x \in (0, l) \\ + \text{warunki brzegowe dla } x = 0 \text{ i } x = l \end{cases} \quad (6.17)$$

Jest to sformułowanie lokalne. Postępując analogicznie jak w rozdziale 1, przekształcimy zagadnienie (6.17) do sformułowania brzegowego.

Pomnożenie równania (6.17) przez funkcję testową v i całkowanie przez części prowadzi do równania

$$AE \int_0^l \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx - \left[v AE \frac{du}{dx} \right] \Big|_0^l = \int_0^l v f dx \quad \forall v \in V$$

Ograniczenie przestrzeni funkcji testowych V do takich, które spełniają zerowe kinematyczne warunki brzegowe prowadzioby do zasady prac wirtualnych (faktycznie do tej zasady z dodatkowo uwzględnionym prawem Hooke'a). Nie robi się tego przy wyprowadzaniu sformułowania brzegowego, a w zamian stosuje jeszcze raz całkowanie przez części. Otrzymamy wtedy zasadę Bettiego-Maxwella

$$AE \int_0^l \left(-\frac{d^2 v}{dx^2} \right) u dx + \left[\frac{dv}{dx} AE u \right] \Big|_0^l = \int_0^l v f dx + \left[v AE \frac{du}{dx} \right] \Big|_0^l \quad \forall v \in V \quad (6.18)$$

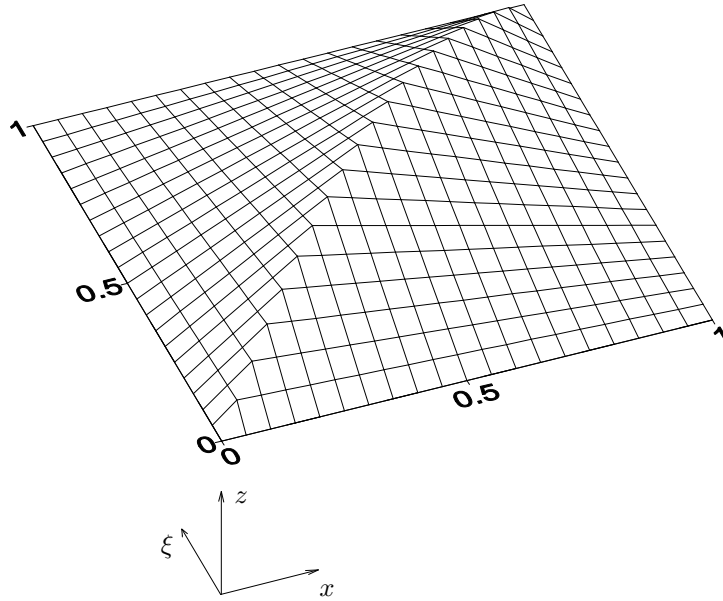
Skorzystamy teraz z rozwiązania fundamentalnego równania (6.17), czyli funkcji v^* spełniającej w sensie dystrybucyjnym warunek

$$AE \frac{d^2 v^*}{dx^2} = -\delta(x - \xi) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R} \quad (6.19)$$

Ma ona następującą postać (rys. 6.6):

$$v^*(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{AE} [(1 - \frac{x}{l})x + l] & \text{dla } x \leq \xi \\ \frac{1}{AE} [(1 - \frac{x}{l})\xi + l] & \text{dla } x \geq \xi \end{cases} \quad (6.20)$$

Aby podstawić v^* za v we wzorze (6.18), należy zapisać odpowiednie całki i granice dla odcinka $(0, l)$ bez otoczenia punktu ξ o promieniu długości ε , czyli odcinka $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, gdyż rozwiązanie fundamentalne nie ma pochodnej



Rys.6.6. Zadanie rozciągania pręta – wykres rozwiązania fundamentalnego $v^*(x, \xi)$ dla $x, \xi \in [0, 1]$, $l = 1$

dla $x = \xi$. Dokonując przejścia granicznego z ε do zera, otrzymuje się następującą postać rozwiązania w dowolnym punkcie wewnętrznym pręta (tożsamość Somigliany)

$$u(\xi) = \int_0^l v^*(x, \xi) f(x) dx + [v^*(x, \xi) S(x) - s^*(x, \xi) u(x)] \Big|_{x=0}^{x=l} \quad \forall \xi \in (0, l) \quad (6.21)$$

gdzie

$$s^*(x, \xi) = AE \frac{\partial v^*}{\partial x} = \begin{cases} 1 - \frac{\xi}{l} & \text{dla } x < \xi \\ -\frac{\xi}{l} & \text{dla } x > \xi \end{cases}$$

Wzór (6.21) przedstawia ogólną postać poszukiwanego przemieszczenia.

Można z niego otrzymać również ogólną postać siły osiowej

$$S(\xi) = AE \frac{du}{d\xi} = \int_0^l \mathcal{V}^*(x, \xi) f(x) dx + [\mathcal{V}^*(x, \xi) S(x) - \mathcal{S}^*(x, \xi) u(x)] \Big|_{x=0}^{x=l}$$

$$\forall \xi \in (0, l)$$
(6.22)

gdzie

$$\mathcal{V}^*(x, \xi) = AE \frac{\partial v^*}{\partial \xi} = \begin{cases} -\frac{x}{l} & \text{dla } x < \xi \\ 1 - \frac{x}{l} & \text{dla } x > \xi \end{cases}$$

$$\mathcal{S}^*(x, \xi) = AE \frac{\partial s^*}{\partial \xi} = -\frac{AE}{l} \quad \text{dla } x \neq \xi$$

Funkcje u (6.21), S (6.22) są rozwiązaniem zadania, jeżeli znamy cztery wielkości brzegowe: $u(0), u(l), S(0), S(l)$, ale w prawidłowo postawionym zagadnieniu dane są tylko dwie z nich. Pozostałe dwie można obliczyć z układu równań brzegowych powstałych przez zapisanie równości (6.21), (6.22) dla punktów $\xi = 0$, $\xi = l$. Zapiszmy pierwszy wzór dla $\xi = 0$, a drugi dla $\xi = l$. Można, również odwrotnie, na lewym końcu zapisać wyrażenie na siłę osiową, a na prawym na przemieszczenie i to bez względu na to, jakiego typu są warunki brzegowe. Jednak specyfika zadania 1D wymaga wykorzystania obu wzorów, aby otrzymany z nich układ brzegowych równań algebraicznych nie był osobliwy.

Ponieważ założyliśmy, że ξ jest punktem wewnętrznym odcinka, więc przyjmujemy spełnienie tożsamości Somigliany dla $\xi = 0^+$ i $\xi = l^-$. Otrzymamy wtedy układ dwóch równań algebraicznych

$$u(0^+) = \int_0^l v^*(x, 0^+) f(x) dx + s^*(0, 0^+) u(0) - v^*(0, 0^+) S(0) +$$

$$- s^*(l, 0^+) u(l) + v^*(l, 0^+) S(l)$$

$$S(l^-) = \int_0^l \mathcal{V}^*(x, l^-) f(x) dx + \mathcal{S}^*(0, l^-) u(0) - \mathcal{V}^*(0, l^-) S(0) +$$

$$- \mathcal{S}^*(l, l^-) u(l) + \mathcal{V}^*(l, l^-) S(l)$$

Po obliczeniu współczynników w powyższych równaniach i przyjęciu oznaczeń $u(0^+) = u(0) = u_0$, $u(l^-) = u(l) = u_l$, $S(l^-) = S(0) = S_0$, $S(l) = S_l$ można je zapisać w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \int_0^l v^*(x, 0^+) f(x) dx \\ 0 \\ \int_0^l \mathcal{V}^*(x, l^-) f(x) dx \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{AE} & 0 & \frac{l}{AE} \\ -\frac{AE}{l} & 0 & \frac{AE}{l} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ S_0 \\ u_l \\ S_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Zastosujmy ten układ algebraicznych równań brzegowych dla pręta podobnego jak na rys. 6.5, z zamocowaniem po lewej stronie i obciążonego tylko siłą skupioną na prawym końcu ($u(0) = 0$, $S(l) = P$). Wiemy więc, że $f(x) = 0$, $u_0 = 0$, $S_l = P$, a po rozwiązaniu układu równań (6.23) otrzymujemy

$$S_0 = P \quad u_l = \frac{Pl}{AE}$$

Znając wszystkie cztery wielkości brzegowe, otrzymujemy ze wzorów (6.21), (6.22) rozwiązanie (dokładne) w dowolnym punkcie pręta

$$u(\xi) = \frac{P}{AE} \xi \quad S(\xi) = P$$

Dla każdego innego obciążenia i warunków zamocowania rozwiązanie zadania pręta metodą brzegową będzie również dokładne.

6.4. Metoda brzegowa dla wybranych zagadnień dwuwymiarowych i trójwymiarowych

Wiadomości zawarte w tym i następnym rozdziale stanowią rozszerzenie i uściślenie pewnych pojęć związanych z MEB. Ich znajomość nie jest konieczna do zrozumienia podstawowej idei podejścia brzegowego. Powróćmy do zagadnienia 2D, to jest stacjonarnego przepływu ciepła opisanego zagadnieniem brzegowym (1.8), (1.2), (1.3). Zajmiemy się wyprowadzeniem rozwiązania fundamentalnego i sformułowania brzegowego, a następnie różnymi algorytmami MEB dla tego problemu.

6.4.1. Wyprowadzenie rozwiązania fundamentalnego

W celu wyprowadzenia rozwiązania fundamentalnego zapiszmy definiujące go równanie (1.15) w biegunowym układzie współrzędnych r, θ , przyjmując początek w punkcie (ξ, η) przyłożenia źródła punktowego. Jeżeli chwilowo wyłączymy ten punkt z rozważań, to rozwiązanie fundamentalne spełni warunek

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} = 0 \quad \forall (r, \theta), r > 0 \quad (6.24)$$

Ze względu na osiową symetrię ostatnie równanie upraszcza się do następującego

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v^*}{\partial r} \right) = 0 \quad \forall r > 0 \quad (6.25)$$

Po dwukrotnym znalezieniu funkcji pierwotnej otrzymujemy

$$v^* = A \ln r + B \quad (6.26)$$

Stałą B można przyjąć równą zeru, albo $B = -A \ln r_0$, gdzie r_0 jest arbitralnie przyjętą długością służącą do uzyskania bezwymiarowego wyrażenia pod logarytmem. Natomiast stałą A obliczymy z warunku (1.20), czyli spełniając

$$-k \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \nabla^2 v^* dx_1 dx_2 = \varphi(\xi_1, \xi_2) \quad \forall \varphi \in V \quad (6.27)$$

Lewą stronę ostatniego równania przekształcimy następująco:

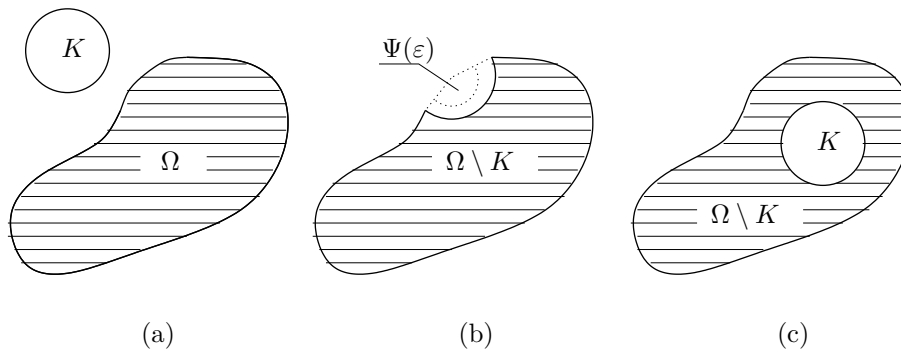
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \nabla^2 v^* dx_1 dx_2 &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 \varphi v^* dx_1 dx_2 \quad (\text{definicja pochodnej dystrybucyjnej}) \\ &= 2\pi A \int_0^\infty \ln r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dr \quad (\text{zmiana zmiennych i symetria}) \\ &= 2\pi A \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ - \int_\varepsilon^R \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \left[r \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \Big|_\varepsilon^R \right\} \quad (\text{całkowanie przez części}) \\ &= 2\pi A \varphi(\xi_1, \xi_2) \quad (\text{ograniczony nośnik funkcji } \varphi). \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższy wynik w równaniu (6.27), otrzymamy

$$A = -\frac{1}{2\pi k} \quad (6.28)$$

6.4.2. Wyprowadzenie tożsamości Somigliany

Rozważmy teraz szczegółowo ostatni etap wyprowadzenia tożsamości Somigliany dla zagadnienia Laplace'a. Polega on na podstawieniu za funkcję testową w zasadzie Bettiego-Maxwella (1.24) rozwiązania fundamentalnego T^* , które ma osobliwość typu logarytmicznego w punkcie (ξ, η) . Dlatego, podobnie jak w przypadku 1D, zamiast całego obszaru Ω należy rozważyć obszar Ω bez koła K o środku w punkcie (ξ, η) i o promieniu długości ε , a następnie dokonać przejścia granicznego, dążąc z długością promienia do zera. Dla obszaru $\Omega \setminus K^1$ z brzegiem $(\Gamma \setminus K) \cup (\partial K \cap \Omega)$ mamy



Rys.6.7. Zadanie 2D – obszar całkowania przy wyprowadzaniu tożsamości Somigliany dla różnych położenia punktu osobliwości

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega \setminus K} T^* f \, d\Omega - \int_{\Omega \setminus K} T_{,ii}^* k T \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma \setminus K} (T_{,i}^* n_i k T + T^* q_i n_i) \, d\Gamma + \int_{\partial K \cap \Omega} (T_{,i}^* n_i k T + T^* q_i n_i) \, d\Gamma = 0 \quad (6.29) \end{aligned}$$

¹ $\Omega \setminus K$ oznacza różnicę zbiorów Ω , K , czyli zbiór punktów należących do Ω i nie należących do K .

Graniczne wartości poszczególnych wyrażeń są następujące:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus K} T^* f \, d\Omega &= \int_{\Omega} T^* f \, d\Omega && \text{(całka niewłaściwa)} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus K} T_{,ii}^* k T \, d\Omega &= 0 && \text{(bo } \forall \varepsilon > 0, T_{,ii}^* = 0) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus K} (T_{,i}^* n_i k T + T^* q_i n_i) \, d\Gamma & && (6.30) \\ &= \int_{\Gamma} (T_{,i}^* n_i k T + T^* q_i n_i) \, d\Gamma && \text{(całka niewłaściwa)} \end{aligned}$$

Przed rozważeniem ostatniej granicy zauważmy, że począwszy od pewnej wartości ε , krzywa $\partial K \cap \Omega$ (rys. 6.7) jest

- (a) zbiorem pustym, albo
- (b) łukiem okręgu opartym na kącie $\Psi(\varepsilon)$, albo
- (c) okręgiem ($\Psi = 2\pi$).

W pierwszym przypadku całka po $\partial K \cap \Omega$ we wzorze (6.29) znika, a w pozostałych, na podstawie twierdzenia o wartości średniej dla całek, istnieją punkty (\hat{x}, \hat{y}) i $(\hat{x}, \hat{y}) \in \partial K \cap \Omega$ takie, że odpowiednie całki można zastąpić iloczynem wartości funkcji podcałkowej w odpowiednim punkcie przez długość łuku $(\varepsilon\Psi(\varepsilon))$, po którym odbywa się całkowanie, czyli

$$\begin{aligned} \int_{\partial K \cap \Omega} T_{,i}^* n_i k T \, d\Gamma &= -\frac{1}{2\pi k} \frac{\varepsilon \cos \alpha (-\cos \alpha) + \varepsilon \sin \alpha (-\sin \alpha)}{\varepsilon^2} T(\hat{x}, \hat{y}) k \varepsilon \Psi(\varepsilon) = \\ &= \frac{\Psi(\varepsilon)}{2\pi} T(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

oraz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K \cap \Omega} T^* q_i n_i \, d\Gamma = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Psi(\varepsilon) \frac{q_n(\hat{x})}{2\pi k} \varepsilon \ln \varepsilon \right]$$

więc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K \cap \Omega} (T_{,i}^* n_i k T + T^* q_i n_i) \, d\Gamma = \frac{\Psi}{2\pi} T(\xi, \eta) \quad (6.31)$$

gdzie Ψ jest przykładowo równe π dla (ξ, η) należącego do gładkiej części brzegu, a $\frac{\pi}{2}$ dla wierzchołka prostokąta. Po wstawieniu granicznych wartości (6.30), (6.31) do wzoru (6.29) otrzymuje się wyprowadzoną wcześniej, ale bez powyższych szczegółów, tożsamość Somigliany (1.25) z parametrem c obliczanym w następujący sposób:

$$c = \begin{cases} 1 & \text{dla punktów wewnętrznych,} \\ \frac{\Psi}{2\pi} & \text{dla punktów brzegowych,} \\ 0 & \text{dla punktów zewnętrznych.} \end{cases} \quad (6.32)$$

6.4.3. Wariacyjne sformułowanie całkowego równania brzegowego

Rozważmy teraz bardziej ogólny przypadek warunków brzegowych niż poprzednio, czyli zarówno typu Dirichleta (1.2), jak i Neumanna (1.3). Powoduje to, że niewiadomą funkcją jest temperatura na części Γ_q i intensywność strumienia ciepła (pochodna normalna pomnożona przez stałą materiałową k) na pozostałej części Γ_T brzegu Γ . Sformułowanie brzegowe ma wtedy postać następującą:

Znaleźć funkcję $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \begin{cases} T(s) & \text{na } \Gamma_q \\ q_n(s) & \text{na } \Gamma_T \end{cases}$$

taką, że

$$\begin{aligned} \frac{\Psi}{2\pi} \gamma(\xi_1, \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) - \int_{\Gamma_q} \varphi(x_1, x_2) q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \\ + \int_{\Gamma_T} \varphi(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} = \end{aligned}$$

6.4. Metoda brzegowa dla wybranych zagadnień dwuwymiarowych ... 259

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\Psi}{2\pi}[1 - \gamma(\xi_1, \xi_2)]\bar{T}(\xi_1, \xi_2) + \\
 &+ \int_{\Gamma_T} \bar{T}(x_1, x_2)q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \\
 &- \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n(x_1, x_2)T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \\
 &+ \int_{\Omega} f(x_1, x_2)T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dx_1 dx_2 \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_q \\ 0 & \text{dla } (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_T \end{cases}$$

Ogólną metodą rozwiązania takiego równania jest podejście wariacyjne, które daje następujące sformułowanie brzegowe: *Znaleźć $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że*

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \psi(s) \left[\frac{\Psi}{2\pi} \gamma \varphi(\xi_1, \xi_2) - \int_{\Gamma_q} T(x_1, x_2)q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Gamma_T} q_n(x_1, x_2)T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} \right] ds_{(\xi_1, \xi_2)} = \\
 &= \int_{\Gamma} \psi(s) \left[\frac{\Psi}{2\pi} (1 - \gamma)\bar{T}(\xi_1, \xi_2) + \right. \\
 &\quad + \int_{\Gamma_T} \bar{T}(x_1, x_2)q_n^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \\
 &\quad - \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n(x_1, x_2)T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dt_{(x_1, x_2)} + \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} f(x_1, x_2)T^*(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) dx_1 dx_2 \right] ds_{(\xi_1, \xi_2)} \quad \forall \psi \in V(\Gamma)
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

gdzie $V(\Gamma)$ jest przestrzenią funkcji testowych. Zamiast dokładnego rozwiązania zagadnienia (6.33) będziemy obliczać jego aproksymację φ^h w pewnej

skończenie wymiarowej przestrzeni V_h , czyli w postaci

$$\varphi^h(s) = \sum_{i=1}^N a_i \chi(s) \quad (6.34)$$

Funkcje bazowe $\chi(s)$ zależą od przyjętej metody numerycznej. W przypadku MES i MEB są to bazowe funkcje kształtu. Gdyby zastosować metodę typu różnic skończonych (podejście bezsiatkowe), byłyby to np. funkcje wynikające z aproksymacji metodą ruchomych, ważonych, najmniejszych kwadratów.

Przyjmując, że funkcje testowe są aproksymowane przez te same funkcje χ , otrzymuje się układ równań algebraicznych na niewiadome a_i

$$\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (6.35)$$

gdzie

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \int_{\Gamma} \chi_i(s) \left\{ \frac{\Psi}{2\pi} \gamma \chi_j(s) - \int_{\Gamma_q} \chi_j(t) q_n^*[x_1(t), x_2(t), \xi_1(s), \xi_2(s)] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_T} \chi_j(t) T^*[x_1(t), x_2(t), \xi_1(s), \xi_2(s)] dt \right\} \\ b_i &= \int_{\Gamma} \chi_i(s) \left\{ \int_{\Omega} f(x_1, x_2) T^*[x_1, x_2, \xi_1(s), \xi_2(s)] dx_1 dx_2 - \frac{\Psi}{2\pi} (1 - \gamma) \bar{T} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_T} \bar{T}(s) q_n^*[x_1(t), x_2(t), \xi_1(s), \xi_2(s)] dt + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n(s) T^*[x_1(t), x_2(t), \xi_1(s), \xi_2(s)] dt \right\} \end{aligned}$$

Taki układ równań jest symetryczny i pełny. W przypadku metody kolokacji był również pełny, ale niesymetryczny, jednak obliczanie jego współczynników nie wymagało dwukrotnego całkowania. Układ ten dla przykładu testowego z punktu 6.2, po zastosowaniu do odpowiednich całek 5-punktowej

kwadratury Gaussa-Legendre'a, ma postać

$$\begin{bmatrix} .2388E+0 & .5864E-1 & -.1127E-1 & .5864E-1 \\ .5864E-1 & .2388E+0 & .5864E-1 & -.1127E-1 \\ -.1127E-1 & .5864E-1 & .2388E+0 & .5864E-1 \\ .5864E-1 & -.1127E-1 & .5864E-1 & .2388E+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1252 \\ -.1249 \\ -.1249 \\ .1252 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Po rozwiązaniu układu (6.36) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5005 \\ -0.4997 \\ -0.4997 \\ 0.5005 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

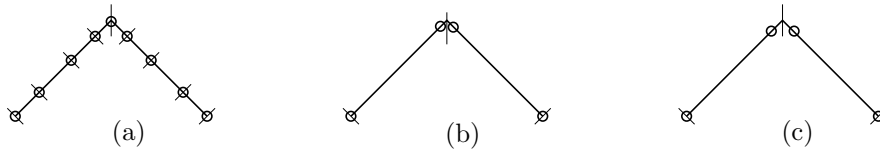
Wartości rozwiązania we wnętrzu pokrywają się praktycznie z wynikami uzyskanymi metodą kollokacji.

6.4.4. Aproksymacja funkcji brzegowych w narożach

W ogólnym przypadku funkcja T jest ciągła na całym brzegu i dlatego do jej aproksymacji stosuje się elementy dostosowane. Szczególnej uwagi wymaga natomiast aproksymacja funkcji q_n , która w narożach albo w miejscu zmiany „obciążenia” może być nieciągła. Możliwe są przynajmniej następujące sposoby uwzględnienia tego faktu:

- Wprowadzenie ciągłej aproksymacji i modelowanie nieciągłości odpowiednio małymi elementami brzegowymi (rys.6.8a). Prowadzi to do pewnych błędów, zwykle jednak niewielkich i zlokalizowanych w pobliżu nieciągłości.
- Wprowadzenie nieciągłej aproksymacji rozwiązania, najlepiej tylko w punktach, w których ta nieciągłość się pojawia. Oznacza to, że odpowiednie węzły końcowe elementów brzegowych są traktowane jako należące do wnętrza elementu (rys.6.8b). Nie stwarza to komplikacji w wersji Bubnowa-Galerkina, ale wymaga dodatkowych zabiegów przy metodzie

kollokacji. Potrzebne jest albo wprowadzenie dodatkowych równań, albo zastosowanie punktów kollokacji nie pokrywających się z węzłowymi, albo też odsunięcie węzłów od końców elementów o arbitralnie przyjętą odległość, np. $\frac{1}{10}$ długości elementu (rys.6.8c). Gdyby ta nieciągłość występowała na końcu każdego elementu (nawet jeżeli rozwiązanie jest tam ciągłe), to taka aproksymacja nie gwarantowałaby zbieżności metody (monotonicznego zmniejszania się błędu wraz z malejącą długością elementów). Dlatego nieciągłość należy wprowadzać tylko w narożach faktycznie występujących w danym obszarze, a nie np. w narożach powstających przez dyskretyzację gładkiego, krzywoliniowego brzegu za pomocą elementów liniowych.



Rys.6.8. Zadanie 2D – aproksymacja funkcji nieciągłej w narożu: „małe” elementy (a), węzły podwójne (b), odsunięte węzły końcowe (c)

6.4.5. MEB w zagadnieniach teorii sprężystości

Bardzo podobnie jak zagadnienie Poissona rozwiązuje się zadania teorii sprężystości. Podstawową niewiadomą jest w tym przypadku pole przemieszczeń, a tożsamość Somigliany, czyli wzór reprezentujący rozwiązanie, ma postać

$$cu_\alpha(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x})U_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} [t_j(\mathbf{x})U_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u_j(\mathbf{x})T_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] ds_{\mathbf{x}} \quad (6.38)$$

gdzie:

$U_{\alpha j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – rozwiązanie fundamentalne Kelvina dla zagadnienia teorii sprężystości, mające interpretację j -tej współrzędnej przemieszczenia w punkcie \mathbf{x} od jednostkowej siły skupionej przyłożonej w punkcie \mathbf{y} i w kierunku α , w obszarze rozciągniętym do całej płaszczyzny \mathbb{R}^2 ,

$T_{\alpha j} = S_{\alpha jk} n_k$ – oblicza się na brzegu obszaru, n_k są współrzędnymi wersora normalnego, zewnętrznego do tego brzegu,

6.4. Metoda brzegowa dla wybranych zagadnień dwuwymiarowych ... 263

$S_{\alpha jk}$ – składowe tensora naprężeń w punkcie \mathbf{x} od jednostkowej siły skupionej przyłożonej w punkcie \mathbf{y} w kierunku osi α ,

t_j, b_j – składowe obciążenia na brzegu i we wnętrzu,

c – parametr zależny od położenia punktu \mathbf{y} ,

$i, j, k, \alpha = 1, 2$

Dla płaskiego stanu odkształcenia

$$U_{\alpha j} = \frac{1 + \nu}{4\pi E(1 - \nu)} \left[(4\nu - 3) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \delta_{\alpha i} + \frac{\rho_\alpha \rho_j}{r^2} \right] \quad (6.39)$$

$$S_{\alpha i j} = -\frac{1 + \nu}{2\pi E(1 - \nu)} \frac{1}{r^2} \left[(1 - 2\nu)(\delta_{i\alpha} \rho_j + \delta_{j\alpha} \rho_i + \delta_{ij} \rho_\alpha) + \frac{2\rho_i \rho_j \rho_\alpha}{r^2} \right] \quad (6.40)$$

gdzie $\rho_i = x_i - \xi_i$, $r^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$.

Zasadniczą różnicą między zagadnieniem Poissona a płaskim zadaniem teorii sprężystości jest to, że obecnie niewiadoma funkcja przyjmuje wartości wektorowe. W związku z tym w zadaniach 2D, do obliczenia rozwiązania z tożsamości Somigliany (6.38), w każdym punkcie brzegu należy znać dwie składowe przemieszczenia (u_1, u_2) i dwie składowe obciążenia (t_1, t_2). Tylko połowa z tych czterech wielkości jest znana z warunków brzegowych. Przykładowo dla tarczy pokazanej na rys. 6.9 z warunków brzegowych wiemy, że

$$\begin{array}{lll} t_1 = 0 & u_2 = 0 & \text{na } AB \\ t_1 = p & t_2 = 0 & \text{na } BC \\ t_1 = 0 & t_2 = 0 & \text{na } CDEF \\ u_1 = 0 & t_2 = 0 & \text{na } AE \end{array}$$

Przyjęto, że tarcza wykonana jest ze stali o module Younga $E = 200$ GPa i współczynnika Poissona $\nu = 0.3$. Zastosowano program do analizy płaskiego stanu odkształcenia, więc aby uzyskać rozwiązanie dla płaskiego stanu naprężenia, wstawiono stałe materiałowe zmodyfikowane w poniższy sposób

$$E' = E \frac{1 + 2\nu}{(1 + \nu)^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 + \nu}$$

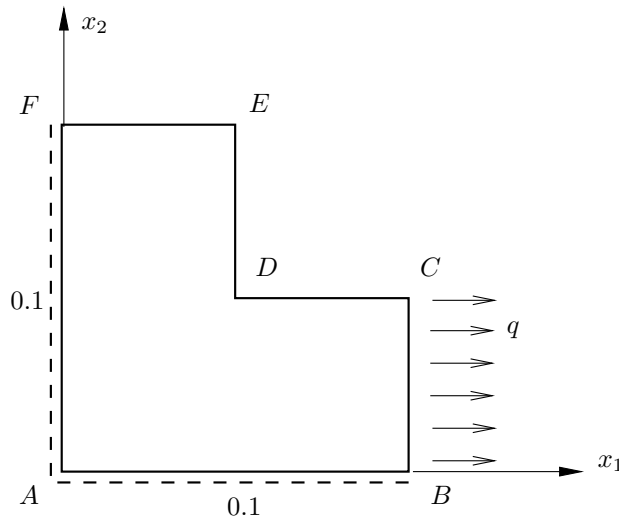
Przyjmując obciążenie 100 N rozłożone na boku BC o długości 0.1 m i zakładając grubość tarczy $d=0.01$ m, otrzymuje się stałe obciążenie brzegu

$$q = \frac{100}{0.1 \cdot 0.01} = 100\text{kPa}.$$

Rozwiązanie przy 800 brzegowych stopniach swobody aproksymujących

$$\begin{array}{lll} u_1 & t_2 & \text{na } AB \\ u_1 & u_2 & \text{na } BC \\ u_1 & u_2 & \text{na } CDE \\ t_1 & u_2 & \text{na } AE \end{array}$$

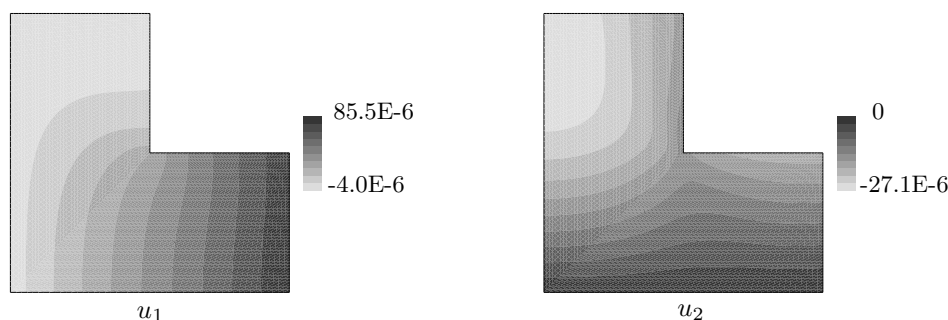
pokazano na rys. 6.10. Pochodne rozwiązania dokładnego w narożu wewnętrznym D są osobliwe (koncentracja naprężeń). W pobliżu tego punktu należy spodziewać się największego błędu. Aby go zmniejszyć, należałoby tam zagęścić elementy.



Rys.6.9. Tarcza – schemat podparcia i obciążenia

6.4.6. MEB dla obszarów nieograniczonych

Jedną z zalet MEB jest łatwość jej zastosowania do obszarów nieograniczonych, np. przy analizie deformacji gruntu wokół tunelu (statyka), odbicia dźwięku od okrętu podwodnego (akustyka), odbicia promieni radaru od samolotu (elektromagnetyka). Inne metody komputerowe wymagają w takich zadaniach zastosowania albo skończonego obszaru obliczeniowego i psujących dokładność rozwiązania, szczególnie w zjawiskach falowych, odpowiednich warunków brzegowych, albo elementów nieskończonych wymagających z kolei specjalnej aproksymacji w kierunku radialnym.



Rys.6.10. Tarcza – numerycznie obliczone poziome i pionowe składowe pola przemieszczeń

W tożsamości Somigliany dla obszaru nieograniczonego całka po obszarze znika w przypadku braku źródeł i pozostaje całkowanie wyłącznie po ograniczonym brzegu. Cały algorytm MEB pozostaje praktycznie bez zmian.

6.5. Całkowanie w metodzie elementów brzegowych

Jedną z podstawowych trudności w stosowaniu MEB jest obliczanie całek niewłaściwych i „bliskich” niewłaściwym, czyli takich, w których funkcja podcałkowa nie ma osobliwości, ale jest całkowana w jej pobliżu, np. po elemencie brzegowym sąsiadującym z elementem, do którego należy punkt osobliwy.

Na początku przytoczmy twierdzenie mówiące, kiedy całki z funkcji występujących w rozwiązaniach fundamentalnych są niewłaściwe.

Twierdzenie 6

Założenia

1. $I = \int_D \frac{1}{r^m} d\mathbf{x}$.
2. $D \subset \mathbb{R}^n$, D – obszar ograniczony, $n=1,2,3$.
3. Obszar D zawiera punkt osobliwości, od którego obliczana jest odległość, oznaczona przez r .

Teza

$$\begin{aligned}
 m \leq 0 &\Rightarrow \exists I \text{ jako całka właściwa} \\
 0 < m < n &\Rightarrow \exists I \text{ jako całka niewłaściwa w sensie klasycznym} \\
 m = n &\Rightarrow \exists I \text{ jako całka niewłaściwa w sensie wartości} \\
 &\quad \text{głównej Cauchy'ego} \\
 n < m &\Rightarrow \nexists I, \\
 \forall n &\quad \int_D \ln r d\mathbf{x} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Dla uzupełnienia podamy jeszcze definicje całek niewłaściwych w sensie klasycznym i w sensie wartości głównej Cauchy'ego po odcinku $[a, b]$ z funkcji $F(r)$, mającej osobliwość w punkcie $c \in (a, b)$.

Definicja. Jeżeli istnieją granice

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} F(r) dr \quad \text{i} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b F(r) dr \quad (6.41)$$

to ich suma jest wartością całki niewłaściwej $\int_a^b F(r) dr$.

Definicja. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} F(r) dr + \int_{c+\varepsilon}^b F(r) dr \right] \quad (6.42)$$

to jest ona wartością główną całki niewłaściwej $\int_a^b F(r) dr$.

Źródłem osobliwości w MEB jest rozwiązanie fundamentalne. Typy tych osobliwości i rodzaje związanych z nimi całek niewłaściwych dla różnych rządów równań różniczkowych i wymiarów przestrzeni, w których są rozwiązywane zestawiono w tab.6.3. Z twierdzenia 6 wynika, że całki z rozwiązań fundamentalnych są albo właściwe, albo istnieją w sensie klasycznym, natomiast całki z pochodnych rozwiązania fundamentalnego, mających wyższy rząd osobliwości, albo są właściwe (1D), albo istnieją w sensie wartości głównej. Dla zagadnień czwartego rzędu (belki, płyty) rozwiązania fundamentalne są funkcjami klasy C^2 (1D), typu $r^2 \ln r$ (2D) oraz $r \ln r$ (3D). Ich drugie i trzecie pochodne są funkcjami takiego rodzaju, jak rozwiązania fundamentalne i ich pochodne dla zagadnień drugiego rzędu (zestawione w tabeli 6.3).

k – wymiar zadania ($\Omega \in \mathbb{R}^k$)	1	2	3
n – wymiar brzegu $\Gamma = \partial\Omega$, ($n = k - 1$)	0	1	2
Typ rozwiązania fundamentalnego	C^0	$\ln r$	$\frac{1}{r}$
Rząd osobliwości (m z twierdzenia 6)	-1	„0.5”	1
Rząd osobliwości pochodnej rozwiązania fundamentalnego	0	1	2

Tabela 6.3. Zestawienie typów osobliwości rozwiązania fundamentalnego dla zagadnień drugiego rzędu i wymiarów obszarów, po których są całkowane – rząd osobliwości „0.5” oznacza symbolicznie osobliwość typu logarytmicznego

Spośród wielu metod obliczania całek niewłaściwych omówimy kolejno: analityczną, numeryczną, ruchu sztywnego i analityczno-numeryczną.

Metoda analityczna

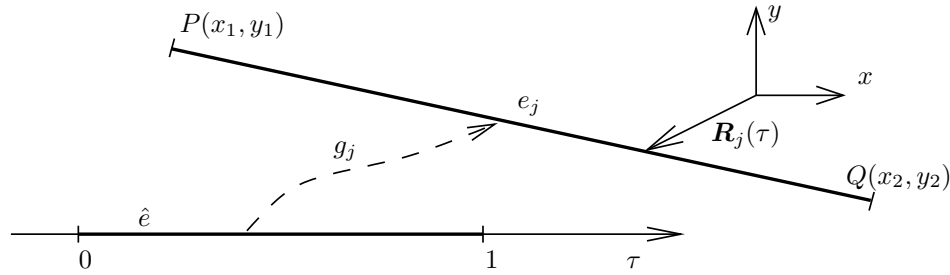
Podejście analityczne, możliwe do zastosowania tylko w niektórych przypadkach, daje wynik dokładny. Ten sposób obliczania całek niewłaściwych (przy okazji również właściwych) omówimy na przykładzie zadania z punktu 6.2. W ogólnym przypadku, np. elementów krzywoliniowych, całki I_{ij} , J_{ij} oblicza się, korzystając z *elementu wzorcowego*. Umożliwia on zarówno łatwą definicję funkcji kształtu, jak i sprowadzenie całkowania do odcinka $[0,1]$ (ewentualnie $[-1,1]$), dla którego są stabilizowane wagi i punkty kwadratur całkowania numerycznego.

Przyjmijmy, że elementem wzorcowym jest odcinek $[0,1]$ na osi τ (rys. 6.11). Zdefiniujmy na nim stałą funkcję kształtu $\hat{N}(\tau)$ do aproksymacji rozwiązania równania całkowego i dwie liniowe funkcje kształtu $\hat{\psi}_1(\tau)$, $\hat{\psi}_2(\tau)$ do aproksymacji geometrii elementów brzegowych (element superparametryczny)

$$\hat{N}(\tau) = 1 \quad \hat{\psi}_1(\tau) = 1 - \tau \quad \hat{\psi}_2(\tau) = \tau$$

Jeżeli element prostoliniowy e_j ma końce $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, to jego równanie parametryczne, albo inaczej pewne odwzorowanie g_j elementu wzorcowego na j -ty rzeczywisty, ma postać

$$g_j : \mathbf{R}_j(\tau) = [x_1\hat{\psi}_1(\tau) + x_2\hat{\psi}_2(\tau)]\mathbf{i} + [y_1\hat{\psi}_1(\tau) + y_2\hat{\psi}_2(\tau)]\mathbf{j}$$



Rys.6.11. Element wzorcowy (\hat{e}) i jego odwzorowanie (g_j) na element rzeczywisty (e_j)

gdzie \mathbf{R}_j jest wektorem wodzącym punktów należących do elementu rzeczywistego e_j , $\tau \in [0, 1]$, a \mathbf{i}, \mathbf{j} są wersorami osi (x, y) globalnego układu współrzędnych. Po przekształceniu otrzymamy

$$\mathbf{R}_j(\tau) = [x_1 + (x_2 - x_1)\tau] \mathbf{i} + [y_1 + (y_2 - y_1)\tau] \mathbf{j}$$

Funkcje kształtu na elementach rzeczywistych są złożeniem odwzorowania g_j i funkcji \hat{N} , czyli

$$N = \hat{N} \circ g_j^{-1}$$

Faktycznie dla elementów stosowanych w przykładzie mamy $N = 1$.

Do całkowania potrzebna będzie pochodna wektora wodzącego \mathbf{R}_j

$$\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}$$

Można teraz sprowadzić całkowanie po elemencie rzeczywistym do całkowania po elemencie wzorcowym w następujący sposób:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_0^1 T^*[x(\tau), y(\tau), \xi_i, \eta_i] \sqrt{\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau}} d\tau \\ J_{ij} &= \int_0^1 \bar{T}[x(\tau), y(\tau)] \varphi^*[x(\tau), y(\tau), \xi_i, \eta_i] \sqrt{\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (6.43)$$

Wyrażenie $\sqrt{\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau}}$ jest odpowiednikiem jakobianu, gdyż wyraża proporcję zmiany długości przy transformacji g_j . Dla elementu prostoliniowego

jest stałe i równe długości elementu rzeczywistego. Po oznaczeniu tego wyrażenia przez h_j wzory przyjmują postać

$$\begin{aligned} I_{ij} &= h_j \int_0^1 T^*[x(\tau), y(\tau), \xi_i, \eta_i] d\tau \\ J_{ij} &= h_j \int_0^1 \bar{T}[x(\tau), y(\tau)] \varphi^*[x(\tau), y(\tau), \xi_i, \eta_i] d\tau \end{aligned} \quad (6.44)$$

gdzie

$$x(\tau) = x_1 + (x_2 - x_1)\tau \quad y(\tau) = y_1 + (y_2 - y_1)\tau$$

$$\begin{aligned} T^*(x, y, \xi_i, \eta_i) &= -\frac{1}{4\pi k} \ln r^2 \quad \varphi^*(x, y, \xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x - \xi_i}{r^2} n_x + \frac{y - \eta_i}{r^2} n_y \right) \\ r^2 &= (x_1 - \xi_i)^2 + (x_2 - \eta_i)^2 \end{aligned}$$

n_x, n_y są współrzędnymi wektora normalnej w punkcie (ξ_i, η_i) , zewnętrznej do obszaru.

Obliczmy teraz odległość r między dwoma punktami $[\xi(\tau_i), \eta(\tau_i)]$ oraz $[x(\tau), y(\tau)]$ należącymi do odcinka e_i . Załóżmy na początku, że punkt (ξ, η) należy do wnętrza i -tego odcinka i dzieli go na odcinki o długościach h_a, h_b

$$r = \sqrt{[x_1 + (x_2 - x_1)\tau - x_1 - (x_2 - x_1)\tau_i]^2 + [y_1 + (y_2 - y_1)\tau - y_1 - (y_2 - y_1)\tau_i]^2}$$

a po uproszczeniu

$$r = h_i |\tau - \tau_i|$$

Można teraz obliczyć pierwszą z całek

$$\begin{aligned} I_{ii} &= -\frac{1}{2\pi k} h_i \int_0^1 \ln[(h_i |\tau - \tau_i|)] d\tau \\ &= -\frac{h_i}{2\pi k} \left[\ln h_i + \int_0^{\tau_i} \ln(\tau_i - \tau) d\tau + \int_{\tau_i}^1 \ln(\tau - \tau_i) d\tau \right] \end{aligned}$$

gdzie

$$\tau_i = \frac{h_a}{h_i}, \quad 1 - \tau_i = \frac{h_b}{h_i}$$

Na podstawie definicji całki niewłaściwej jako odpowiedniej granicy i po uwzględnieniu, że $\int \ln x dx = x \ln x - x$ otrzymujemy

$$I_{ii} = -\frac{h_i}{2\pi k} [\ln h_i + \tau_i \ln \tau_i - \tau_i + (1 - \tau_i) \ln(1 - \tau_i) - (1 - \tau_i)]$$

a po odpowiednich przekształceniach i uwzględnieniu wcześniej rozważanego przypadku $i \neq j$ otrzymujemy

$$I_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi k} [h_a(1 - \ln h_a) + h_b(1 - \ln h_b)] & \text{dla } i = j, h_a > 0, h_b > 0 \\ \frac{1}{2\pi k} [h_j(1 - \ln h_j)] & \text{dla } i = j, h_a = 0 \text{ albo } h_b = 0 \\ h_j \sum_{k=1}^M T^*[x(\tau_k), y(\tau_k), \xi_i, \eta_i)] w_k & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

gdzie τ_k, w_k są węzłami i wagami M -punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a (w przykładzie stosowano $M = 5$).

Przedstawiony sposób całkowania za pomocą elementu wzorcowego może być wykorzystany również do elementów krzywoliniowych. Należy wtedy zastosować więcej geometrycznych stopni swobody.

Metoda numeryczna

Niektóre typy całek można obliczyć numerycznie, korzystając z odpowiedniej wersji kwadratur typu Gaussa, np. przystosowanych do całkowania funkcji $f(\xi) \ln \xi$ po odcinku $[0,1]$ wzorem

$$\int_0^1 f(\xi) \ln \xi d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (6.45)$$

Węzły (ξ_i) i wagi (w_i) tej kwadratury podano w tab. 6.4.

Należy pamiętać o właściwej zmianie zmiennych przed zastosowaniem wzoru (6.45). Przykładowo, odwzorowanie $x = h\xi$ odcinka $[0, 1]$ na odcinek $[0, h]$, mające Jacobian $\frac{dx}{d\xi} = h$, pozwala na następujące przekształcenia:

$$\int_0^h \ln x dx = h \int_0^1 \ln(h\xi) d\xi = h \ln h + h \int_0^1 \ln(\xi) d\xi$$

n	Węzły	Wagi
2	0.112009	-0.718539
	0.602277	-0.281461
3	0.063891	-0.513405
	0.368997	-0.391980
	0.766880	-0.094615
4	0.041448	-0.383464
	0.245275	-0.386875
	0.556165	-0.190435
	0.848982	-0.039225

Tabela 6.4. Węzły i wagi dla kwadratury (6.45)

Dopiero do ostatniej całki, w której $f(\xi) = 1$ można zastosować kwadraturę z tab. 6.4.

Metoda ruchu sztywnego

Polega ona na tym, że zapisujemy tożsamość Somigliany dla stałego jednostkowego rozwiązania ($T = 1$) z zerowym obciążeniem ($f = 0$, $q_n = 0$), otrzymując następującą zależność:

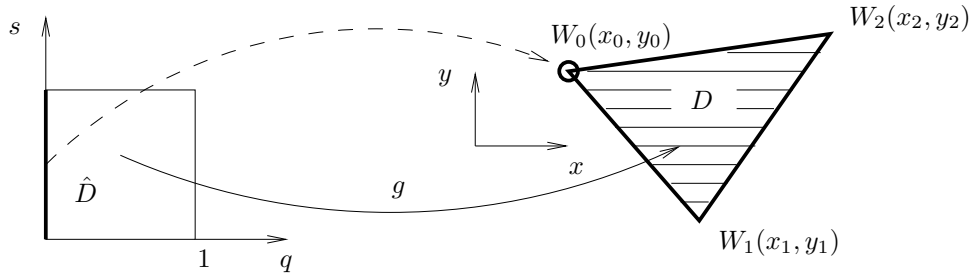
$$c(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} q_n^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

Po uwzględnieniu dyskretyzacji $T(t) = \sum_{j=1}^N T_j \psi_j$ i dla funkcji kształtu typu Lagrange'a, dla których $T_j = 1$, gdy $T(t) = 1$, otrzymujemy tożsamość

$$c(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} \psi_j q_n^*(x, y, \xi, \eta) dt_{(x,y)} \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

Podstawiając $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i) \in e_i \subset \Gamma$ (punkt należący do i -tego elementu brzegowego), można przedstawić sumę całek niewłaściwych po elemencie e_i za pomocą sumy całek właściwych po pozostałych elementach

$$c(\xi, \eta) - \sum_{j=1}^N \int_{e_i} \psi_j q_n^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma \setminus e_i} \psi_j q_n^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \quad (6.46)$$



Rys.6.12. Transformacja kwadratu na trójkąt za pomocą trójkątno-biegunowego układu współrzędnych (6.48)

Wzór (6.46) pozwala sprawdzić dokładność obliczeń. Jeżeli natomiast mamy do czynienia z aproksymacją odcinkowo stałą, to można obliczyć jeden ze współczynników układu równań algebraicznych pojawiający się przy stosowaniu metody kolokacji dla zadania z warunkami Dirichleta, a zawierający nie tylko całkę niewłaściwą, ale również parametr c zależny od gładkości brzegu w punkcie (ξ, η)

$$c(\xi, \eta) - \int_{e_i} q_n^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} = \sum_{j=1, i \neq j}^N \int_{e_j} q_n^*(x, y, \xi_i, \eta_i) dt_{(x,y)} \quad (\xi_i, \eta_i) \in e_i \quad (6.47)$$

Metoda analityczno-numeryczna

Jednym ze sposobów zamiany powierzchniowej całki niewłaściwej na właściwą jest zastosowanie trójkątno-biegunowego układu współrzędnych q, s (rys.6.12). Zakładamy, że punkt osobliwości znajduje się w dowolnym wierzchołku trójkąta, po którym odbywa się całkowanie. Jeżeli obszar jest inny, to należy podzielić go na odpowiednie podobszary trójkątne.

Przyjmując, że punktem osobliwości jest wierzchołek $\mathbf{W}_0(x_0, y_0)$, a pozostałymi wierzchołkami są $\mathbf{W}_1(x_1, y_1)$, $\mathbf{W}_2(x_2, y_2)$, zmiana zmiennych ma postać

$$g : \begin{cases} x = (1 - q)x_0 + q(1 - s)x_1 + qsx_2 \\ y = (1 - q)y_0 + q(1 - s)y_1 + qsy_2 \end{cases} \quad q, s \in [0, 1] \quad (6.48)$$

Jakobian tego odwzorowania jest równy $2qA$, gdzie A jest polem trójkąta $D = W_1W_2W_3$. Taka zmiana zmiennych pozwala np. na następujące przekształcenie:

$$\int_D \ln r^2 dx dy = 2A \left[\int_0^1 q \ln q dq + \int_0^1 \ln \rho ds \right] \quad (6.49)$$

gdzie

$$\rho(s) = [(1-s)x_1 + sx_2 - x_0]^2 + [(1-s)y_1 + sy_2 - y_0]^2 \quad (6.50)$$

Całki po prawej stronie wzoru (6.49) są właściwe i mogą być obliczone analitycznie albo kwadraturą Gaussa-Legendre'a.

Całki właściwe wymagają odpowiedniego doboru ilości punktów całkowania. Ponieważ funkcje podcałkowe nie są w MEB wielomianami, więc najlepiej dobrać dokładność adaptacyjnie, przez zwiększanie ich liczby i sprawdzanie jak zmienia się wynik, aż do momentu ustabilizowania wyników. Jest to szczególnie ważne dla całek bliskich osobliwym.

Można uniknąć obliczania całek niewłaściwych po zapisaniu równania całkowego dla punktów leżących poza obszarem Ω (przypadek $c=0$), ale wybór takich punktów albo odpowiedniej krzywej w podejściu wariacyjnym jest niejednoznaczny i ma duży wpływ na jakość rozwiązania. W związku z tym to podejście jest rzadko stosowane.

6.6. Adaptacja w MEB

Prawie każde rozwiązanie uzyskane numerycznie jest obarczone pewną niedokładnością. Dlatego dla wiarygodności wyników bardzo istotne jest oszacowanie błędu obliczeń i ewentualna jego minimalizacja. Podejście, w którym steruje się dokładnością aproksymacji na podstawie analizy jakości rozwiązania nazywa się podejściem adaptacyjnym. Jego celem jest uzyskanie albo wymaganej dokładności w całym obszarze, albo tylko w wybranych punktach przy jak najmniejszej liczbie niewiadomych. Podejście adaptacyjne wymaga:

- oszacowania błędu *a posteriori*, najlepiej po jednokrotnym rozwiązaniu zagadnienia,
- odpowiedniej strategii adaptacji,
- algorytmu umożliwiającego zmianę siatki i powtórzenie obliczeń z ewentualnym wykorzystaniem poprzednich wyników.

Zwiększanie dokładności obliczeń w metodzie elementów brzegowych odbywa się tak jak w MES, a więc najczęściej przez:

- zmniejszanie wymiarów elementów (adaptacja typu h),
- zwiększanie stopnia funkcji kształtu (adaptacja typu p),
- jednoczesną zmianę parametrów h i p (adaptacja typu hp),
- relokację węzłów (adaptacja typu r),
- generację nowej siatki (adaptacja typu s).

Powstaje pytanie, czy warto dodatkowo komplikować algorytm obliczeń i dokonywać adaptacji zamiast od razu zastosować siatkę z wieloma stopniami swobody. Okazuje się, że pomimo rosnących możliwości komputerów wciąż istnieją zagadnienia zarówno w mechanice, jak i w innych działach fizyki, w których bez podejścia adaptacyjnego nie da się uzyskać wartościowych rozwiązań, np. ze względu na potrzebę dokładnej aproksymacji w bardzo małej części dużego obszaru albo na zbyt dużą kumulację błędów zaokrągleń czy drastyczne pogorszenie zbieżności spowodowane bardzo dużą liczbą niewiadomych. Ponadto, przy dużych zadaniach, oszczędność kilkudziesięciu procent czasu obliczeń, dzięki adaptacyjnie dobranej dyskretyzacji, może oznaczać oszczędność kilku dni albo godzin, co ma istotne znaczenie np. przy przewidywaniu pogody.

Podstawą adaptacji jest wiarygodna ocena błędów rozwiązania, dająca jednocześnie dodatkową cenę informacji o jakości wyników. Istotne jest, aby ta ocena była przeprowadzona za pomocą udowodnionego matematycznie podejścia. Metody heurystyczne bywają tutaj zawodne.

Istnieje wiele metod oszacowania błędów. Podstawowe z nich to metody:

1. *A priori*,
2. *A posteriori*,
 - residualne,
 - jawne,
 - niejawne,
 - interpolacyjne,
 - oparte na wygładzaniu pochodnych rozwiązania,
 - korzystające z wielu rozwiązań uzyskanych na różnych siatkach.

Niektóre metody biorą pod uwagę błąd zaburzenia (pollution error), czyli wywołany niedokładnością w innym, nawet odległym miejscu, w szczególności modelowaniem osłabienia. Dodatkowo istnieją metody pozwalające oszacować błąd wybranej wielkości w pewnym zadanym punkcie (goal oriented).

Metody *a priori* pozwalają przewidzieć teoretycznie poprawność zastosowanej aproksymacji, tempo zbieżności i stabilność obliczeń, ale do adaptacji potrzebne są metody *a posteriori*, którymi dokonuje się dokładniejszego oszacowania rozkładu błędów obliczeń po ich wykonaniu. W tym punkcie przedstawimy ideę oszacowania błędów typu residualnego w wersji jawnej, która jest matematycznie udowodniona, a jednocześnie nie wymaga czasochłonnych obliczeń, jak to ma miejsce np. w wersji niejawnej, w której rozwiązuje się wiele „małych” zagadnień ze specjalnie dobranymi warunkami brzegowymi. Metody interpolacyjne bazują na wynikach teorii interpolacji funkcji i relacji błędów stąd wynikającego z błędem rozwiązania zagadnienia brzegowego, zwanego błędem aproksymacji. Z kolei metody oparte na wygładzaniu odwołują się do różnych sposobów uciągania pochodnych rozwiązania numerycznego na etapie *postprocessingu*, czyli opracowania wyników.

Przeprowadźmy analizę błędów rozwiązania numerycznego na przykładzie zagadnienia Dirichleta (6.5) z dowolnym obszarem Ω . Odpowiadające mu równanie brzegowe można zapisać w skrócie

$$(H\varphi)(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad \forall(\xi, \eta) \in \Gamma \quad (6.51)$$

gdzie

$$(H\varphi)(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \varphi(x, y) T^*(x, y, \xi, \eta) ds_{(x,y)}$$

$$f(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \bar{T}(x, y) q_n^*(x, y, \xi, \eta) ds_{(x,y)} - c \bar{T}(\xi, \eta)$$

Po dyskretyzacji otrzymujemy układ równań algebraicznych

$$\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (6.52)$$

a stąd współczynniki rozwiązania numerycznego $\varphi^h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_i$ (χ_i – znane funkcje), którego błąd jest funkcją

$$e(s) = \varphi(s) - \varphi^h(s) \quad (6.53)$$

Po podstawieniu $\varphi = e + \varphi^h$ do równania (6.51) otrzymujemy

$$(He)(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - (H\varphi^h)(\xi, \eta) \quad \forall(\xi, \eta) \in \Gamma \quad (6.54)$$

Prawa strona tego równania jest znana, gdy dysponujemy rozwiązaniem przybliżonym zadania i jest to residuum (R), a równanie (6.54) jest równaniem na błąd (e) rozwiązania numerycznego (φ^h). Stanowi ono podstawę metod residualnych.

W jawnej wersji residualnej metody oszacowania błędu *a posteriori* korzysta się z tego, że na podstawie ciągłości i bijektywności operatora H można udowodnić istnienie dwóch stałych dodatnich C_1, C_2 , zależnych od H , a niezależnych od h, p , takich że

$$C_1 \|R\|_{1,\Gamma} \leq \|e\|_{0,\Gamma} \leq C_2 \|R\|_{1,\Gamma} \quad (6.55)$$

gdzie

$$\|g\|_{0,\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma} g^2 ds} \quad \|g\|_{1,\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma} \left[g^2 + \left(\frac{dg}{ds} \right)^2 \right] ds} \quad (6.56)$$

Sumowanie kwadratów funkcji i jej pochodnej może budzić wątpliwości ze względu na to, że jeżeli funkcja g ma interpretację pewnej wielkości fizycznej, to g i $\frac{dg}{ds}$ mają inne wymiary. Faktycznie wzory (6.56) są czysto matematyczną definicją, a nie związkami między wielkościami fizycznymi, ale dla uniknięcia nieporozumień można zmodyfikować drugą normę bez utraty ważności twierdzenia o oszacowaniu błędu. Przyjmijmy więc w dalszym ciągu, że

$$\|g\|_{1,\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma} \left[\alpha g^2 + \beta \left(\frac{dg}{ds} \right)^2 \right] ds} \quad (6.57)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$.

Obliczając całkę z pochodnej, należy pamiętać, aby tę pochodną odpowiednio transformować po zmianie zmiennych

$$\begin{aligned} \int_e \left(\frac{dg}{ds} \right)^2 ds &= \int_0^1 \left(\frac{dg}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \right)^2 \sqrt{\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau}} d\tau \\ &= \int_0^1 \left(\frac{dg}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \right)^{-1} \sqrt{\frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}_j}{d\tau}} d\tau = \frac{1}{h} \int_0^1 \left(\frac{dg}{d\tau} \right)^2 d\tau \end{aligned} \quad (6.58)$$

Nierówności (6.55) są podstawowym wymaganiem stawianym funkcji (tutaj R) służącej do oszacowania błędu obliczeń, a ponieważ residuum w MEB jest funkcją ciągłą, dlatego też używa się go bezpośrednio jako estymatora dokładności obliczeń. Do adaptacji potrzebna jest *lokalizacja* błędu do poziomu elementu, czyli informacja, jakie jest jego oszacowanie w poszczególnych elementach brzegowych. Przyjmuje się, że jego oszacowaniem jest wkład danego elementu do normy (6.57), czyli liczba η_k zwana wskaźnikiem błędu, obliczana wzorem

$$\eta_k = \sqrt{\int_{e_k} \left[\alpha R^2 + \beta \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 \right] ds} \quad (6.59)$$

Po obliczeniu wszystkich wskaźników błędu można znaleźć ich maksymalną wartość η_{\max} , a następnie zdecydować, które elementy podzielić albo w których podnieść stopień aproksymacji. Adaptacji dokonuje się dla tych elementów, dla których

$$\eta_k \geq \theta \eta_{\max}$$

gdzie $\theta \in [0, 1]$. Należy tu zaznaczyć, że strategia adaptacji nie jest na ogół zadaniem łatwym, zwłaszcza gdy należy zdecydować jakiego ma być typu (h, p, hp, \dots).

Dla zagadnienia Dirichleta z obszarem kwadratowym, takim jak w przykładzie testowym, norma residuum w poszczególnych elementach przedstawiona została w tab. 6.5.

Element	$\ R\ _0$	$\ R\ _1$
1	3.858E-02	0.18940
2	5.588E-02	0.27285
3	5.588E-02	0.27285
4	3.858E-02	0.18940

Tabela 6.5. Oszacowanie błędu w kolejnych elementach dla zadania testowego

Na tej podstawie, przyjmując np. $\theta = 0.8$, co jest dużą wartością, ale przykład jest szczególny, można podzielić elementy 2,3 na mniejsze, powtórzyć obliczenia i ponownie oszacować błąd. Ponieważ oszacowanie błędu jest tym lepsze, im dokładniejsza jest dyskretyzacja, dlatego znalezienie optymalnej siatki odbywa się iteracyjnie.

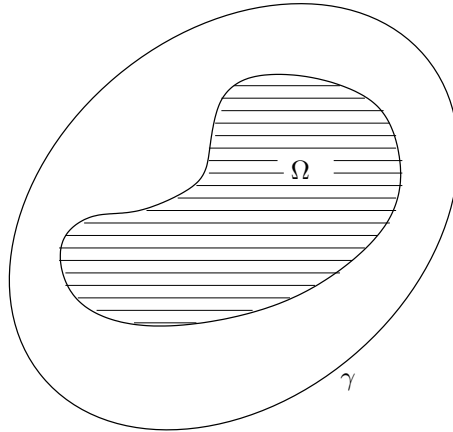
6.7. Inne metody brzegowe

6.7.1. Pośrednia metoda elementów brzegowych

W poprzednich punktach stosowaliśmy tzw. bezpośrednie sformułowanie brzegowe. Obecnie krótko omówimy sformułowanie pośrednie i wynikającą z niego nieco inną wersję metody elementów brzegowych. Nazwa pochodzi stąd, że niewiadomymi są pewne dodatkowe funkcje nie występujące bezpośrednio w sformułowaniu zagadnienia.

Korzystając z tego, że całka po brzegu obszaru w tożsamości Somigliany (1.25) jest całką ogólną równania różniczkowego, można ją zastąpić całką po dowolnej krzywej γ (rys. 6.13) z iloczynu rozwiązania fundamentalnego i pewnej funkcji ψ (pośrednia niewiadoma). Otrzymujemy wtedy ogólną postać rozwiązania jako następującą funkcję zależną od ψ :

$$T(\xi, \eta) = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi, \eta) dx_1 dx_2 + \int_{\gamma} T^*(x, y, \xi, \eta) \psi(\xi, \eta) ds_{(x,y)} \quad (6.60)$$



Rys.6.13. Idea pośredniej wersji MEB

Ponieważ funkcja $T(\xi, \eta)$, wyrażona wzorem (6.60), spełnia tożsamościowo równanie różniczkowe, więc niewiadomą funkcję ψ oblicza się przez spełnienie warunków brzegowych metodą Bubnowa-Galerkina albo kollokacji punktowej. Jeżeli krzywa γ jest położona na zewnątrz obszaru Ω , to nie ma w takim sformułowaniu całek niewłaściwych. Brak jest jednak kryteriów pozwalających na wybór krzywej γ tak, aby zapewnić jednoznaczność rozwiązania i stabilność

obliczeń. Jednowymiarową wersją tej metody jest metoda Bleicha zaproponowana w 1927r., a służąca do obliczania ugięć belek na sprężystym podłożu. Rolę niewiadomej funkcji ψ pełni w niej układ czterech sił skupionych, umieszczonych w tak dobranych punktach poza belką, aby obliczenia były możliwie najprostsze dzięki zerowaniu się pewnych współczynników.

Szczególnym przypadkiem pośredniej wersji MEB jest przyjęcie niewiadomego obciążenia ψ jako zbioru źródeł punktowych (sił skupionych w mechanice) $Q_1\delta_{(\xi_1, \eta_1)}, Q_2\delta_{(\xi_2, \eta_2)}, \dots, Q_N\delta_{(\xi_N, \eta_N)}$. Rozwiązania poszukujemy wtedy w postaci

$$T(x, y) = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) T^*(x_1, x_2, \xi, \eta) dx_1 dx_2 + \sum_{i=1}^N Q_i T^*(x, y, \xi_i, \eta_i) \quad (6.61)$$

Spełnia ono, podobnie jak w innych metodach brzegowych, tożsamościowo równanie różniczkowe. Należy teraz tak dobrać niewiadome współczynniki Q_1, Q_2, \dots , aby możliwie jak najlepiej spełniało warunki brzegowe. Zajmijmy się, dla ułatwienia, przypadkiem gdy zadany jest wyłącznie warunek Dirichleta i zapiszmy go w sposób słaby, tzn.

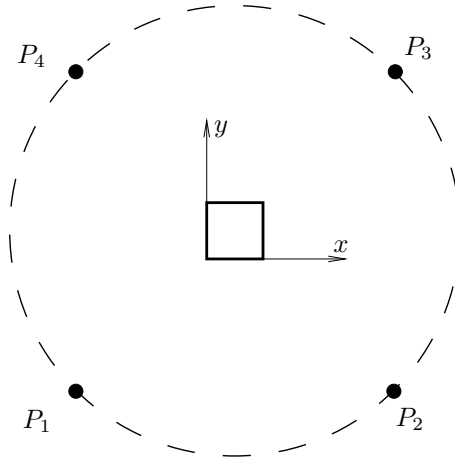
$$\int_{\Gamma} v(T - \bar{T}) ds = 0 \quad \forall v \in V \quad (6.62)$$

Przykładowo przyjmijmy dla zadania testowego z punktu 6.2 cztery źródła ($N = 4$) rozłożone na okręgu o promieniu długości 5 (rys. 6.14). Stosując metodę Bubnowa-Galerkina i przyjmując, że funkcjami testowymi v są te same funkcje $T^*(x, y, \xi_i, \eta_i)$, które zastosowano jako próbne we wzorze (6.61), otrzymujemy dla czterech niewiadomych, związanych z czterema punktami P_1, P_2, P_3, P_4 , układ równań algebraicznych postaci

$$\begin{bmatrix} 41.55 & 41.44 & 41.34 & 41.44 \\ 41.44 & 41.55 & 41.44 & 41.34 \\ 41.34 & 41.44 & 41.55 & 41.44 \\ 41.44 & 41.34 & 41.44 & 41.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.401 \\ 3.226 \\ 3.023 \\ 3.226 \end{bmatrix}$$

którego rozwiązanie daje

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.223 \\ 3.144 \\ 3.987 \\ 3.144 \end{bmatrix}$$



Rys.6.14. Idea pośredniej wersji MEB – przykład testowy

Temperaturę w środku kwadratu obliczono wzorem (6.61) z dokładnością pięciu cyfr znaczących. Jakość wyniku zależy nie tylko od ilości funkcji bazowych, ale również od rozmieszczenia punktów P_i . W przykładzie zarówno długość promienia okręgu, jak i położenie punktów dobrano, możliwie jak najlepiej, metodą prób.

6.7.2. Metoda Trefftza

W metodzie Trefftza, zwanej metodą funkcji T-kompletnych, stosuje się aproksymację rozwiązania zapewniającą dokładne spełnienie równania różniczkowego za pomocą odpowiednich, nieosobliwych i nie związanych z rozwiązaniem fundamentalnym funkcji bazowych. Zaliczyliśmy ją do metod brzegowych, gdyż podobnie jak w MEB warunkami, które należy spełnić (na ogół w przybliżeniu) są warunki brzegowe, a równanie różniczkowe jest spełniane dokładnie dzięki odpowiedniej postaci rozwiązania numerycznego. Została ona omówiona w rozdziale 4.3.4.

Rozdział 7

Metoda różnic skończonych

7.1. Uwagi wstępne

Opisana w rozdziale 5 metoda elementów skończonych (MES) jest metodą dobrze zdefiniowaną, skuteczną oraz bezpieczną w modelowaniu najbardziej nawet złożonych zagadnień brzegowych mechaniki. Jest to metoda uniwersalna, ale i ona nie jest bez wad, które ujawniają się w złożonych zagadnieniach. Rozważmy kilka takich problemów. Modelowanie procesów dużych deformacji ciał, gdzie często elementy degenerują swój kształt, w stopniu uniemożliwiającym prowadzenie dalszych obliczeń bez kompletnej regeneracji siatki, jest pierwszym i dość oczywistym przykładem. Powstawanie i rozwój szczelin oraz przykłady z ruchomym brzegiem to kolejne przypadki, w których w MES napotyka się istotne trudności z uwagi na bardzo duże wymagania, jeśli zachodzi konieczność zmiany siatki węzłów w czasie obliczeń. Tradycyjne metody, opracowane w MES, usuwania powyższych ograniczeń są okupione olbrzymim wysiłkiem z uwagi na to, że węzły łączą ścisłą relacją z elementami.

Powyżej opisane wymagania są w dużej mierze spełnione, w sposób naturalny, przez dużą grupę metod zwanych bezsiatkowymi. Są to metody, których źródła można znaleźć w uogólnionej metodzie różnic skończonych (UMRS) i w zasadzie stanowiące niewielkie jej uogólnienie, a w których centralnym punktem zainteresowania jest węzeł. W tych metodach aproksymacja jest rozpięta na grupie węzłów i nie ma dodatkowych relacji między węzłami a elementami (tablica topologii). W rozdziale tym, wykorzystując ogólne zasady budowy algorytmu metody bezsiatkowej, omówimy dokładniej UMRS. Ze względów dydaktycznych jednakże najpierw zostanie przedstawiona klasyczna MRS,

w której przyjmuje się regularne siatki węzłów. W końcowej części rozdziału (punkt 7.9) omówimy też krótko pewną wersję metody bezsiatkowej, jaką jest bezelementowa metoda Galerkina (BMG).

Do zalet metod bezsiatkowych należy zaliczyć:

- prostszy niż w MES sposób tworzenia modelu adaptacyjnego, z uwagi na łatwość generacji siatki węzłów ze zmienną gęstością,
- brak problemów z ruchomymi brzegami i nieciągłościami (łatwe lokalne zagęszczanie siatki na granicy zmiany fazy lub w otoczeniu czoła szczeliny),
- prostsze niż w MES usunięcie efektów blokady¹,
- znane własności aproksymacji stosowanej w metodach bezsiatkowych, gdzie z uwagi na ciągłość aproksymacji istnieje możliwość wykorzystania twierdzenia o błędzie interpolacji. Znane jest wówczas oszacowanie błędu *a priori*, a więc rząd zbieżności metody, co jest kluczową sprawą przy optymalizacji siatki w adaptacyjnej wersji metody.

W bezsiatkowych metodach stosuje się aproksymacje oparte na różnych wersjach metody najmniejszych kwadratów, lub podziału jedności. Najbardziej zaawansowana jest metoda ważonych, ruchomych najmniejszych kwadratów (WRNK) (ang. *Moving Weighted Least Squares - MWLS*). Aproksymację WRNK określają trzy główne składniki:

- baza wielomianowa, niekiedy wzbogacona dodatkowo o funkcje modelujące nieciągłości różnego typu,
- funkcja wagowa określona na nośniku zwartym, związana z każdym węzłem siatki lub lokalnie z punktem, w którym definiujemy aproksymację,
- zbiór współczynników aproksymacji, *zależnych od położenia punktu*.

Na ogół wykorzystuje się większą liczbę węzłów do rozpięcia aproksymacji niż wynosi liczba współczynników aproksymacji, co jest powodem zastosowania metody najmniejszych kwadratów do ich wyznaczenia.

¹Efekt blokady występuje wtedy, kiedy stosunek normy pochodnej do normy funkcji jest bardzo duży. Występuje on bardzo często w problemach zginania płyt, powłok lub jeśli problemy zginania chcemy rozwiązać, stosując elementy tarczowe (dla belek) bądź trójwymiarowe (dla płyt i powłok).

Nośnik funkcji wagowej definiuje obszar wpływu węzła, czyli obszar dookoła niego, w którym węzeł ten daje swój wkład do aproksymacji. Sposobów definicji obszaru wpływu pojawiło się sporo, tak jak wiele wprowadzono również różnych funkcji wagowych. Problemy te zostaną omówione szczegółowo z uwagi na fakt, że stanowią one o istocie metody.

Przy omawianiu metod zwrócimy szczególną uwagę na:

- definicję bazy wielomianowej metod bezsiatkowych w układzie globalnym oraz lokalnym,
- definicję funkcji wagowych na nośniku zwartym, istotnie decydujących o jakości aproksymacji, oraz omówienie ich cech,
- sposoby szybkiej generacji reguł aproksymacyjnych WRNK w układzie globalnym oraz lokalnym², zakładając, że współczynniki aproksymacji są zarówno stałe, jak i zależne od położenia punktu obszaru; wyprowadzenie *konsystentnej macierzy aproksymacji* będącej uogólnieniem *macierzy wzorów różnicowych*.

7.2. Wprowadzenie do metody różnic skończonych

7.2.1. Uwagi ogólne

Metoda różnic skończonych powstała jako przybliżona, dyskretna metoda rozwiązywania problemów brzegowych opisanych równaniami różniczkowymi, następnie rozszerzona na zagadnienia sformułowane w postaci wariacyjnej. Główna idea klasycznej wersji metody polega na zamianie operatorów różniczkowych na odpowiednie operatory różnicowe, określone na dyskretnym zbiorze punktów; zbiór ten nazywamy *siatką*, a jego elementy *węzłami*. Dzięki takiej aproksymacji funkcji i jej pochodnych wyjściowe zagadnienie brzegowe zostaje sprowadzone do układu równań algebraicznych, w których niewiadomymi są dyskretne wartości funkcji i , niekiedy, ich pochodnych.

Uogólniona metoda różnic skończonych przy dowolnie nieregularnych siatkach węzłów jest rozwijana już od kilkudziesięciu lat. Podobnie jak w MES, istotą UMRS jest to, że definiuje się wielomian aproksymacyjny (niekiedy jest

²Nie jest obojętne, w jakim układzie są wyprowadzone współczynniki aproksymacji. Jest tu sporo nieporozumień. Ich wyjaśnienie dla Czytelników, którzy będą sięgali do literatury, może mieć zasadnicze znaczenie.

to funkcja analityczna) będący kombinacją liniową pewnych funkcji aproksymacyjnych i wartości węzłowych. Funkcje aproksymacyjne są zwane funkcjami kształtu i mają podobne własności (z pewnymi wyjątkami), jak te znane z MES. Wielomian aproksymacyjny daje się różniczkować i całkować, a więc może mieć zastosowanie do wszelkich sformułowań wariacyjnych. Jednocześnie UMRS pozwala na rezygnację ze znajdowania relacji między węzłami w obszarze, co jest sytuacją zupełnie odmienną niż w MES. Zauważono też, że UMRS jednocześnie zachowuje zalety podejścia adaptacyjnego (łatwe dogęszczanie i rozgęszczanie siatki). I to zadecydowało o gwałtownym rozwoju metody.

Obecnie podamy zasadnicze etapy realizacji UMRS jako metody numerycznej, poczynając od wyboru typu sformułowania problemu, skończywszy na ponownej generacji siatki węzłów, wynikającej z analizy dokładności rozwiązania. Spośród nich najważniejsze to:

1. **Definicja zagadnienia** oraz wybór sformułowania (lokalne, globalne).
2. **Konstrukcja siatki aproksymacyjnej**: generacja siatki węzłów we wnętrzu i na brzegu obszaru oraz ewentualnie węzłów zewnętrznych – strefa przy brzegu na zewnątrz obszaru.
3. **Konstrukcja siatki do całkowania** – wybór typu siatki do całkowania:
 - (a) siatka do całkowania niezależna od siatki aproksymacyjnej,
 - (b) siatka do całkowania zależna od węzłów siatki aproksymacyjnej:
 - i. Całkowanie dookoła węzłów – podział obszaru na podobszary przypisane węzłom, ewentualnie rozbiecie tego obszaru na proste elementy geometryczne: trójkąt, czworokąt,
 - ii. Całkowanie między węzłami – podział obszaru na proste elementy geometryczne (trójkąty, czworokąty).
4. **Definicja algorytmicznej struktury UMRS**:
 - (a) sposób rozpięcia aproksymacji UMRS, określenie obszaru wpływu danej gwiazdy (definicja wagi), definicja stopni swobody,
 - (b) selekcja węzłów do gwiazd oraz klasyfikacja gwiazd zarówno z punktu widzenia geometrycznego (jednakowy rozkład węzłów w gwieździe), jak i aproksymacyjnego (stabilność lub niestabilność generowanego przez gwiazdę schematu aproksymacyjnego).

5. **Generacja schematów różnicowych** dla poszczególnych pochodnych lub dla kompletu pochodnych (dla całego operatora) wymaganego rzędu.
6. **Generacja równań różnicowych** we wnętrzu oraz na brzegu obszaru (w tym również dyskretyzacja warunków brzegowych) dla wersji lokalnej oraz wersji globalnej – całkowanie numeryczne i agregacja.
7. **Rozwiązanie liniowego lub nieliniowego układu równań** – o strukturze pasmowej symetrycznej lub niesymetrycznej (wersja wariacyjna), rozproszonej (rzadkiej) – wersja lokalna lub mieszanej, pasmowo rozproszonej.
8. **Postprocessing oraz analiza błędów *a posteriori*:**
 - (a) obliczanie niewiadomych pierwotnych (przemieszczeń) i wtórnych (odkształceń i naprężeń),
 - (b) analiza błędów *a posteriori* – obliczanie błędów rozwiązania oraz potrzebnej gęstości siatki,
 - (c) wizualizacja wyników oraz synteza zagadnienia.
9. **Ponowna generacja siatki** – opierająca się na oszacowanym błędzie rozwiązania oraz przyjętej strategii wyznaczania gęstości węzłów. Transformacja rozwiązania między siatkami. Powrót do obliczeń.

Spośród wymienionych problemów najważniejszymi i najtrudniejszymi, bo decydującymi o ogólności i skuteczności metody, są: generacja węzłów siatki, dobór węzłów do gwiazd, sposób rozpięcia aproksymacji MRS i sposób całkowania numerycznego (przydziału powierzchni węzłom) – co jest nieco szerszym spojrzeniem na MRS, niż w klasycznej wersji tej metody. Należy jednak stwierdzić, iż realizacja adaptacyjnej wersji MRS zmienia tę optykę, gdyż pierwszorzędnymi elementami metody stają się również: sposób oszacowania błędów *a posteriori* oraz przyjęta strategia wyznaczania optymalnej gęstości i zagęszczania siatki węzłów – silnie związana z oszacowaniami błędów *a priori*, a więc z teorią metody.

7.2.2. Lokalne sformułowanie MRS

Rozpatrzmy lokalne zagadnienie brzegowe opisane równaniem operatorowym

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dla} \quad P \in \Omega \quad (7.1)$$

we wnętrzu obszaru Ω oraz warunkami brzegowymi

$$\mathcal{B}u = g \quad \text{dla} \quad P \in \partial\Omega \quad (7.2)$$

na brzegu obszaru $\partial\Omega$, gdzie $u = u(P)$ jest poszukiwaną funkcją punktu obszaru P , zaś \mathcal{L} i \mathcal{B} są operatorami różniczkowymi.

Operacje $\mathcal{L}u$, a także $\mathcal{B}u$ oraz dowolne inne operacje różniczkowania można złożyć z prostych operacji $\mathcal{D}u$ obliczania poszczególnych pochodnych funkcji, gdzie przez \mathcal{D} oznaczono (liniowy) operator różniczkowania, którego dyskretyzację przedstawimy poniżej.

Dla dokonania dyskretyzacji równań (7.1) i (7.2) w całym obszarze Ω i na jego brzegu $\partial\Omega$ wybieramy zbiór Γ punktów $P_k \in \Omega, k = 1, 2, \dots, r$, zwanych dalej węzłami wewnętrznymi oraz zbiór $\partial\Gamma$ punktów $P_k \in \partial\Omega, k = r + 1, r + 2, \dots, r + m$, leżących na brzegu $\partial\Omega$ lub też w jego otoczeniu zewnętrznym, zwanych węzłami zewnętrznymi (rys.7.1a). Tworzą one razem siatkę węzłów dla danego problemu brzegowego.

Punkty P_{ki} , zwane dalej węzłami, tworzą konfigurację zwaną dalej gwiazdą – rys.7.1b. Jej węzłem centralnym (punktem centralnym) jest punkt P_k . Kształt gwiazdy zależy od postaci i rzędu operatora różniczkowego zamienianego na operator (schemat) różnicowy, od przyjętych stopni swobody, założonej dokładności aproksymacji oraz od siatki, czyli zbioru wszystkich węzłów.

W MRS wartość liniowego operatora \mathcal{D} w punkcie P_k , rys.7.1b, przedstawia się jako liniową kombinację wartości funkcji (w najprostszym przypadku) w punktach P_{k+i} wybranych z otoczenia punktu P_k

$$\mathcal{D}u(P_k) = \sum \alpha_i u(P_{k+i}) \quad (7.3)$$

Wyrażenie (7.3) nazywamy *schematem różnicowym operatora \mathcal{D} w punkcie P_k* .

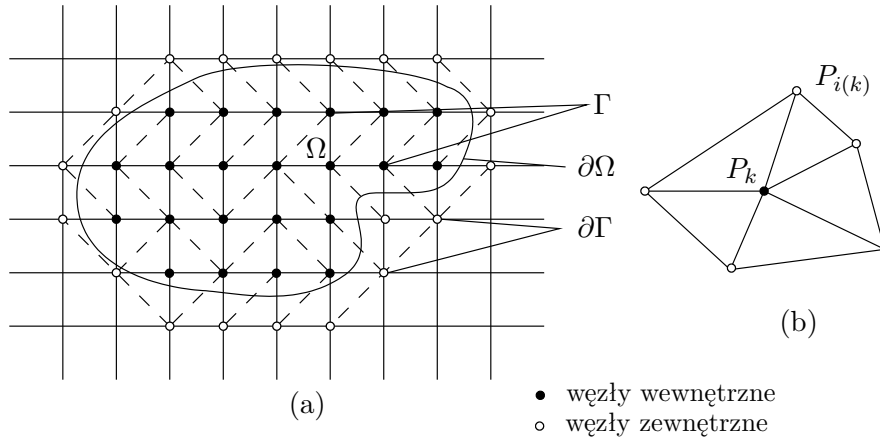
Jeśli wykorzystamy operatory różnicowe (7.3), aby zapisać równania (7.1) w postaci dyskretnej dla wszystkich r węzłów wewnętrznych oraz (7.2) dla węzłów brzegowych, to otrzymamy układ równań algebraicznych, przedstawiony w zapisie macierzowym jako

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (7.4)$$

w których niewiadomymi są wartości węzłowe $u(P_k), k = 1, 2, \dots, n$. Są to równania liniowe lub nieliniowe zależnie od postaci operatorów \mathcal{L} i \mathcal{B} .

7.2.3. Globalne sformułowanie MRS

Metodę różnic skończonych można też stosować do problemów brzegowych sformułowanych jako poszukiwanie ekstremum funkcjonału lub rozwiązanie

Rys.7.1. Siatka węzłów obszarze Ω (a) oraz typowa gwiazda węzłów (b)

równania wariacyjnego (patrz rozdział 4). W sformułowaniu globalnym, po dyskretyzacji operatorów w wybranych punktach numerycznego całkowania, dokonujemy całkowania, a następnie agregacji równań, tak jak to się dzieje w MES, wykorzystując funkcjonal, który możemy zapisać w ogólnej formie

$$J(u) = \int_{\Omega} F(u) d\Omega \quad (7.5)$$

Całkując numerycznie ten funkcjonal, otrzymujemy

$$J \approx \sum_{i=1}^N F(u_i) |_{\mathbf{x}_i} \Delta\Omega_i = J(u_1, \dots, u_N)$$

gdzie $\Delta\Omega_i$ jest powierzchnią (wagą) przypisaną węzłowi P_i , a \mathbf{x}_i położeniem i -tego punktu całkowania. Układ równań, z którego oblicza się nieznanne wartości węzłowe funkcji u_i otrzymuje się z warunków stacjonarności funkcji

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (7.6)$$

W przypadku globalnego sformułowania, określonego przez równania wariacyjne w postaci

$$(\mathcal{L}u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega} \quad (\mathcal{L}_b u, v)_{\partial\Omega} = (g, v)_{\partial\Omega} \quad (7.7)$$

gdzie v jest funkcją testującą, zaś u funkcją próbną, również dokonujemy dyskretyzacji operatorów oraz całkowania numerycznego, otrzymując odpowiedni układ równań.

W porównaniu ze sformulowaniem lokalnym wariacyjna MRS wykazuje szereg zalet, takich jak na ogół niższy rząd operatorów różnicowych oraz niekiedy symetria macierzy układu równań (zależy to także od sposobu dyskretyzacji warunków brzegowych). W przypadku bardzo złożonym łatwiej można wówczas uwzględnić zmienną grubość, warstwową strukturę, efekty termiczne i inne. Istnieje ponadto pewne podobieństwo algorytmu z MES (całkowanie, agregacja i w dużym stopniu rozwiązanie układu równań).

Należy jednakże wspomnieć, że otrzymanie równań problemu w globalnej MRS jest związane z procesem agregacji, natomiast w lokalnej MRS równania otrzymuje się wprost dla węzła, bez potrzeby nasumowywania współczynników równań. Ponadto wyniki otrzymane za pomocą wariacyjnej MRS są dość czułe na sposób aproksymacji i całkowania (czyli w najprostszej wersji MRS na sposób przypisania węzłom siatki obszaru całkowania).

W sformułowaniu bezsiatkowej MRS funkcja u jest aproksymowana, podobnie jak w MES, przez kombinację lokalnie zdefiniowanych funkcji kształtu³ \tilde{N}_i jako:

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{N}_i u_i^h = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{u}^h \quad (7.8)$$

przy czym N_p jest liczbą punktów w obszarze aproksymacji oraz

$$\tilde{N}_i \neq 0, \quad \text{jeśli } \mathbf{x} \in \Omega_i \quad \text{oraz} \quad \tilde{N}_i = 0, \quad \text{jeśli } \mathbf{x} \notin \Omega_i \quad (7.9)$$

Tutaj Ω_i jest podobszarem Ω zawierającym n punktów, przy czym $n \ll N_p$.

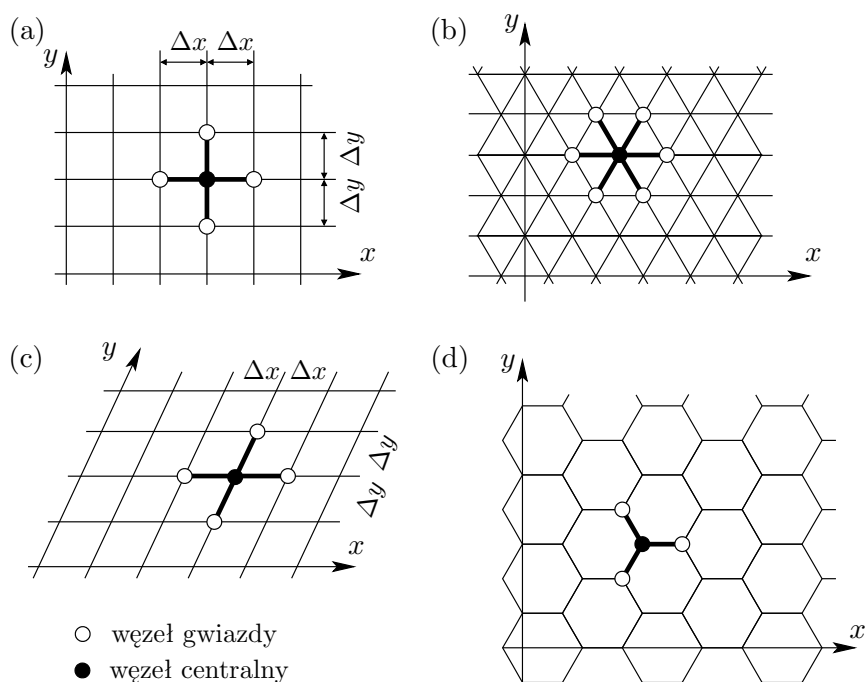
W tym miejscu potrzebny jest komentarz dotyczący procedury postępowania w różnych metodach. W przeciwieństwie do UMRS w MES podobszary Ω_i podzielone są na elementy, funkcje N_i mogą mieć nieciągłości (nieciągłości te mogą być w samej funkcji lub w ich pochodnych) na granicach elementów. W MES funkcje testowe v_i są zdefiniowane w tych samych obszarach co funkcje interpolacyjne. W MRS ta zasada nie musi być zachowana.

³Tylda nad funkcją kształtu oznacza, że nie spełnia ona warunku delty Kroneckera, tzn. $\tilde{N}_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$. Oznacza to, że funkcja aproksymująca nie odtwarza ściśle wartości węzłowych.

7.3. Klasyczna MRS

7.3.1. Istota klasycznej MRS

Pod nazwą klasycznej MRS będziemy rozumieć wersję metody, w której stosuje się wyłącznie regularne (strukturalne) siatki węzłów. Siatki węzłów mogą przybierać różne formy, zależnie od tego, jaki kształt ma obszar, na którym zdefiniowano zagadnienie brzegowe oraz jaki jest brzeg tego obszaru. Przykłady siatek dla zagadnień dwuwymiarowych zaprezentowano na na rys.7.2.



Rys.7.2. Przykłady siatek regularnych w obszarze dwuwymiarowych Ω oraz typowe gwiazdy węzłów

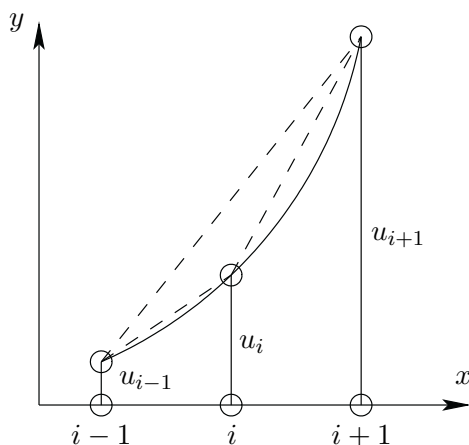
Dla regularnej siatki wystarczy przyjąć jej typ i moduł⁴ (lub moduły, jeśli ich jest kilka), aby określić położenia wszystkich węzłów i dokonać podziału obszaru na podobszary (strefy wpływów) przypisane poszczególnym węzłom. Generacja siatki w strefach brzegowych nastęrcza poważne trudności. To właśnie jest jedną z przyczyn ograniczonego zakresu zastosowań tej wersji metody.

⁴Moduł siatki jest to (typowa) odległość między węzłami.

7.3.2. Dobór gwiazd i generacja schematów różnicowych

Regularność siatki umożliwia zastosowanie tego samego operatora różnicowego (wzoru różnicowego) we wszystkich węzłach wewnętrznych, czyli mamy ten sam schemat różnicowy dla bardzo dużej grupy węzłów.

Wzory różnicowe na pochodne funkcji uzyskujemy między innymi poprzez tzw. ilorazy różnicowe. Najlepiej można to zilustrować na przykładzie funkcji jednej zmiennej, rys.7.3.



Rys.7.3. Budowa ilorazów różnicowych dla funkcji $u = x^2$

Weźmy funkcję $y = x^2$ oraz wyróżnijmy trzy punkty x_{i-1} , x_i oraz x_{i+1} o współrzędnych: $(0.8, 0.64)$, $(0.9, 0.81)$ i $(1.0, 1.0)$. Pierwsza i druga pochodna w punkcie x_i mają wartość $\frac{dy}{dx}|_i = 1.8$, $\frac{d^2y}{dx^2}|_i = 2$. Poprowadźmy 3 sieczne, jak pokazano to na rys.7.3 oraz obliczmy wartość pierwszej pochodnej w punkcie i w sposób przybliżony jako tangens kąta nachylenia siecznej do krzywej (zamiast tangensa stycznej do krzywej). Wartość tangensa kąta nachylenia siecznej do krzywej przechodzącej przez punkty $i-1$ oraz $i+1$ wynosi

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{– iloraz różnicowy centralny} \quad (7.10)$$

gdzie $O(h^2)$ oznacza, że rząd zbieżności schematu wynosi 2 (tzn. błąd wyznaczenia pochodnej przez iloraz różnicowy centralny zanika z kwadratem odległości między węzłami). Podstawiając współrzędne punktów do powyższego

wzoru, otrzymujemy $u'_i = \frac{1.0 - 0.64}{1.0 - 0.8} = 1.8$. Otrzymaliśmy dokładną wartość pierwszej pochodnej.

Z rys.7.3 możemy wywnioskować, że wartości pierwszej pochodnej możemy również otrzymać jako tangens kąta nachylenia dwóch innych siecznych przechodzących przez punkty $i - 1, i$ oraz $i, i + 1$

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \quad \text{– iloraz różnicowy w przód} \quad (7.11)$$

oraz

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{– iloraz różnicowy wstecz} \quad (7.12)$$

Podstawiając współrzędne punktów do powyższych wzorów, otrzymujemy kolejno $u'_i = \frac{1.0 - 0.81}{1.0 - 0.9} = 1.9$ dla ilorazu różnicowego w przód oraz $u'_i = \frac{0.81 - 0.64}{0.9 - 0.8} = 1.7$ dla ilorazu różnicowego wstecz. Procentowy błąd określenia wartości pierwszej pochodnej w punkcie $x = 0.9$ wynosi dla obydwu schematów różnicowych 5.6 %, co jest błędem stosunkowo małym.

Aby obliczyć wartość drugiej pochodnej w punkcie i , obliczmy najpierw pierwszą pochodną w punktach a i b, tj. w środkach obydwu odcinków, otrzymując

$$u'_a = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad u'_b = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Wykorzystując powyższy wynik mamy

$$u''_i = \frac{u'_b - u'_a}{h} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h) \quad (7.13)$$

Wartość drugiej pochodnej w punkcie i wynosi $u''_i = \frac{0.64 - 2 \cdot 0.81 + 1}{0.01} = \frac{0.02}{0.01} = 2$, co jest wartością ścisłą.

Komentując te wyniki, można stwierdzić, że są one dokładne, ale tak dobrych rezultatów nie otrzymamy, jeśli funkcja będzie innego typu (np. $u = x^4$).

Wzory różnicowe przedstawia się w postaci graficznej jako tzw. *schematy różnicowe* (liczby w ramach są to współczynniki przy kolejnych wartościach

węzłowych). Dla wprowadzonych poprzednio wzorów różnicowych mają one postać

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=x_i} \approx \begin{cases} \frac{1}{h} (\boxed{-1} \text{---} \boxed{1}) \\ \frac{1}{2h} (\boxed{-1} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{1}) \\ \frac{1}{h} (\text{---} \boxed{-1} \text{---} \boxed{1}) \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h^2} (\boxed{1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{1}) \quad (7.15)$$

Schemat różnicowy dla dowolnego operatora różniczkowego typu

$$\mathcal{L} = \sum_j c_j \frac{d^j}{dx^j}$$

można otrzymać przez złożenie schematów różnicowych dla poszczególnych pochodnych. I tak dla liniowego operatora drugiego rzędu funkcji jednej zmiennej

$$\mathcal{L}u = u'' + au' + bu$$

mamy

$$\mathcal{L}u \Big|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h^2} (\boxed{1 - \frac{ah}{2}} \text{---} \boxed{-2 + bh^2} \text{---} \boxed{1 + \frac{ah}{2}})$$

Podobnie postępuje się w przypadku operatorów różnicowych, w których występują pochodne cząstkowe.

Schematy różnicowe dla przypadków wielowymiarowych tworzy się podobnie jak dla przypadku jednowymiarowego. Rozważmy na płaszczyźnie siatkę prostokątną, rys.7.4. Postępując jak poprzednio, możemy zapisać ilorazy różnicowe odpowiadające wybranym pochodnym cząstkowym funkcji $u(x, y)$.

Oznaczając $u_{i,j} \equiv u(x_i, y_i)$, mamy

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{1}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + O(h^2) \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} &= \frac{1}{2k}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + O(k^2) \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} &= \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h) \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} &= \frac{1}{4hk}(u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + O(hk)
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Powyższe wzory różnicowe w sposób jednoznaczny określają gwiazdę dla węzła. Analizując wyprowadzone wzory różnicowe, można zauważyć, że dla każdego liniowego operatora różniczkowego \mathcal{L} odpowiadający mu operator różnicowy może być przedstawiony jako liniowa kombinacja wartości funkcji $u(P_{i+j})$ traktowanych jako podstawowe stopnie swobody, tj. niewiadome metody i pewnych współczynników

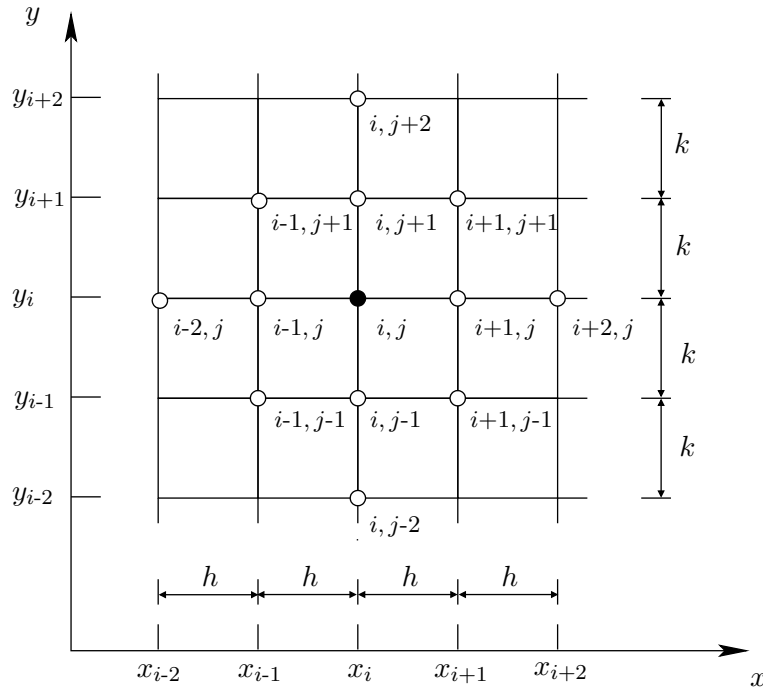
$$\mathcal{L}u|_i \approx \sum_{j=0}^m B_{j(i)} u(P_{i+j}) \tag{7.17}$$

Sumowanie jest rozciągnięte po wszystkich węzłach gwiazdy różnicowej $j = 0, 1, \dots, m$, przy czym $B_{j(i)}$ są znanymi współczynnikami. Wzór (7.17) ma charakter ogólny z uwagi na to że operator \mathcal{L} może reprezentować dane równanie różniczkowe, warunki brzegowe, jak i występować w zasadzie wariacyjnej lub funkcjonale $J(u)$.

Można odwrócić sytuację, wtedy zakładając słuszność relacji (7.17), dobieramy najpierw odpowiednią gwiazdę, a potem na tej podstawie znajdujemy odpowiedni wzór różnicowy. Można to uczynić na kilka sposobów.

1. Dokonując lokalnej aproksymacji funkcji

$$u(P) \approx \sum_{j=0}^m \varphi_j(P) u(P_{i+j}) \tag{7.18}$$



Rys.7.4. Prostokątna siatka różnicowa

wykorzystując wartości $u(P_{i+j})$ w węzłach gwiazdy oraz funkcje bazowe $\varphi(P)$, a następnie znajdując wartość operatora \mathcal{L} w punkcie P_i

$$\mathcal{L}u(P_i) \approx \sum_{j=0}^m \mathcal{L}\varphi_j(P)|_i u(P_{i+j})$$

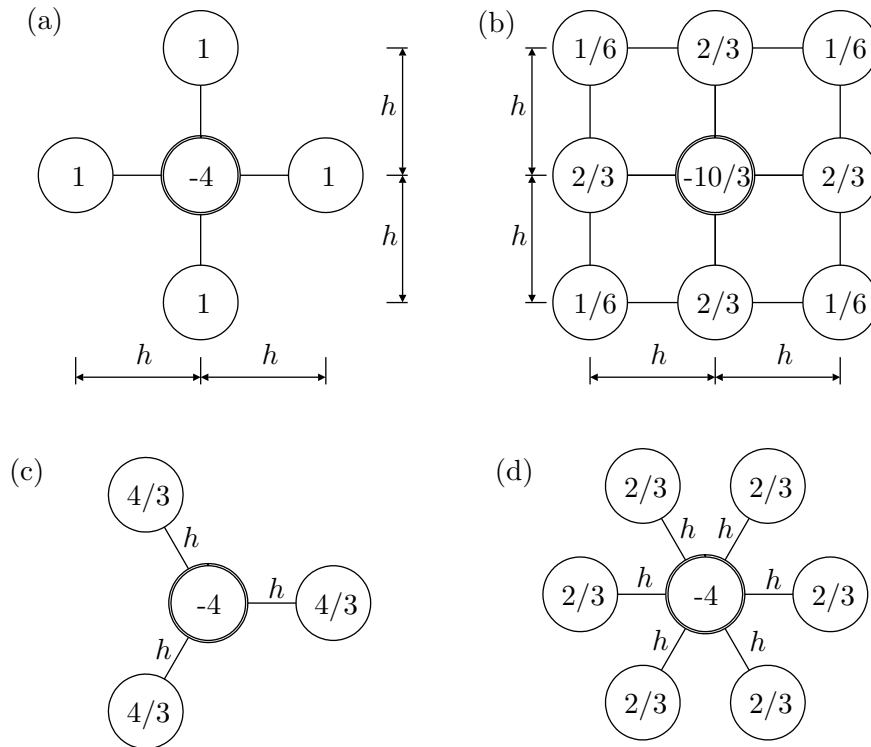
otrzymamy poszukiwane współczynniki wzoru różnicowego $\mathcal{L}u(P_i)$ jako

$$B_{j(i)} \equiv \mathcal{L}\varphi_j(P)|_i$$

2. Przedstawiając wzór (7.17) w postaci

$$\mathcal{L}u|_i \approx \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^n \alpha_{j(i)}^{(s)} u^{(s)}(P_{i+j}) \quad (7.19)$$

gdzie, oprócz węzłowych wartości funkcji $u(P_{i+j})$, również wartości węzłowe pochodnych $u^{(s)}(P_{i+j})$ są brane jako stopnie swobody.



Rys.7.5. Operator Laplace'a $\nabla^2 h^2$: standardowy – siatka prostokątna (a), wyższego rzędu – siatka prostokątna (b), standardowy – siatka heksagonalna (c), standardowy – siatka trójkątna (d)

Współczynniki wzorów różnicowych $\alpha_{j(i)}^{(s)}$ nie są znane, zatem muszą być określone. Można tego dokonać znowu na dwa sposoby:

1. Rozwijając obydwie strony równania (7.19) w szereg Taylora w punkcie P_i , żądając ich zgodności dla możliwie największej liczby kolejnych wyrazów tego rozwinięcia, lub
2. Żądając, aby wzór (7.19) był spełniony ściśle dla możliwie największej liczby kolejnych jednomianów coraz wyższego stopnia x^i w obszarze 1D, i $x^i y^j$ w obszarze 2D, etc., gdzie $i, j = 0, 1, \dots$.

Obecnie wyprowadzimy wzór różnicowy dla operatora Laplace'a, dla gwiazdy (c) z rys.7.5, wykorzystując sposób 1.

Opisujemy współrzędne punktów w lokalnym układzie współrzędnych związanym z punktem centralnym 0. Wektor współrzędnych punktów w układzie x, y ma postać

$$\mathbf{x} = \left\{ (0, 0), (0, -h), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{h}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{h}{2} \right) \right\} \quad (7.20)$$

Operator Laplace'a przedstawiamy jako kombinację liniową wartości funkcji i pewnych współczynników

$$\nabla^2 f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_0 \quad (7.21)$$

Funkcję rozwijamy w szereg Taylora względem punktu \mathbf{x}_0

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x^0 \Delta x + f_y^0 \Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}^0 \Delta x^2 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 \Delta y^2 \quad (7.22)$$

Wstawiając powyższe rozwinięcie do wszystkich punktów, mamy

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0 \\ f_1 &= f_0 + f_x^0 0 + f_y^0 (-h) + \frac{1}{2} f_{xx}^0 0 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 (-h)^2 \\ f_2 &= f_0 + f_x^0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h \right) + f_y^0 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} f_{xx}^0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h \right)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \\ f_3 &= f_0 + f_x^0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h \right) + f_y^0 \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} f_{xx}^0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h \right)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Przemnażając równanie pierwsze przez δ , drugie przez α , trzecie przez β , czwarte przez γ i dodając równania stronami, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = \delta f_0 + \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) f_0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}h\gamma \right) f_x^0 + \\ &+ \left(-h\alpha + \frac{h}{2}\beta + \frac{h}{2}\gamma \right) f_y^0 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h \right)^2 \right] f_{xx}^0 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} (-h)^2 \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \gamma \right] f_{yy}^0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Mamy zatem

– z porównania współczynników przy pochodnej $\frac{\partial}{\partial x}$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}h\gamma = 0 \quad \rightarrow \beta = \gamma \quad (7.25)$$

– z porównania współczynników przy pochodnej $\frac{\partial}{\partial y}$

$$-h\alpha + \frac{h}{2}\beta + \frac{h}{2}\gamma = 0 \quad \rightarrow \alpha = \gamma \quad (7.26)$$

Porównując współczynniki przy pochodnej $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, mamy

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h \right) \alpha = 1 \quad (7.27)$$

skąd $\alpha = \frac{4}{3} \frac{1}{h^2}$

Porównując współczynniki przy pochodnej $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(-h)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \gamma = 1 \quad (7.28)$$

Wynik jest ten sam co poprzednio, zatem

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{4}{3} \frac{1}{h^2} \quad (7.29)$$

Dla członu przy wartości funkcji mamy

$$\alpha f_0 + \alpha f_0 + \alpha f_0 + \delta f_0 = 0 \quad (7.30)$$

skąd

$$\delta = -3\alpha = -4 \frac{1}{h^2} \quad (7.31)$$

W rozwinięciu (7.22) można uwzględnić również pochodną mieszaną, ale nie wniesie ona nic nowego poza relacją, że $\beta = \gamma$.

Wzór $\nabla^2 f$ jest wzorem interpolacyjnym, dlatego w rozwinięciu (7.22) powinno być tyle samo współczynników niewiadomych, ile jest punktów. Aby się nie zastanawiać, które człony należy uwzględnić, a które nie, można wziąć wszystkie do najwyższego potrzebnego rzędu (tu $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$), co skutkuje tylko tym, że otrzymujemy wzory na relacje między współczynnikami. Dodatkowe człony po prostu nic nie wnoszą.

Wyprowadzimy teraz wzór różnicowy dla operatora Laplace'a, dla gwiazdy (a) z rys. 7.5. Wektor współrzędnych punktów w układzie x, y ma postać

$$\mathbf{x} = \{(0, 0), (0, -h), (-h, 0), (0, h), (h, 0)\} \quad (7.32)$$

Operator Laplace'a zapisujemy jako kombinację liniową wartości funkcji w węzłach gwiazdy i pewnych współczynników

$$\nabla^2 f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 + \epsilon f_0 \quad (7.33)$$

Funkcję rozwijamy w szereg Taylora w punkcie \mathbf{x}_0

$$f_i = f_0 + f_x^0 \Delta x + f_y^0 \Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}^0 \Delta x^2 + f_{xy}^0 \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}^0 \Delta y^2 \quad (7.34)$$

Podstawiając powyższe rozwinięcie do wszystkich punktów, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0 \\ f_1 &= f_0 + f_x^0 0 + f_y^0 (-h) + \frac{1}{2} f_{xx}^0 0 + f_{xy}^0 0 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 h^2 \\ f_2 &= f_0 + f_x^0 (-h) + f_y^0 0 + \frac{1}{2} f_{xx}^0 (-h)^2 + f_{xy}^0 0 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 0 \\ f_3 &= f_0 + f_x^0 0 + f_y^0 h + \frac{1}{2} f_{xx}^0 0 + f_{xy}^0 0 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 h^2 \\ f_4 &= f_0 + f_x^0 h + f_y^0 0 + \frac{1}{2} f_{xx}^0 h^2 + f_{xy}^0 0 + \frac{1}{2} f_{yy}^0 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Przemnażając kolejno powyższe równania przez $\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = \epsilon f_0 + \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = \\ &= f_0 (\epsilon + \alpha + \beta + \gamma + \delta) + f_x^0 (-h\beta + h\gamma) + f_y^0 (-h\alpha + h\gamma) + \\ &+ f_{xx}^0 \left(\frac{1}{2} (-h)^2 + h^2 \delta \right) + f_{yy}^0 \left(\frac{1}{2} h^2 \alpha + h^2 \gamma \right) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Z przyrównania współczynników przy pochodnych $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ wynika odpowiednio, że

$$\beta = \gamma \quad \text{i} \quad \alpha = \gamma \quad (7.37)$$

Z przyrównania współczynników przy pochodnej $\frac{\partial}{\partial x}$ wynika

$$\left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2\right)\beta = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1}{h^2} \quad (7.38)$$

Porównując współczynniki przy pochodnej $\frac{\partial}{\partial y}$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2\right)\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{h^2} \quad (7.39)$$

Ponadto z relacji (7.37) wynika, że $\delta = \frac{1}{h^2}$ i $\gamma = \frac{1}{h^2}$. Dla członu zerowego mamy

$$\epsilon + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon = -4\frac{1}{h^2} \quad (7.40)$$

Operator $\nabla^4 f$

$$\nabla^4 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (7.41)$$

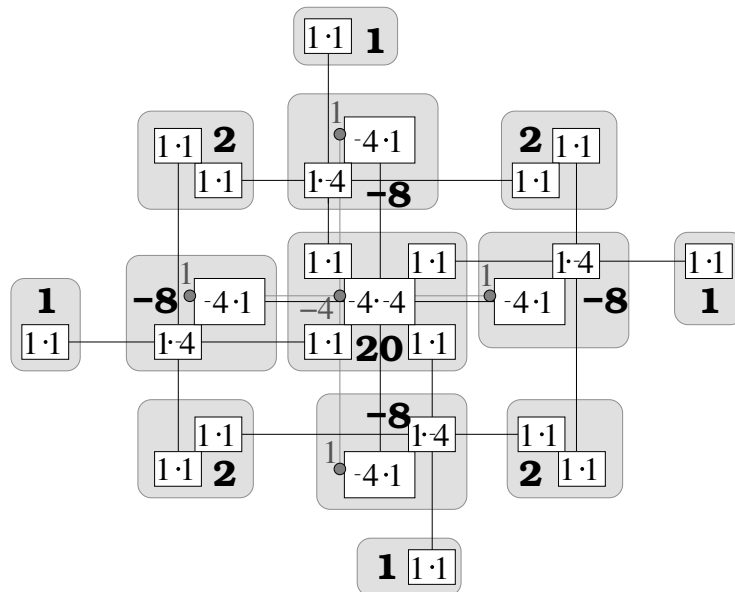
można złożyć poprzez składanie operatorów

$$\nabla^4 f = \nabla^2(\nabla^2 f) \quad (7.42)$$

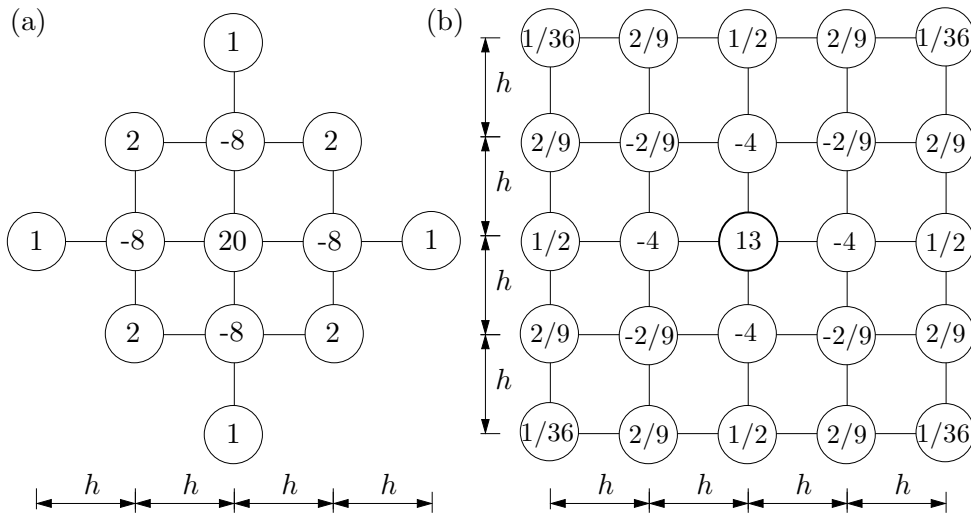
Przemnażamy formalnie współczynniki operatora ∇^2 przez operator ∇^2 w każdym węźle rys. 7.6 – otrzymujemy stąd formułę różnicową na operator ∇^4 .

Przykłady kilku typowych operatorów różnicowych dla siatek regularnych zostały zaprezentowane na rys.7.7 i 7.8. Wszystkie te operatory wykorzystują jedynie wartości funkcji jako zmienne węzłowe.

W tab.7.1 przedstawiono współczynniki dla operatorów różnicowych generowanych klasycznie, jak i za pomocą metody najmniejszych kwadratów, która zostanie szczegółowo omówiona w dalszej części rozdziału.



Rys.7.6. Schemat przemnażania operatorów



Rys.7.7. Operator biharmoniczny $\nabla^4 h^4$ – siatka kwadratowa: standardowy, otrzymany przez złożenie $\nabla^2(a)$, wyższego rzędu otrzymany za pomocą minimalizacji (b)

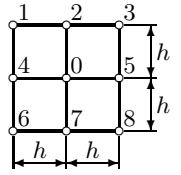
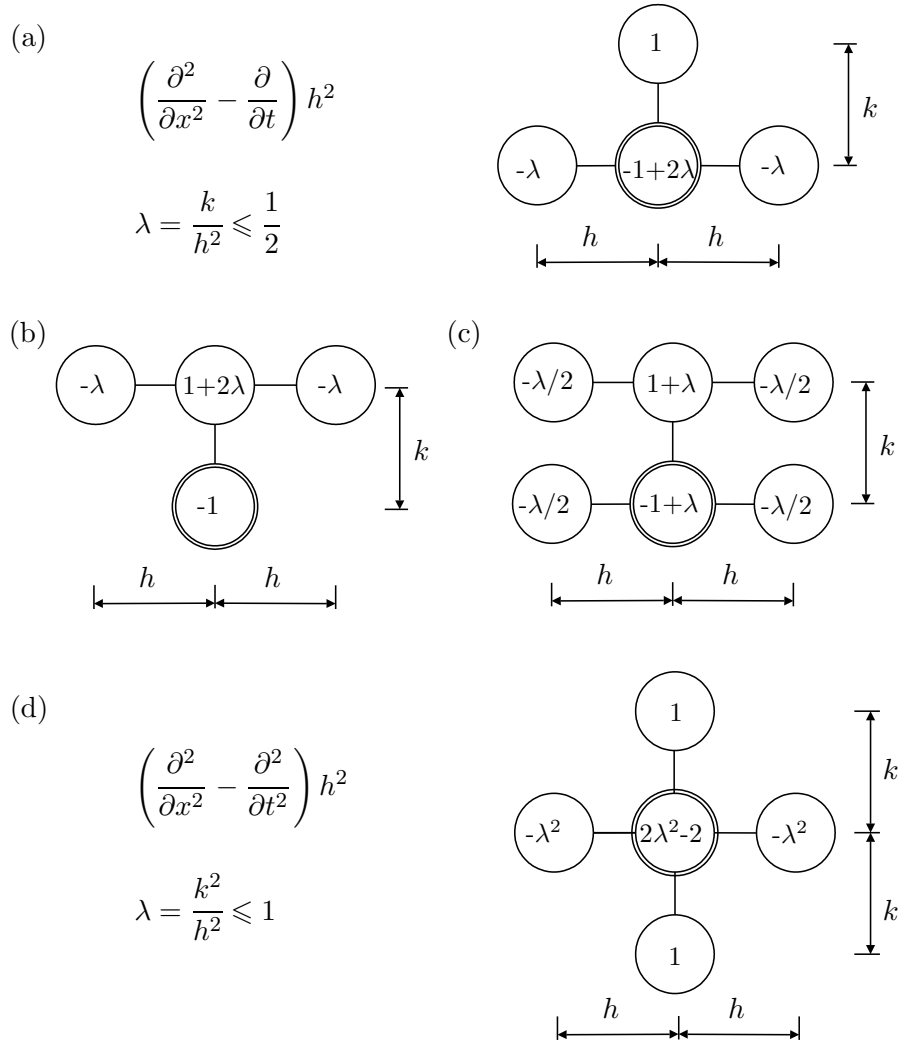
		Przypadek	Węzeł								
operator	współczynnik		0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_x	h^{-1}	a					$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
		b		$-\frac{1}{20}$		$\frac{1}{20}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{20}$		$\frac{1}{20}$
u_{xx}	h^{-2}	a	-2				1	1			
		b	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
u_{xy}	h^{-2}	a		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$
		b		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$
$\nabla^2 u$	h^{-2}	a	-4		1		1	1		1	
		b	$-\frac{10}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Tabela 7.1. Współczynniki operatorów MRS dla pierwszych i drugich pochodnych oraz dla operatora Laplace'a generowanych metodą klasyczną (a), za pomocą WRNK (b)



Rys.7.8. Operatory różnicowe zależne od czasu – siatka prostokątna – operator paraboliczny: explicit (a), standardowy niejawnny (b), Cranka–Nicholsona niejawnny (c), standardowy hiperboliczny (d)

7.3.3. Generacja równań MRS

W lokalnym sformułowaniu MRS równania są generowane metodą kollokacji we wszystkich N węzłach wewnętrznych Γ obszaru Ω

$$\mathcal{L}u|_i \approx \sum_{j=0}^m B_{j(i)} u_{i+j} = f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.43)$$

W sformułowaniu globalnym po dyskretyzacji operatorów dokonujemy całkowania, a następnie agregacji równań, tak jak to się dzieje w MES.

W funkcjonałe (7.5) zastępuje się pochodne różnicami skończonymi oraz przeprowadza całkowanie numerycznie, co można zapisać

$$J(u) = \int_{\Omega} F(u) d\Omega \approx \sum_{i=1}^N F(u_i) \Delta\Omega_i = J(u_1, \dots, u_N)$$

gdzie $\Delta\Omega_i$ jest powierzchnią (wagą) przypisaną węzłowi P_i . Układ równań na nieznanne wartości węzłowe funkcji u_i otrzymuje się z warunków stacjonarności tego funkcyjonału

$$\left. \frac{\partial J}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(u_1, \dots, u_N)}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x}_i} \Delta\Omega_i = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N \quad (7.44)$$

zatem następuje nasumowywanie współczynników równań otrzymanych dla każdego elementarnego obszaru Ω_i . W przypadku globalnego sformułowania, danego w formie słabej, dyskretyzuje się równania

$$(\mathcal{L}u, \delta u)_{\Omega} = (f, \delta u)_{\Omega}, \quad (\mathcal{L}_b u, v)_{\partial\Omega} = (g, v)_{\partial\Omega} \quad (7.45)$$

gdzie v jest funkcją testującą, zaś u funkcją próbną. Zamiany całki na sumę dokonuje się w podobny sposób jak we wzorze (7.44), z tym że zamiast procesu różniczkowania przyrównuje się człony przy każdej funkcji testowej do zera, wcześniej grupując je odpowiednio.

7.3.4. Uwzględnienie warunków brzegowych

Uwzględnienie warunków brzegowych to jeden z największych problemów, jakie należy rozwiązać, by skompletować układ równań w MRS. Jeśli sformułowanie problemu jest lokalne, warunki brzegowe możemy uwzględnić przy tworzeniu schematów różnicowych dla węzłów brzegowych. Trzeba tu jednak rozróżnić dwa przypadki:

- warunek brzegowy jest typu Dirichleta (podstawowy), tzn. narzucony jest na funkcję,
- warunek brzegowy jest w postaci równania różniczkowego (naturalny), w którym występujący operator różniczkowy jest na ogół inny niż w sformułowaniu zagadnienia brzegowego wewnątrz obszaru.

W pierwszym przypadku dyskretyzacja warunku brzegowego w węzłach leżących na brzegu obszaru jest prosta, gdyż wystarczy narzucić wartość funkcji w punkcie brzegowym

$$u(P_i) = g_i \quad \text{dla} \quad P_i \in \partial\Omega \quad (7.46)$$

W drugim przypadku dyskretyzujemy równanie różniczkowe (7.2)

$$Bu_i = \sum_{j=0}^{m-1} B_{j(i)} u_{j(i)} = g_i \quad (7.47)$$

w analogiczny sposób jak równania we wnętrzu obszaru. Gwiazda węzłów jest teraz niesymetryczna, a operator różnicowy ma gorsze własności aproksymacyjne (jest na ogół wolniej zbieżny), bo warunki brzegowe spełnia się przez ekstrapolację z wnętrza obszaru. Sposób ten ma jeszcze jedną poważną wadę – wymaga wprowadzenia różnych schematów różnicowych w zależności od usytuowania węzła centralnego względem brzegu.

Inny sposób spełnienia warunków brzegowych (7.2) polega na wprowadzeniu tzw. węzłów fikcyjnych, leżących poza rozpatrywanym obszarem, w pobliżu jego brzegu. Daje to możliwość budowania symetrycznych gwiazd dla węzłów centralnych leżących na brzegu.

W sformułowaniu lokalnym MRS, w każdym z węzłów centralnych leżących na brzegu, dyskretyzuje się równanie obowiązujące w obszarze oraz drugie równanie będące warunkiem brzegowym. Powoduje to zaangażowanie węzłów fikcyjnych, które są węzłami nadmiarowymi. Każdy węzeł fikcyjny dostarcza zatem dodatkową niewiadomą, stąd liczba węzłów nadmiarowych musi odpowiadać liczbie warunków brzegowych. Zbieżność rozwiązania na brzegu ulega istotnej poprawie, ale dotyczy to tylko zagadnień statycznych.

W sformułowaniu globalnym MRS warunki brzegowe, w których występują operatory różniczkowe, po dyskretyzacji, stanowią ograniczenia dla funkcjonału. Innym sposobem jest sprowadzenie ograniczeń (7.2) do naturalnych i włączenie ich do funkcjonału definiującego problem. Wtedy zostaną one automatycznie spełnione, ale funkcjonał zmieni postać. Trzecią koncepcją spełnienia warunków brzegowych typu różniczkowego w globalnej MRS jest wprowadzenie takich stopni swobody (a więc takiej aproksymacji) na brzegu, aby odpowiadały one bezpośrednio operatorowi różniczkowemu na nim. Pozwala to na narzucenie wartości na niewiadomą na brzegu jak w warunkach typu Dirichleta. Problemem tutaj jest to, że wprowadzenie dodatkowych stopni

swobody tylko w węzłach brzegowych powoduje pogorszenie uwarunkowania macierzy układu równań. Ponadto takie *ekstra* stopnie swobody mogą mieć niemechaniczny charakter, a więc inny wymiar, niż stopnie swobody zastosowane w dyskretyzacji problemu brzegowego.

7.4. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych II rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe, liniowe, II rzędu

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{yy} + a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u = f(x, y) \quad (7.48)$$

Typ tego równania zależy tylko od trzech pierwszych członów. Aby sklasyfikować typ takiego równania, należy obliczyć wyróżnik

$$\Delta = a_2^2 - 4a_1 a_3 \quad (7.49)$$

Typ tego równania będzie zależał od znaku Δ . Jeśli $\Delta < 0$, równanie jest typu eliptycznego. Przykładowo dla równania

$$u_{xx} + u_{yy} = C \quad (7.50)$$

mamy $\Delta = 1 - 4 < 0$ – równanie jest typu eliptycznego.

Dla $\Delta = 0$ równanie jest typu parabolicznego. Równanie

$$u_{xx} = u_t \quad (7.51)$$

ma wyróżnik $\Delta = 0$, zatem jest ono typu parabolicznego.

Jeśli wyróżnik $\Delta > 0$, równanie jest typu hiperbolicznego. Rozpatrując równanie

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad (7.52)$$

mamy dodatni znak wyróżnika $\Delta > 0$ – równanie jest typu hiperbolicznego.

W dalszej części podręcznika pokażemy przykłady rozwiązań równań różniczkowych eliptycznych, parabolicznych i hiperbolicznych za pomocą MRS.

7.5. Przykłady rozwiązań problemów mechaniki klasyczną MRS

Obecnie rozwiążemy szereg przykładów celem ilustracji wprowadzonych metod. Wykorzystamy zarówno lokalne, jak i globalne sformułowanie zagadnień brzegowych. Zastosowane zostaną różne metody dyskretne: MRS – lokalna, MRS – wariacyjna, MES oraz podejście mieszane łączące ze sobą processing MES i postprocessing MRS. Będzie to oznaczać, że do obliczania naprężeń, czyli pochodnych, wykorzystamy operatory MRS, ale jako rozwiązanie podstawowe użyjemy wyników MES. Takie podejście jest dzisiaj standardem metod obliczeniowych. W przykładach pokażemy także wpływ sposobu dyskretyzacji warunków brzegowych na rozwiązanie w lokalnej MRS.

7.5.1. Rozwiązanie zagadnienia deformacji pręta

Przykład 7.1. Rozważmy zastosowanie wyprowadzonych wzorów różnicowych do rozwiązania znanego nam już zagadnienia deformacji pręta obciążonego obciążeniem o liniowym rozkładzie działającym wzdłuż osi pręta, dla danych $AE = 1$, $P = 0$, $f(x) = x$, $L = 1$. Układ równań definiujących zagadnienie

$$\begin{aligned}
 -AE \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x) & 0 < x < L \\
 u(0) &= 0 & \text{podstawowy (kinematyczny) warunek brzegowy} \\
 AE \frac{du}{dx}(L) &= P & \text{naturalny (statyczny) warunek brzegowy}
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

upraszcza się do postaci

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -x \quad u(0) = 0 \quad \frac{du}{dx}(L) = 0 \tag{7.54}$$

Przyjęto siatkę 6-węzłową, zatem odległość między węzłami $h = 0.2$. Każde równanie układu (7.54) jest dyskretyzowane odpowiednim schematem. Układ

równań przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{ll}
 \text{punkt 1 – warunek brzegowy Dirichleta} & u_1 = 0 \\
 \text{punkt 2 – równanie problemu, schemat (7.13)} & (u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{1}{h^2} = -0.2 \\
 \text{punkt 3 – równanie problemu, schemat (7.13)} & (u_2 - 2u_3 + u_4) \frac{1}{h^2} = -0.4 \\
 \text{punkt 4 – równanie problemu, schemat (7.13)} & (u_3 - 2u_4 + u_5) \frac{1}{h^2} = -0.6 \\
 \text{punkt 5 – równanie problemu, schemat (7.13)} & (u_4 - 2u_5 + u_6) \frac{1}{h^2} = -0.8 \\
 \text{punkt 6 – warunek naturalny, schemat (7.12)} & (-u_5 + u_6) \frac{1}{h} = 0
 \end{array}$$

Po prostych przekształceniach układ równań przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{125} \\ \frac{2}{125} \\ -\frac{3}{125} \\ \frac{4}{125} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wynik: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{55}{750}$, $u_3 = \frac{104}{750}$, $u_4 = \frac{156}{750}$, $u_5 = \frac{180}{750}$, $u_6 = \frac{180}{750}$.

Rozwiązanie ściśle jest funkcją $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3$, zatem przemieszczenia ściśle w węzłach są następujące: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{74}{750}$, $u_3 = \frac{142}{750}$, $u_4 = \frac{198}{750}$, $u_5 = \frac{236}{750}$, $u_6 = \frac{250}{750}$. Błąd względny dla przemieszczenia w punkcie 6 jest dość duży i wynosi 27.6%. Wynika to z faktu, że do dyskretyzacji naturalnego warunku brzegowego (7.54)₃ zastosowano iloraz różnicowy wstecz.

Aby poprawić sytuację, do dyskretyzacji naturalnego warunku brzegowego trzeba wprowadzić operatory różnicowe innego typu o wyższej dokładności. Wyprowadzimy je metodą bezpośrednią, wykorzystując rozwinięcie funkcji

w szereg Taylora wokół punktu centralnego (punktu, w którym poszukujemy wartości operatora). Stosując rozwinięcie funkcji u wokół punktu i do wyrazów II rzędu, dla punktów $i - 1$ oraz $i + 1$ otrzymamy

$$\begin{aligned} u(x_i - h) &\equiv u_{i-1} \approx u_i - u'_i h + \frac{1}{2} u''_i h^2 \\ u(x_i + h) &\equiv u_{i+1} \approx u_i + u'_i h + \frac{1}{2} u''_i h^2 \end{aligned} \quad (7.56)$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze, otrzymujemy wzór na pierwszą pochodną dokładnie taki jak (7.10). Podobnie dla pochodnej drugiego rzędu – dodając powyższe dwa równania do siebie – otrzymamy wzór na drugą pochodną w postaci (7.13). Ale widać już, że powyższy sposób umożliwia stosowanie dowolnie nieregularnej siatki węzłów oraz zmiennej liczby węzłów w gwiazdzie (można uwzględnić w rozwinięciu większą liczbę wyrazów).

Wykorzystując powyższy wynik, wyprowadźmy wzór różnicowy na pierwszą pochodną, biorąc 3 węzły: 4, 5 i 6. Rozwijając funkcję w szereg Taylora wokół punktu 6, dla węzłów 4 i 5 otrzymamy

$$u_4 \approx u_6 - u'_6 2h + \frac{1}{2} u''_6 4h^2 \quad u_5 \approx u_6 - u'_6 h + \frac{1}{2} u''_6 h^2$$

Mnożąc drugie równanie powyższego układu równań przez 4 i odejmując od tak przekształconego równania pierwsze, otrzymujemy schemat różnicowy w postaci

$$u'_i = \frac{-u_4 + 4u_5 - 3u_6}{h} + O(h^2) \quad \text{– iloraz różnicowy wstecz II rzędu}$$

Statyczny warunek brzegowy, dający szóste równanie w układzie (7.55), można teraz zapisać jako

$$-u_4 + 4u_5 - 3u_6 = 0$$

zatem globalny układ równań problemu jest następujący:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{125} \\ \frac{2}{125} \\ -\frac{3}{125} \\ \frac{4}{125} \\ -\frac{5}{125} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wynik: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{72}{750}$, $u_3 = \frac{138}{750}$, $u_4 = \frac{198}{750}$, $u_5 = \frac{228}{750}$, $u_6 = \frac{240}{750}$. Błąd względny dla przemieszczenia w punkcie 6 jest teraz mały i wynosi 3.9 %. Wynika to z faktu, że do dyskretyzacji naturalnego warunku brzegowego zastosowano iloraz różnicowy wyższego rzędu. Ten wariant metody nazwiemy MRS(1).

Istnieje jeszcze inny, dokładniejszy, sposób spełnienia statycznego warunku brzegowego. Dyskretyzując również równanie problemu (7.54)₃ w węźle 6, musimy zaangażować do tego jeden węzeł poza obszarem (nazwijmy go węzłem nr 7), ale za to do dyskretyzacji statycznego warunku brzegowego w węźle 6 możemy zastosować schemat centralny. Pozwala to na uzyskanie dodatkowego równania, za pomocą którego eliminujemy niewiadomą u_7 . Równanie to prowadzi do relacji $u_5 = u_7$.

Globalny układ równań przyjmuje teraz formę

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{125} \\ \frac{2}{125} \\ -\frac{3}{125} \\ \frac{4}{125} \\ -\frac{5}{125} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy rozwiązanie: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{75}{750}$, $u_3 = \frac{144}{750}$, $u_4 = \frac{201}{750}$, $u_5 = \frac{240}{750}$, $u_6 = \frac{255}{750}$. Błąd względny przemieszczenia w punkcie 6 wynosi obecnie 2.0 %, co jest bardzo małym błędem. Ten wariant metody nazwiemy MRS(2).

Dla porównania zamieścimy rozwiązanie opisywanego zagadnienia za pomocą MES. Lokalna macierz sztywności dla pojedynczego elementu ma postać (patrz p.5.3.1)

$$\mathbf{K}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przyjmując $E^e A^e = 1$ i $l^e = 0.2$, zagregowany układ równań MES pręta zdyskretyzowanego pięcioma elementami można zapisać jako

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.006667 \\ 0.04 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \\ 0.093333 \end{bmatrix}$$

Po uwzględnieniu kinematycznego warunku brzegowego otrzymujemy rozwiązanie, które jest rozwiązaniem ścisłym – zob. tab.7.2. Dodatkowo wprowadzono do tablicy rozwiązanie otrzymane bezelementową metodą Galerkiną (BMG), będącą pewnym wariantem wariacyjnej MRS – patrz przykład 7.8⁵. BMG omówiono szczegółowo w dalszej części rozdziału.

A zatem MES okazała się tu metodą najdokładniejszą. Ale czy aby na pewno? Otóż inżyniera interesują przede wszystkim naprężenia, a więc wartości pochodnych. Zobaczmy jak to wygląda dla poszczególnych metod, tab.7.3.

Rysunki 7.9 i 7.10 ilustrują zamieszczone w tabelach 7.2 i 7.3 wyniki. Na rys.7.9 przedstawiono przemieszczenia w węzłach otrzymane MRS, dwoma wariantami, MES oraz porównano je ze ścisłymi wynikami. Jak łatwo zauważyć, wyniki otrzymane za pomocą MES pokrywają się ze ścisłymi rezultatami. Na rys.7.10 pokazano naprężenia w węzłach. Naprężenia dla MES obliczono jako uśrednione wartości naprężeń ze środków elementów. Wyniki otrzymane drugim wariantem MRS pokrywają się ze ścisłymi rezultatami, mimo że

⁵W przykładzie 7.8 zostaną zamieszczone wyniki obliczeń dla ciągu siatek oraz omówione problemy zbieżności i stabilności wyników.

Nr węzła	MRS(1)	MRS(2)	MES	BMG	Wartość dokładna
1	0	0	0	0	0
2	$\frac{72}{750}$	$\frac{75}{750}$	$\frac{74}{750}$	$\frac{73.94}{750}$	$\frac{74}{750}$
3	$\frac{138}{750}$	$\frac{144}{750}$	$\frac{142}{750}$	$\frac{142.05}{750}$	$\frac{142}{750}$
4	$\frac{192}{750}$	$\frac{201}{750}$	$\frac{198}{750}$	$\frac{197.78}{750}$	$\frac{198}{750}$
5	$\frac{228}{750}$	$\frac{240}{750}$	$\frac{236}{750}$	$\frac{236.31}{750}$	$\frac{236}{750}$
6	$\frac{240}{750}$	$\frac{255}{750}$	$\frac{250}{750}$	$\frac{249.85}{750}$	$\frac{250}{750}$

Tabela 7.2. Porównanie przemieszczeń otrzymanych różnymi metodami: MRS-lokalną, MRS-wariacyjną, MES oraz bezelementową metodą Galerkina (BMG)

przemieszczenia były obarczone znacznie większym błędem niż te uzyskane za pomocą MES. Ponadto naprężenia będące wynikiem bezpośredniego post-processingu MRS na przemieszczeniach MES i z uśrednienia są takie same. Oznacza to, że są one nadzbieżne⁶. Na rys.7.9 i 7.10 przedstawiono również wyniki MEB. Pokrywają się one z wynikami ścisłymi zarówno dla naprężeń, jak i przemieszczeń.

Czytelnika spotkała spora niespodzianka. Wartości naprężeń w węzłach dla MES, obliczone jako uśrednione wartości naprężeń ze środków elementów (patrz przykład 5.1), są obarczone większym błędem niż te, które otrzymano z rozwiązania MRS, mimo że przemieszczenia uzyskane za pomocą MRS są mniej dokładne. To jest bardzo ciekawa i ważna własność MRS. W wielu przypadkach wartość pochodnej jest obliczona z takim samym, lub dużo mniejszym, błędem jak wartość funkcji. Jest to zjawisko nadzbieżności w MRS, które będzie w dalszym ciągu przedmiotem rozważań. Jest ono, niekiedy, znacznie silniejsze niż w MES. Oznacza to także, że do mierzenia błędów obliczeń należy używać zarówno norm zerowego (np. L_2), jak i pierwszego rzędu (np. normy

⁶Nadzbieżność oznacza, że w pewnych punktach otrzymuje się wyniki lepsze niż wynika to z teorii metody. W MES i MRS istnieją takie punkty. Nazywa się je punktami nadzbieżności.

Nr węzła	MRS(1)	MRS(2)	MES	MES/MRS	BMG	Wartość dokładna
1	$\frac{360}{750}$	$\frac{375}{750}$	$\frac{370}{750}$	$\frac{370}{750}$	$\frac{369.68}{750}$	$\frac{375}{750}$
2	$\frac{345}{750}$	$\frac{360}{750}$	$\frac{355}{750}$	$\frac{355}{750}$	$\frac{355.13}{750}$	$\frac{360}{750}$
3	$\frac{300}{750}$	$\frac{315}{750}$	$\frac{310}{750}$	$\frac{310}{750}$	$\frac{309.60}{750}$	$\frac{315}{750}$
4	$\frac{225}{750}$	$\frac{240}{750}$	$\frac{235}{750}$	$\frac{235}{750}$	$\frac{235.65}{750}$	$\frac{240}{750}$
5	$\frac{120}{750}$	$\frac{135}{750}$	$\frac{130}{750}$	$\frac{130}{750}$	$\frac{130.19}{750}$	$\frac{135}{750}$
6	$-\frac{15}{750}$	0	$-\frac{5}{750}$	$-\frac{5}{750}$	$-\frac{5.36}{750}$	0

Tabela 7.3. Porównanie naprężeń w węzłach otrzymanych różnymi metodami: MRS-lokalną, MRS-wariacyjną, MES - metodą uśredniania, MES - podejściem mieszanym: processing MES/postprocessing MRS oraz bez-elementową metodą Galerkina (BMG)

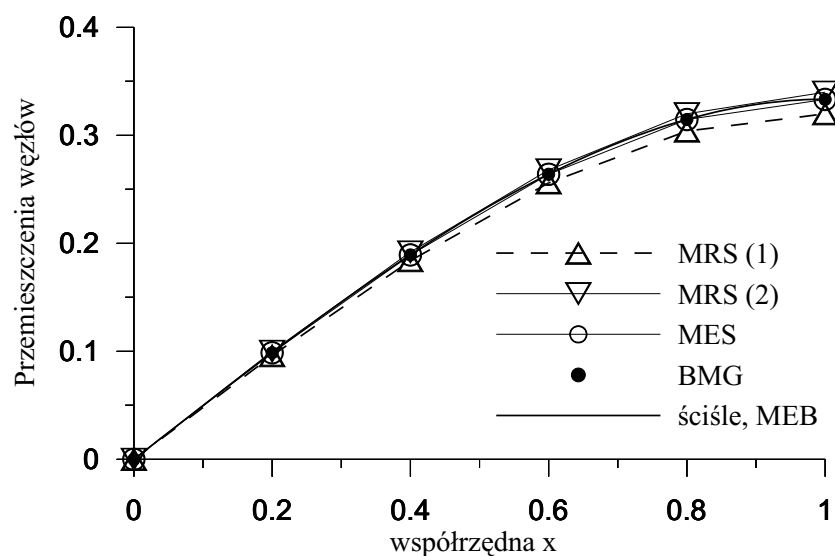
energii⁷). Warto zwrócić uwagę na to, że wartości naprężeń otrzymane za pomocą BMG są zbliżone do superzbieżnych wartości otrzymanych za pomocą MES. Jednakże taką dokładność, w przypadku BMG, mamy praktycznie w każdym punkcie.

Obecnie rozwiążemy zagadnienie deformacji pręta, wykorzystując sformułowanie globalne. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej, odpowiadający sformułowaniu lokalnemu (7.53), ma postać

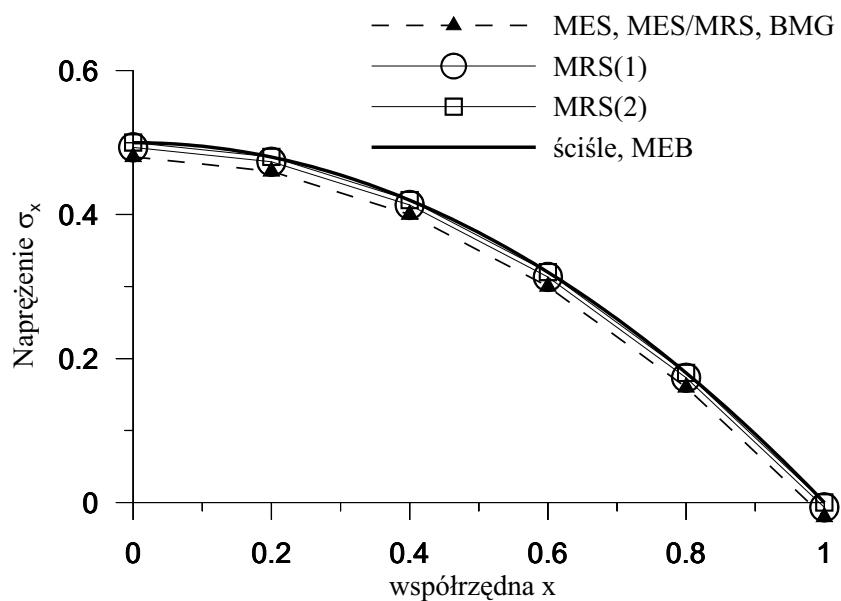
$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L u x dx \quad (7.57)$$

Zakładamy, że dyskretyzacja zagadnienia dokonywana jest za pomocą MRS, ale w wersji wariacyjnej. Całkowanie przeprowadzamy po elementach, tak jak

⁷Uwaga! Stwierdzenie: norma energii jest nieściśle, wynika ono z pewnej tradycji. W istocie bowiem 'norma' energii, z punktu widzenia matematycznego, jest seminormą. Z faktu, że norma energii zeruje się nie wynika bowiem, że rozwiązanie jest zerowe.



Rys.7.9. Przemieszczenia w węzłach obliczone za pomocą MRS, MES, BMG oraz MEB



Rys.7.10. Napężenia w węzłach obliczone za pomocą MRS, MES, BMG oraz MEB

w MES, zakładając, że całkujemy metodą trapezów. Zastępując pochodne ilorazami różnicowymi oraz sumując całki po poszczególnych elementach, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right)^2 h - \frac{0.0u_1 + 0.2u_2}{2} h + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h} \right)^2 h - \frac{0.2u_2 + 0.4u_3}{2} h + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{u_4 - u_3}{h} \right)^2 h - \frac{0.4u_3 + 0.6u_4}{2} h + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{u_5 - u_4}{h} \right)^2 h - \frac{0.6u_4 + 0.8u_5}{2} h + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{u_6 - u_5}{h} \right)^2 h - \frac{0.8u_5 + 1.0u_6}{2} h
 \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu powyższego funkcjonału względem nieznanymi parametrów węzłowych, realizując warunek stacjonarności funkcjonału, mamy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial u_2} &= 2u_2 - u_3 - 0.2h^2 = 0 \\
 \frac{\partial J}{\partial u_3} &= -u_2 + 2u_3 - u_4 - 0.4h^2 = 0 \\
 \frac{\partial J}{\partial u_4} &= -u_3 + 2u_4 - u_5 - 0.6h^2 = 0 \\
 \frac{\partial J}{\partial u_5} &= -u_4 + 2u_5 - u_6 - 0.8h^2 = 0 \\
 \frac{\partial J}{\partial u_6} &= -u_5 + u_6 - 0.5h^2 = 0
 \end{aligned}$$

W powyższym układzie pominięto równanie dla niewiadomej u_1 z uwagi na jednorodny (zerowy) warunek brzegowy dla tej niewiadomej. Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy następujące wyniki: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{75}{750}$, $u_3 = \frac{144}{750}$, $u_4 = \frac{201}{750}$, $u_5 = \frac{240}{750}$, $u_6 = \frac{255}{750}$. Błąd względny dla przemieszczenia w punkcie 6 wynosi 2.0%. Otrzymaliśmy więc dokładnie takie samo rozwiązanie jak dla lokalnej MRS.

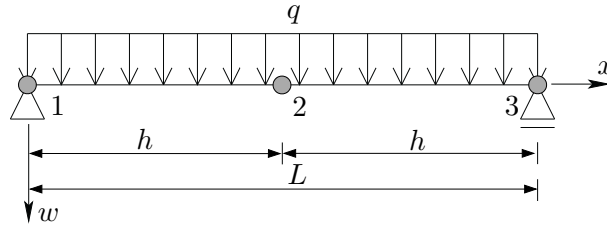
Komentując otrzymane wyniki, należy stwierdzić, że dokładne porównanie wyników różnych metod wymaga zastosowania ciągu siatek. Zostanie to uwzględnione w dalszych punktach rozdziału.

7.5.2. Deformacja wolno podpartej belki – lokalna i wariacyjna MRS

Przykład 7.2. Zastosujemy lokalną MRS do obliczenia ugięcia belki wolno podpartej obciążonej obciążeniem równomiernie rozłożonym, rys.7.11. Zadanie jest następujące: znaleźć linię ugięcia belki opisaną równaniem

$$w'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad 0 < x < L \tag{7.58}$$

z warunkami $w(0) = w(L) = 0$



Rys.7.11. Dyskretyzacja zginanej belki

Przyjmujemy trzy siatki: 3,5,9-węzłowe. Moment zginający w przyjętym układzie współrzędnych wyraża się wzorem

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(L - x)$$

Zadanie 1. Siatka 3-węzłowa: $h = \frac{L}{2}$

Z uwagi na warunki brzegowe: $w_0 = 0, w_2 = 0$ równanie (7.58) dyskretyzujemy tylko w punkcie 1. Uwzględniając, że $M_1 = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8}$ oraz $h^2 = \frac{L^2}{4}$ mamy

$$(w_0 - 2w_1 + w_2) \frac{1}{L^2} = -\frac{qL^2}{8} \frac{1}{EI}$$

skąd

$$w_1 = \frac{qL^2}{64EI}$$

Ugięcie ścisłe $w_1^{\text{dok}} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$, zatem

$$w_1 = 1 \frac{2}{10} w_1^{\text{dok}}$$

Ugięcie w środku belki wyznaczone zostało z 20 % dokładnością, a więc stosunkowo mało dokładnie, ale pamiętajmy, że do dyskretyzacji zagadnienia przyjęto siatkę o zaledwie 3 węzłach. Będziemy teraz zagęszczać siatkę i śledzić błąd rozwiązania.

Zadanie 2. Siatka 5-węzłowa: $h = \frac{L}{4}$

Z uwagi na warunki brzegowe: $w_0 = 0, w_4 = 0$ i symetrię zadania równanie (7.58) dyskretyzujemy tylko w punktach 1 i 2. Uwzględniając, że $M_1 = M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3qL^2}{32}$, $M_2 = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8}$ oraz $h^2 = \frac{L^2}{16}$, mamy

$$\begin{aligned} (w_0 - 2w_1 + w_2) \frac{1}{\frac{L^2}{16}} &= -\frac{3qL^2}{32} \frac{1}{EI} \\ (w_1 - 2w_2 + w_3) \frac{1}{\frac{L^2}{16}} &= -\frac{qL^2}{8} \frac{1}{EI} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Po wykorzystaniu warunku symetrii $w_3 = w_2$, warunku brzegowego $w_0 = 0$ oraz przyjmując oznaczenie $Q = \frac{1}{128} \frac{qL^4}{EI}$, układ równań (7.59) przybiera formę

$$\begin{aligned} -2w_1 + w_2 &= -\frac{3}{4}Q \\ 2w_1 - 2w_2 &= -Q \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań mamy: $w_1 = \frac{5}{4}Q = \frac{5}{512} \frac{qL^4}{EI}$,
 $w_2 = \frac{7}{4}Q = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI}$.

Porównanie rozwiązania dokładnego i aproksymacyjnego jest następujące:

$$w_1 = \frac{20}{19} w_1^{\text{dok}} \quad w_2 = \frac{21}{20} w_2^{\text{dok}} \quad (7.60)$$

Zadanie 3. Siatka 9-węzłowa: $h = \frac{L}{8}$

Z uwagi na warunki brzegowe i symetrię zadania równanie (7.58) dyskretyzujemy tylko w punktach 1,2,3,4. Uwzględniając, że $M_1 = M\left(\frac{L}{8}\right) = \frac{7}{128}qL^2$, $M_2 = M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{12}{128}qL^2$, $M_3 = M\left(\frac{3L}{8}\right) = \frac{15}{128}qL^2$, $M_4 = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{16}{128}qL^2$ oraz $h^2 = \frac{L^2}{64}$, mamy

$$\begin{aligned} (w_0 - 2w_1 + w_2) \frac{1}{\frac{L^2}{64}} &= -\frac{7}{128} \frac{L^2}{EI} \\ (w_1 - 2w_2 + w_3) \frac{1}{\frac{L^2}{64}} &= -\frac{12}{128} \frac{L^2}{EI} \\ (w_2 - 2w_3 + w_4) \frac{1}{\frac{L^2}{64}} &= -\frac{15}{128} \frac{L^2}{EI} \\ (w_3 - 2w_4 + w_5) \frac{1}{\frac{L^2}{64}} &= -\frac{16}{128} \frac{l^2}{EI} \end{aligned} \tag{7.61}$$

Po wykorzystaniu symetrii zagadnienia: $w_5 = w_3$ oraz warunku brzegowego $w_0 = 0$, mnożąc równania (7.61) przez $\frac{L^2}{64}$ oraz przyjmując oznaczenie $Q = \frac{1}{8192} \frac{qL^4}{EI}$, układ równań (7.61) przyjmie formę

$$\begin{aligned} -2w_1 + w_2 &= -7Q \\ w_1 - 2w_2 + w_3 &= -12Q \\ w_2 - 2w_3 + w_4 &= -15Q \\ w_3 - 2w_4 + w_3 &= -16Q \end{aligned}$$

Przemnażając równania drugie i trzecie przez dwa, dodając stronami pierwsze równanie do drugiego oraz trzecie do czwartego, otrzymujemy układ 2 równań

$$\begin{aligned} -3w_2 + 2w_3 &= -31Q \\ 2w_2 - 2w_3 &= -46Q \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań mamy $w_1 = 42Q = \frac{42}{8192} \frac{qL^4}{EI}$,
 $w_2 = 77Q = \frac{77}{8192} \frac{qL^4}{EI}$, $w_3 = 100Q = \frac{100}{8192} \frac{qL^4}{EI}$, $w_4 = 108Q = \frac{108}{8192} \frac{qL^4}{EI}$.

Porównanie rozwiązania dokładnego i aproksymacyjnego dla środka belki jest następujące: $w_4 = 1 \frac{1}{80} w_4^{\text{dok}}$, co oznacza 1.25 % błędu, a więc jest to bardzo dokładny wynik.

Przykład 7.3. Powtórzmy przykład 7.2, stosując wariacyjną MRS. Będziemy poszukiwać minimum całkowitej energii potencjalnej

$$J(w) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} (w')^2 - \frac{M(x)}{EI} w \right] dx \quad (7.62)$$

Podobnie jak dla lokalnej MRS zastosujemy kilka uprzednio użytych siatek.

Zadanie 1. Siatka 3-węzłowa: $h = \frac{L}{2}$

Zastępując pochodne ilorazami różnicowymi, całkując obydwie człony metodą trapezów oraz uwzględniając symetrię zagadnienia (całkujemy energię tylko dla połowy belki i mnożymy przez 2), otrzymujemy

$$J(w_i) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{w_1 - w_0}{h} \right)^2 - \frac{M_0 w_0 + M_1 w_1}{2EI} h \right] \quad (7.63)$$

Uwzględniając warunek brzegowy: $w_0 = 0$, warunek stacjonarności funkcjonału można wyrazić następująco:

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = \frac{2w_1}{h} - \frac{M_1}{EI} h = 0$$

skąd

$$w_1 = \frac{M_1 h^2}{EI \cdot 2} = \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI}$$

Otrzymaliśmy więc takie samo rozwiązanie jak dla wersji lokalnej MRS.

Zadanie 2. Siatka 5-węzłowa: $h = \frac{L}{4}$

Dyskretyzując funkcjonal, jak poprzednio, otrzymujemy

$$J(w_i) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{w_1 - w_0}{h} \right)^2 h - \frac{M_0 w_0 + M_1 w_1}{2EI} h + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{w_2 - w_1}{h} \right)^2 h - \frac{M_1 w_1 + M_2 w_2}{2EI} h \right] \quad (7.64)$$

Uwzględniając warunek brzegowy: $w_0 = 0$, warunek stacjonarności funkcjonału można wyrazić następująco:

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = \frac{2w_1}{h} - \frac{M_1}{EI} h + 2(-1) \frac{w_2 - w_1}{h} - \frac{M_1}{EI} h = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial w_2} = 2(-1) \frac{w_2 - w_1}{h} - \frac{M_1}{EI} h = 0$$

Po przekształceniach układ równań (7.3) przybiera postać

$$\frac{4}{h^2} w_1 - \frac{2}{h^2} w_2 = \frac{2M_1}{EI} \\ -\frac{2}{h^2} w_1 + \frac{2}{h^2} w_2 = \frac{M_2}{EI}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$w_1 = \left(M_1 + \frac{M_2}{2} \right) \frac{h^2}{EI} = \left(\frac{3}{32} qL^2 + \frac{1}{16} qL^2 \right) \frac{L^2}{16EI} = \frac{5}{512} \frac{qL^4}{EI} \\ w_2 = w_1 + \frac{M_2}{2} \frac{h^2}{EI} = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI}$$

Otrzymany wynik jest identyczny jak w lokalnej wersji MRS. Podobne wyniki daje siatka trzecia, dlatego nie będziemy dla niej zamieszczać wyników. Warto zauważyć fakt bardzo szybkiej zbieżności wyników aproksymacyjnych do ścisłych.

7.5.3. Rozwiązanie zagadnienia skręcania pręta – lokalna i wariacyjna MRS

Przykład 7.4. Rozważymy analizę stanu naprężenia w skręcanym pręcie pryzmatycznym.

Sformułowanie problemu

Znaleźć maksymalne naprężenia ścinające w pryzmatycznym pręcie o przekroju kwadratowym skręcanym momentem M_s

$$M_s = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} F \, dx dy, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (7.65)$$

Sformułowanie lokalne (równanie typu eliptycznego)

$$\begin{aligned} -\nabla^2 F &= 2G\theta & \text{w } \Omega \\ F &= 0 & \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.66)$$

gdzie F jest funkcją skręcania, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, zaś θ – kątem skręcania.

Sformułowanie globalne

Znaleźć funkcję F minimalizującą funkcjonal

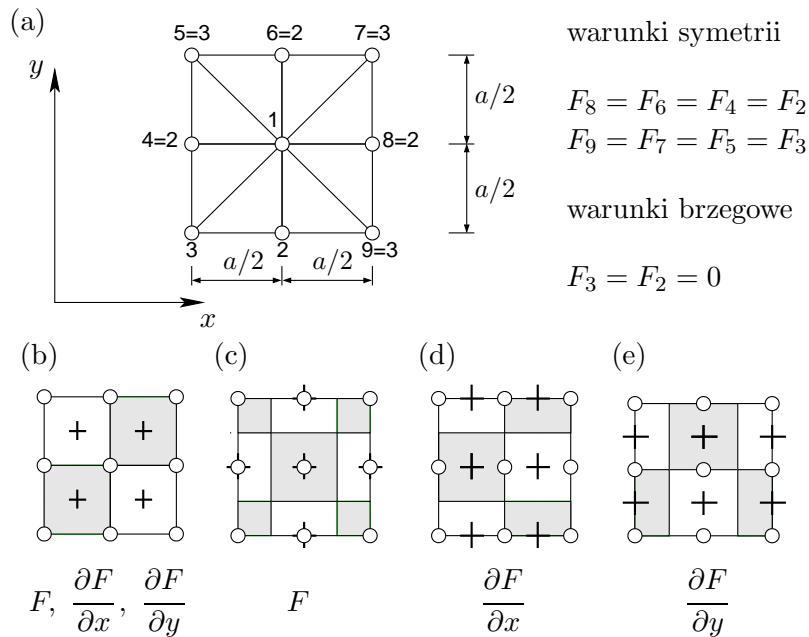
$$\begin{aligned} \min_F J, \quad J &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y^2} \right)^2 \right] - 2G\theta F \right\} dx dy \\ F &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.67)$$

Dyskretyzacja MRS

Do obliczeń przyjęto regularną siatkę 3x3 węzły, jak to pokazano na rys.7.12, wykorzystując symetrię problemu, skąd $F_8 = F_6 = F_4 = F_2$, $F_9 = F_7 = F_5 = F_3$. Warunki brzegowe są postaci $F_3 = F_2 = 0$.

Sformułowanie lokalne

Wykorzystując standardowy operator Laplace'a (tab.7.1), równanie problemu po dyskretyzacji przybiera postać



Rys.7.12. Siatki obliczeniowe do przykładu 7.4

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 - 4F_1 = -2G\theta \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

natomiast, wykorzystując ulepszony operator Laplace'a (tab.7.1), mamy

$$\frac{1}{6}(F_3 + F_5 + F_7 + F_9) + \frac{2}{3}(F_2 + F_4 + F_6 + F_8) - \frac{10}{3}F_1 = -2G\theta \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Obydwie zastosowane dyskretyzacje dają odpowiednio

$$F_1 = \frac{1}{8}G\theta a^2 = 0.848F_1^{\text{dok}}$$

oraz

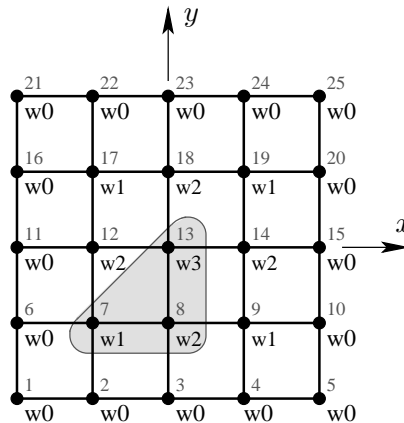
$$F_1 = \frac{3}{20}G\theta a^2 = 1.018F_1^{\text{dok}} \tag{7.68}$$

gdzie F_1^{dok} jest rozwiązaniem dokładnym. Przyjmując $a=1, \theta=0.01$ oraz $G=10000$, otrzymujemy następujące wyniki liczbowe: – dla standardowego schematu operatora Laplace'a – $F_1=12.5$ (błąd 15.15 %), dla ulepszanego schematu operatora Laplace'a – $F_1=15.0$ (błąd 1.8 %).

Obecnie pokażemy rozwiązanie problemu skręcania pręta dla przyjętych danych, dla ciągu siatek wykorzystując programy napisane w MATLAB-ie. Prześledzimy też proces zbieżności wyników aproksymacyjnych do ścisłych. Zadanie jest następujące: rozwiązać problem skręcania pręta pryzmatycznego o przekroju kwadratowym. Sformułowanie jest dane za pomocą wzorów (7.66).

Do obliczeń przyjęto dane: $\theta=0.01$, $G=10000$. Procedura rozwiązania problemu za pomocą MRS jest następująca:

1. Przyjęcie siatki do obliczeń - siatka 5×5 (rys. 7.13), skąd $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$



Rys.7.13. Siatka węzłów 5×5

2. Przyjęcie schematu różnicowego (zob. rys. 7.5)
3. Ułożenie układu równań. Ma on następującą postać:

$$\begin{aligned} 2F_2 - 4F_1 &= -ch^2 \\ 2F_1 + F_3 - 2F_2 &= -ch^2 \\ 4F_2 - 4F_3 &= -ch^2 \end{aligned}$$

gdzie $c = 2G\theta$

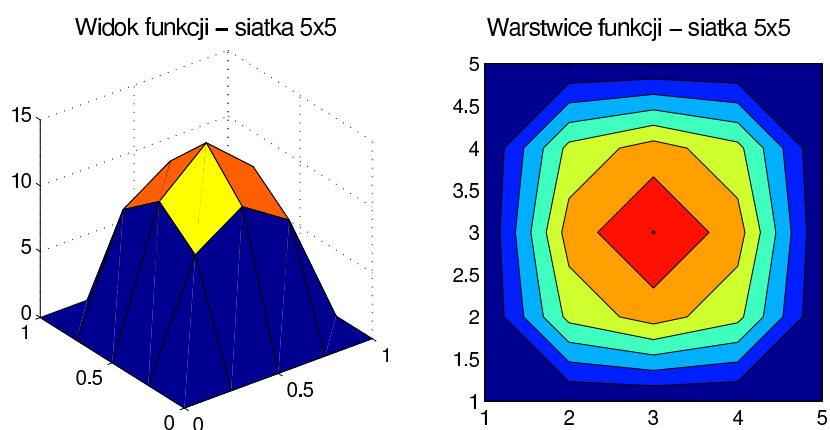
W zwartej formie można go zapisać jako

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = -ch^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{-ch^2}{16} \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5938 \\ 10.9375 \\ 14.0625 \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

Widok funkcji rozwiązania oraz jego warstwy przedstawiono na rys. 7.14.

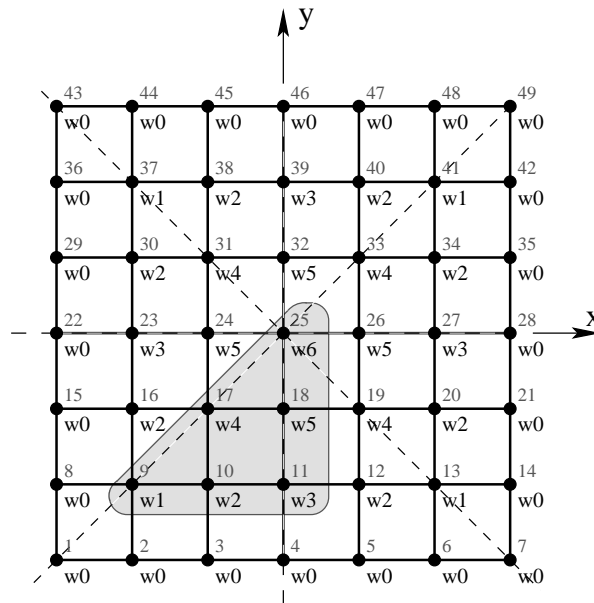


Rys.7.14. Widok i warstwy rozwiązania dla siatki 5x5

Podobnie rozwiązano problem jak poprzednio, ale dla siatki węzłów 7x7 (rys.7.15), $h = \Delta x = \Delta y = \frac{1}{6}$.

Układ równań dla powyższej dyskretyzacji, przyjmując poczwórną symetrię i uwzględniając warunki brzegowe, jest następujący:

$$\begin{aligned} 2F_2 - 4F_1 &= -ch^2 \\ F_1 + F_2 + F_4 - 4F_2 &= -ch^2 \\ 2F_2 + F_5 - 4F_3 &= -ch^2 \\ 2F_2 + 2F_5 - 4F_3 &= -ch^2 \\ F_3 + 2F_4 + F_6 - 4F_5 &= -ch^2 \\ 4F_5 - 4F_6 &= -ch^2 \end{aligned} \quad (7.71)$$



Rys.7.15. Siatka węzłów 7x7

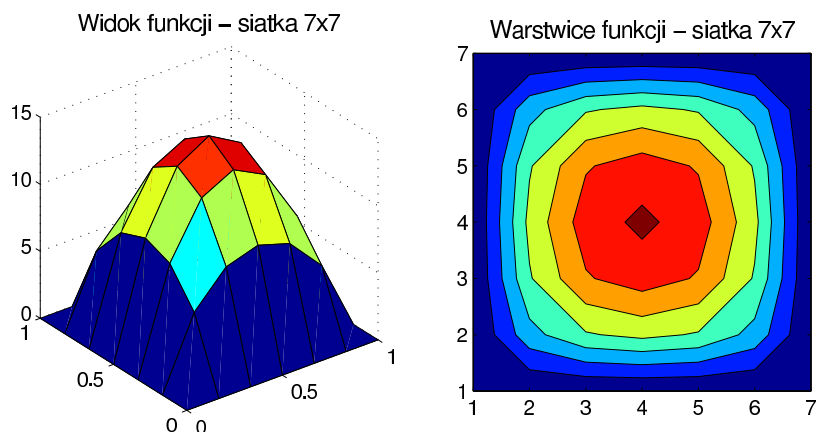
W zwartej formie można go zapisać jako

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ch^2 \\ -ch^2 \\ -ch^2 \\ -ch^2 \\ -ch^2 \\ -ch^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5556 \\ -5.5556 \\ -5.5556 \\ -5.5556 \\ -5.5556 \\ -5.5556 \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy następujący wynik:

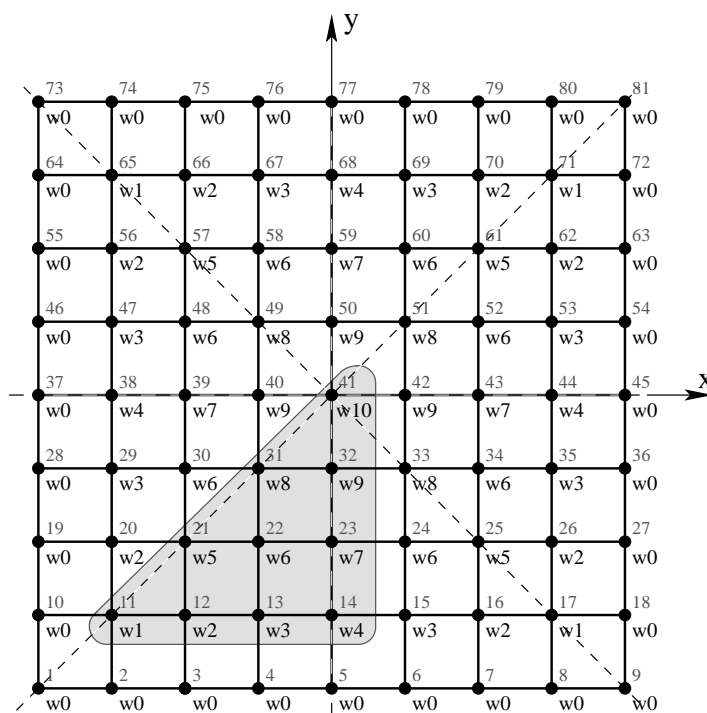
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2885 \\ 7.7991 \\ 8.5470 \\ 11.8056 \\ 13.0342 \\ 14.4231 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

Widok rozwiązania oraz jego wartości przedstawiono na rys. 7.16.



Rys.7.16. Widok i warstwice rozwiązania dla siatki 7x7

Kolejne rozwiązanie otrzymano dla siatki węzłów 9x9 (rys. 7.17), $h = \Delta x = \Delta y = \frac{1}{8}$.



Rys.7.17. Siatka węzłów 9x9

Układ równań dla powyższej dyskretyzacji, przyjmując poczwórną symetrię i uwzględniając warunki brzegowe, jest następujący:

$$\begin{aligned}
 2F_2 - 4F_1 &= -ch^2 \\
 F_1 + F_3 + F_5 - 4F_2 &= -ch^2 \\
 F_2 + F_4 + F_6 - 4F_3 &= -ch^2 \\
 2F_3 + F_7 - 4F_4 &= -ch^2 \\
 2F_2 + 2F_6 - 4F_5 &= -ch^2 \\
 F_3 + F_5 + F_7 + F_8 - 4F_6 &= -ch^2 \\
 F_4 + 2F_6 + F_9 - 4F_7 &= -ch^2 \\
 2F_6 + 2F_9 - 4F_8 &= -ch^2 \\
 F_7 + 2F_8 + F_{10} - 4F_9 &= -ch^2 \\
 4F_9 - 4F_{10} &= -ch^2
 \end{aligned} \tag{7.74}$$

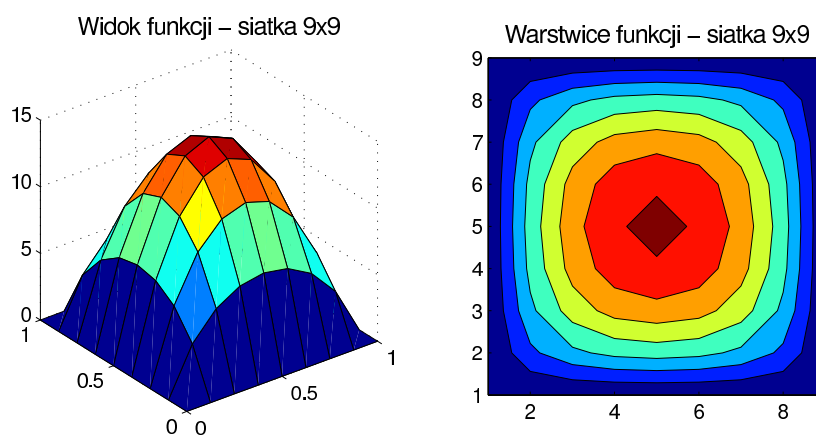
W zwartej formie można go zapisać jako

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 \\
 F_4 \\
 F_5 \\
 F_6 \\
 F_7 \\
 F_8 \\
 F_9 \\
 F_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125 \\
 -3.125
 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5558 \\ 5.5492 \\ 6.5832 \\ 6.9049 \\ 8.9327 \\ 10.7537 \\ 11.3281 \\ 13.0457 \\ 13.7753 \\ 14.5565 \end{bmatrix} \quad (7.75)$$

Widok rozwiązania oraz jego warstwiec przedstawiono na rys. 7.18.

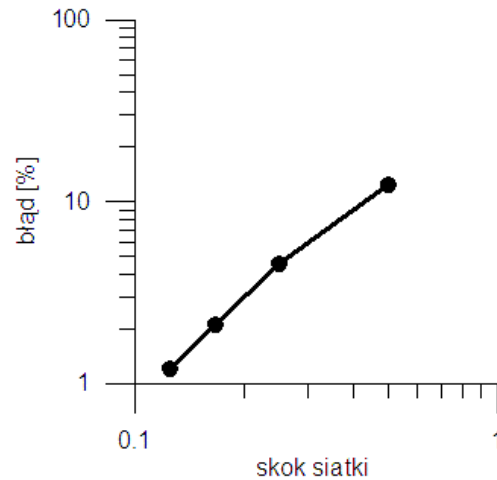


Rys.7.18. Widok i warstwiec rozwiązania dla siatki 9x9

Warto zestawzić wyniki obliczeń dla całego ciągu siatek oraz uzyskane błędy obliczeń (wartość ścisła $F_{\text{dok}} = 14.7348$):

- siatka 3x3, skok siatki $h = \frac{1}{2}$, $F_{\text{max}} = 12.5$, błąd=15.17 %,
- siatka 5x5, skok siatki $h = \frac{1}{4}$, $F_{\text{max}} = 14.06$, błąd=4.56 %,
- siatka 7x7, skok siatki $h = \frac{1}{6}$, $F_{\text{max}} = 14.42$, błąd=2.12 %,
- siatka 9x9, skok siatki $h = \frac{1}{8}$, $F_{\text{max}} = 14.56$, błąd=1.21 %.

Tempo zbieżności wyników aproksymacyjnych do ścisłych zaprezentowano na rys. 7.19.



Rys.7.19. Zbieżność wyników aproksymacyjnych do ścisłych dla problemu skręcania

Sformułowanie globalne

Model dyskretny dla sformułowania globalnego powstaje poprzez zamianę pochodnych na wzory różnicowe i wykonanie całkowania numerycznego. Zastosowano dwa warianty całkowania numerycznego różniące się dokładnością.

a. Liniowa aproksymacja i całkowanie po elemencie (węzły 1, 8, 7, 6), rys.7.12b

$$J = 4 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{F_7 + F_8}{2} - \frac{F_1 + F_6}{2} \right) \frac{2}{a} \right]^2 + \left[\left(\frac{F_6 + F_7}{2} - \frac{F_1 + F_8}{2} \right) \frac{2}{a} \right]^2 + \right. \\ \left. - 2G\theta \frac{1}{4} (F_1 + F_6 + F_7 + F_8) \right\} \frac{a^2}{4} = F_1^2 - \frac{1}{2} G\theta a^2 F_1$$

$$\frac{\partial J}{\partial F_1} = 0 \rightarrow F_1 = \frac{1}{4} G\theta a^2 = 1.696 F_1^{\text{dok}}$$

b. Liniowa aproksymacja i całkowanie dookoła węzłów, gdzie wartość opera-

tora $\left(F, \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}\right)$ jest najdokładniejsza, rys.7.12c,d,e

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \left[2 \left(2 \frac{F_8 - F_1}{a} \right)^2 \frac{a^2}{4} + 4 \left(2 \frac{F_7 - F_8}{a} \right)^2 \frac{a^2}{8} \right] + \right. \\ \left. + \left[2 \left(2 \frac{F_6 - F_1}{a} \right)^2 \frac{a^2}{4} + 4 \left(2 \frac{F_7 - F_8}{a} \right)^2 \frac{a^2}{8} \right] \right\} + \\ - 2Q\theta \left(F_1 \frac{a^2}{4} + 4F_8 \frac{a^2}{8} + 4F_7 \frac{a^2}{16} \right) = 2F_1^2 - \frac{1}{2}G\theta a^2 F_1$$

$$\frac{\partial J}{\partial F_1} = 0 \rightarrow F_1 = \frac{1}{8}G\theta a^2 \approx 0.848F_1^{\text{dok}}$$

c. Całkowanie kwadraturami Simpsona II rzędu pomiędzy węzłami. Nieco lepsze rezultaty otrzymuje się dla kwadratury Simpsona

$$J = \frac{8}{3}F_1^2 - \frac{8}{3}G\theta a^2 F_1$$

$$\frac{\partial J}{\partial F_1} = 0 \rightarrow F_1 = \frac{1}{6}G\theta a^2 \approx 1.130F_1^{\text{dok}}$$

Obliczenie naprężeń stycznych i momentu skręcającego

Maksymalne naprężenia styczne $\tau_{\max} = \tau_{zy8} = \tau_{xy6}$

Używając schematu różnicowego w przód w węźle 8, otrzymujemy

$$\tau_{\max} \approx -2 \frac{F_8 - F_1}{a} = \frac{2}{a}F_1$$

Lepsze rezultaty otrzymuje się, stosując schemat centralny (II rzędu)

$$\frac{1}{2}(\tau_{zy1} + \tau_{zy8}) \approx \frac{2}{a}F_1 \rightarrow \tau_{zy8} \approx \frac{4}{a}F_1 - \tau_{zy1}$$

Stosując schemat centralny w punkcie 1, naprężenia styczne przyjmują wartości

$$\tau_{zy1} \approx -\frac{F_8 - F_4}{a} = 0 \quad \tau_{zx1} \approx \frac{F_6 - F_2}{a} = 0$$

oraz

$$\tau_{\max} \approx \frac{4}{a} F_1$$

Ten sam rezultat otrzymujemy, wykorzystując schemat centralny dla pierwszej pochodnej bezpośrednio w punkcie 8

$$\tau_{\max} \approx \frac{2}{a} (-3F_4 + 4F_1 - F_8) \frac{1}{2} = \frac{4}{a} F_1 \quad (7.76)$$

Moment skręcający

a. Stosując najprostszą aproksymację i całkowanie dookoła węzłów, mamy

$$M_s \approx 2 \left[F_1 \frac{a^2}{4} + (F_2 + F_4 + F_6 + F_8) \frac{a^2}{8} + (F_3 + F_5 + F_7 + F_9) \frac{a^2}{16} \right] = \frac{1}{2} a^2 F_1$$

Stąd maksymalne naprężenie styczne wynosi

$$\tau_{\max} \approx \frac{2}{a} F_1 = 4 \frac{M_s}{a^3} = 0.832 \tau_{\max}^{\text{dok}}$$

b. Przyjmując drugiego rzędu aproksymację i całkowanie typu Simpsona pomiędzy węzłami, mamy

$$M_s \approx 2 [16F_1 + 4(F_2 + F_4 + F_6 + F_8) + (F_3 + F_5 + F_7 + F_9)] \frac{a^2}{36} = \frac{8}{9} a^2 F_1$$

Stąd maksymalne naprężenie ścinające wynosi

$$\tau_{\max} \approx \frac{4}{a} F_1 = \frac{9}{2} \frac{M_s}{a^3} = 0.936 \tau_{\max}^{\text{dok}} \quad (7.77)$$

7.5.4. Rozwiązanie równania biharmonicznego – równanie zginania płyty

Rozwiążemy problem zginania płyty cienkiej obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem q (rys.7.20). Modelem matematycznym jest równanie eliptyczne IV rzędu

$$\nabla^4 w = -\frac{q}{D} \quad \text{w } \Omega \quad (7.78)$$

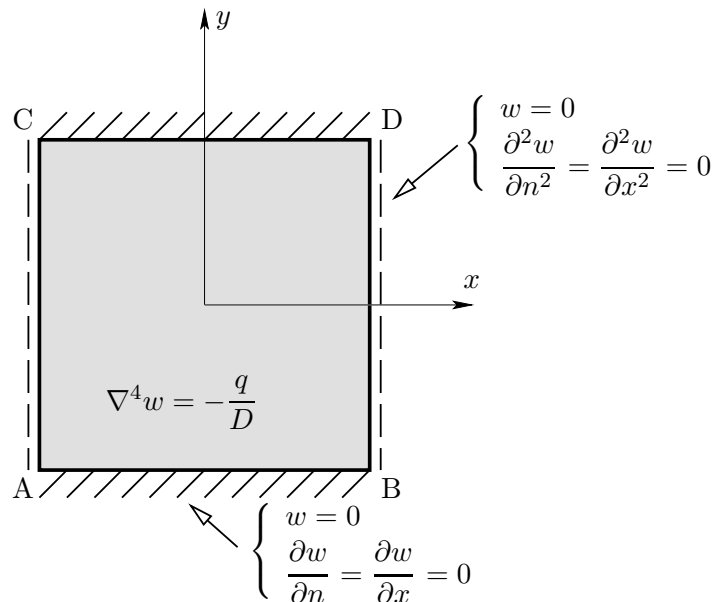
gdzie $D = E \frac{t^3}{12(1 - \nu^2)}$ – sztywność płytowa, ν – współczynnik Poissona, t – wysokość przekroju.

Na brzegach określone są warunki, rys.7.20

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \text{ na brzegach AC i BD (swobodne podparcie)} \quad (7.79)$$

oraz

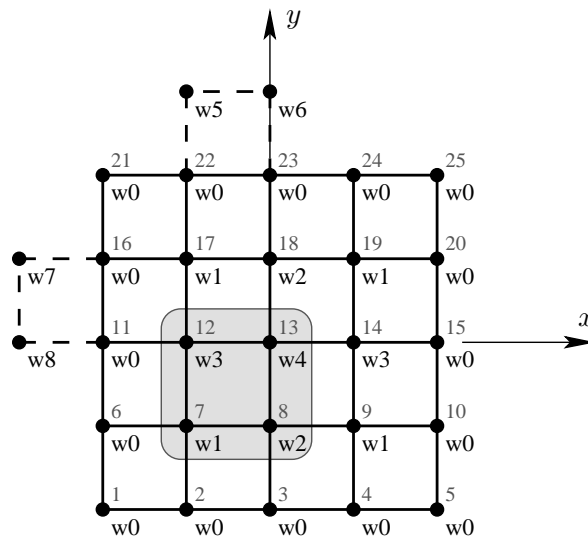
$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ na brzegach AB i CD (utwierdzenie)} \quad (7.80)$$



Rys.7.20. Problem zginania płyty

Do obliczeń przyjęto następujące dane: Wymiary płyty 100×100 m, grubość płyty $t = 1$ m, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, moduł Younga $E = 1.092 \cdot 10^7$ kN/m², stąd $D = 1.0 \cdot 10^7$ kNm. Zakładając $\Delta x = \Delta y = h$, operator różnicowy przybiera postać – zob rys. 7.7, jego wyprowadzenie podano wcześniej.

Płytę zdyskretyzowano w sposób pokazany na rys. rys. 7.21.



Rys.7.21. Siatka 25 węzłów do obliczeń za pomocą MRS

Uwzględniając fakt, że zadanie ma podwójną symetrię, układ równań można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 w_7 + w_5 + w_1 + w_1 + 2(w_0 + w_0 + w_0 + w_4) - \\
 - 8(w_0 + w_0 + w_2 + w_3) + 20w_1 &= -\frac{qh^4}{D} \\
 w_0 + w_6 + w_0 + w_2 + 2(w_0 + w_0 + w_3 + w_3) - \\
 - 8(w_1 + w_0 + w_1 + w_4) + 20w_2 &= -\frac{qh^4}{D} \\
 w_8 + w_0 + w_3 + w_0 + 2(w_0 + w_2 + w_2 + w_0) - \\
 - 8(w_0 + w_1 + w_4 + w_1) + 20w_3 &= -\frac{qh^4}{D} \\
 w_0 + w_0 + w_0 + w_0 + 2(w_1 + w_1 + w_1 + w_1) - \\
 - 8(w_2 + w_3 + w_2 + w_3) + 20w_4 &= -\frac{qh^4}{D}
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

Z warunków brzegowych wynika, że

– brzeg AC

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_0 &= \frac{w_7 - 2w_0 + w_1}{h^2} = 0 \quad \rightarrow \quad w_7 = -w_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_0 &= \frac{w_8 - 2w_0 + w_3}{h^2} = 0 \quad \rightarrow \quad w_8 = -w_3\end{aligned}\quad (7.82)$$

– brzeg CD

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_0 &= \frac{w_5 - w_1}{2h} = 0 \quad \rightarrow \quad w_5 = w_1 \\ \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_0 &= \frac{w_6 - w_2}{2h} = 0 \quad \rightarrow \quad w_6 = w_2\end{aligned}\quad (7.83)$$

W zwartej formie układ równań (7.81) można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} 22 & -8 & -8 & 2 \\ -16 & 22 & 4 & -8 \\ -16 & 4 & 20 & -8 \\ 8 & -16 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -\frac{qh^4}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (7.84)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy rozwiązanie

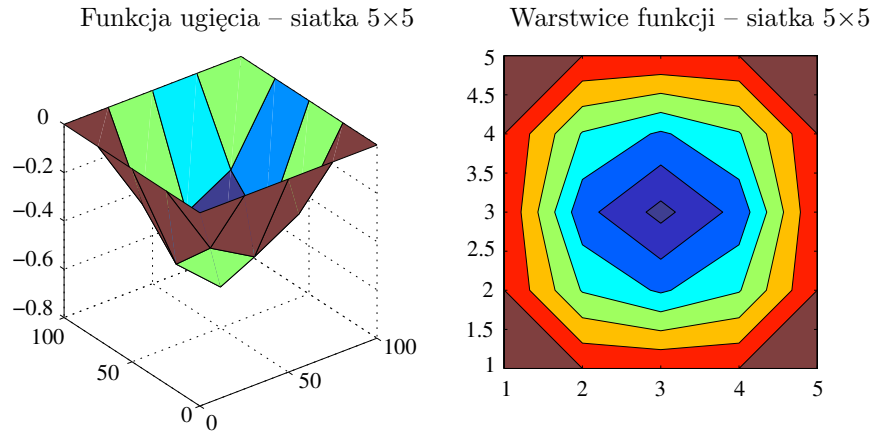
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -\frac{qh^4}{D} \begin{bmatrix} 0.3084 \\ 0.4145 \\ 0.4663 \\ 0.6313 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1205 \\ -0.1619 \\ -0.1821 \\ -0.2466 \end{bmatrix}\quad (7.85)$$

Rozwiązanie oraz jego warstwiec przedstawiono na rys.7.22.

7.5.5. Rozwiązania równań parabolicznych za pomocą MRS

Obecnie pokażemy rozwiązanie problemu sformułowanego za pomocą równania parabolicznego. Rozważmy problem nieustalonego przepływu ciepła w obszarze jednowymiarowym, rządzonego przez równanie

$$\alpha u_{xx} = u_t \quad \text{w } \Omega \quad (7.86)$$



Rys.7.22. Rozwiązanie płyty za pomocą MRS, widok i warstwie

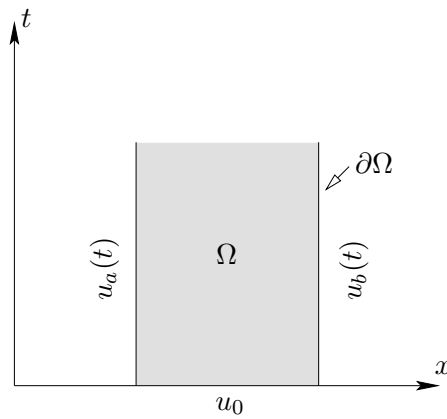
z warunkiem brzegowym

$$u(a, t) = u_a(t), \quad u(b, t) = u_b(t) \quad (7.87)$$

i warunkami początkowymi

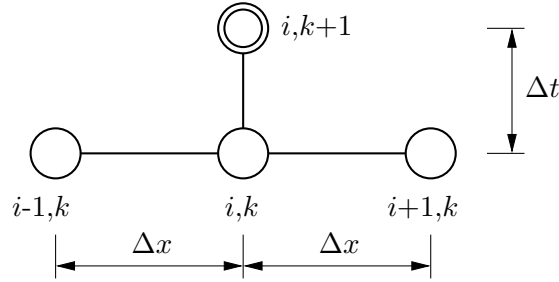
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (7.88)$$

gdzie $t \geq 0$ jest czasem, a parametr $\alpha = \text{const}$, rys.7.23.



Rys.7.23. Obszar i warunki brzegowe dla równania parabolicznego

Problem zdyskretyzowano za pomocą MRS w przestrzeni i czasie. Najpierw zostanie zastosowany schemat explicite (jawny – warunkowo stabilny), rys.7.24.



Rys.7.24. Schemat jawny (explicite) całkowania po czasie

Drugą pochodną przestrzenną dla chwili czasowej k można zapisać następująco:

$$u_{xx(i,k)} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} \quad (7.89)$$

Pierwszą pochodną względem czasu, dla warstwy czasowej k , można zapisać jak poniżej

$$u_{t(i,k)} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (7.90)$$

Równanie (7.86) można przedstawić teraz jako

$$\alpha \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = 0 \quad (7.91)$$

Przyjmijmy, że

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \lambda \quad (7.92)$$

Z uwagi na to, że schemat różnicowy (7.91) jest jawny, musi być spełniony warunek stabilności

$$\lambda < \frac{1}{2} \quad (7.93)$$

Oznacza to, że krok czasowy nie może być dowolny, lecz ograniczony i pozostawać w pewnej relacji z odległością między węzłami w przestrzeni Δx .

Przemnażając równanie (7.91) przez Δt , otrzymujemy

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) - u_{i,k+1} + u_{i,k} = 0 \quad (7.94)$$

i dalej, wykorzystując definicję λ , otrzymamy związek na niewiadomą wartość $u_{i,k+1}$ dla warstwy czasowej $k+1$

$$u_{i,k+1} = \lambda u_{i+1,k} + (1 - 2\lambda)u_{i,k} + \lambda u_{i-1,k} \quad (7.95)$$

Zauważmy, że w schemacie (7.94) bezpośrednio tkwi warunek stabilności.

Dla przykładu rozwiążemy równanie, rys.7.25

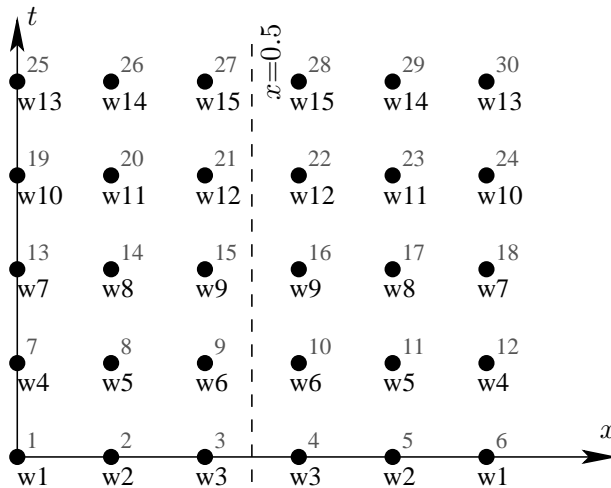
$$u_{xx} = u_t \quad (7.96)$$

z warunkami na brzegach $x = 0$, i $x = 1$

$$u(0, t) = 100, \quad u(1, t) = 100 \quad (7.97)$$

oraz warunkiem początkowym dla $t=0$

$$u(x, 0) = 100 - 400x + 400x^2 \quad (7.98)$$



Rys.7.25. Dyskretyzacja zagadnienia w przestrzeni i czasie

Problem jest symetryczny względem prostej $x = 0.5$, rys.7.25. Będziemy się posługiwać numerami węzłów. Po uwzględnieniu symetrii wynika, że z warunków brzegowych i warunku początkowego

$$u_1 = u_4 = u_7 = u_{10} = 100, \quad u_2 = 36, \quad u_3 = 4, \quad \Delta x = \frac{1-0}{5} \quad (7.99)$$

Warunek stabilności można teraz zapisać w postaci

$$\lambda_{\text{kryt}} = \frac{\alpha \Delta t_{\text{kryt}}}{\Delta x^2} \quad (7.100)$$

skąd

$$\Delta t_{\text{kryt}} = \frac{\lambda_{\text{kryt}} \Delta x^2}{\alpha} \quad (7.101)$$

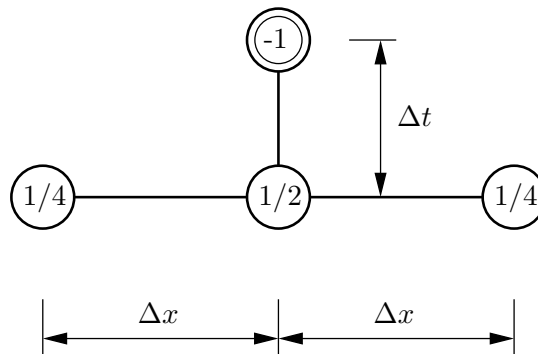
Założmy $\Delta t = 0.001 < \Delta t_{\text{kryt}}$, skąd

$$\lambda = \frac{1 \cdot 0.01}{(0.2)^2} = \frac{1}{4} \quad (7.102)$$

Wstawiając wartość λ do równania (7.95), otrzymujemy jawny schemat różnicowy w postaci

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{4}u_{i+1,k} + \frac{1}{2}u_{i,k} + \frac{1}{4}u_{i-1,k} \quad (7.103)$$

a jego graficzna postać została pokazana na rys.7.26.



Rys.7.26. Operator explicite dla równania parabolicznego

W kolejnych krokach czasowych musimy obliczyć wartości $u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}$ i u_{12} .

Dla czasu $t = \Delta t$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_5 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{4}u_3 = \frac{1}{4}100 + \frac{1}{2}36 + \frac{1}{4}4 = 44 \\ u_6 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{4}u_3 = \frac{1}{4}36 + \frac{1}{2}4 + \frac{1}{4}4 = 12 \end{aligned} \quad (7.104)$$

Dla czasu $t = 2 \cdot \Delta t$ mamy

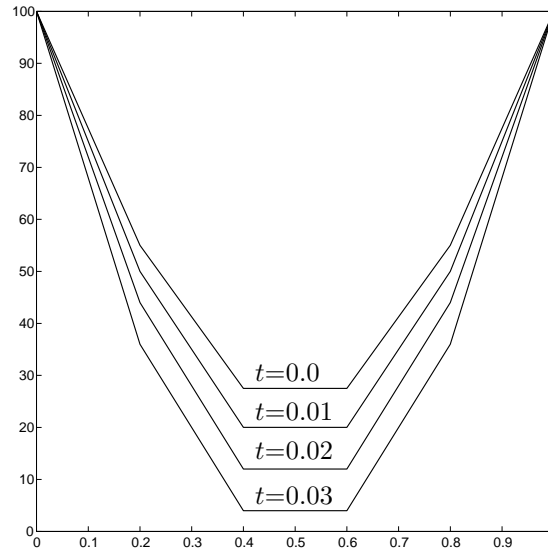
$$\begin{aligned} u_8 &= \frac{1}{4}u_4 + \frac{1}{2}u_5 + \frac{1}{4}u_6 = \frac{1}{4}100 + \frac{1}{2}44 + \frac{1}{4}12 = 50 \\ u_9 &= \frac{1}{4}u_5 + \frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{4}u_7 = \frac{1}{4}44 + \frac{1}{2}12 + \frac{1}{4}12 = 20 \end{aligned} \quad (7.105)$$

Dla czasu $t = 3 \cdot \Delta t$ wzór na nieznane wartości funkcji jest następujący:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{4}u_7 + \frac{1}{2}u_8 + \frac{1}{4}u_9 = \frac{1}{4}100 + \frac{1}{2}50 + \frac{1}{4}20 = 55 \\ u_{12} &= \frac{1}{4}u_8 + \frac{1}{2}u_9 + \frac{1}{4}u_{10} = \frac{1}{4}50 + \frac{1}{2}20 + \frac{1}{4}20 = 27.5 \end{aligned} \quad (7.106)$$

Rozwiązanie powyższe zilustrowano na rys.7.27.

Schemat jawny, rozwiązania dla czasu: 0.0, 0.01, 0.02, 0.03



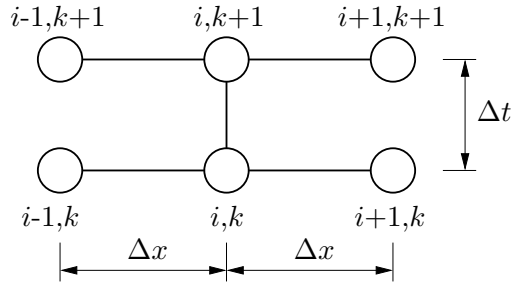
Rys.7.27. Przebiegi rozwiązania dla kolejnych warstw czasowych

Obecnie przedstawimy dyskretyzację równania parabolicznego za pomocą niejawnego schematu Cranka-Nicolsona. Jest to schemat bezwarunkowo stabilny. Długość kroku czasowego nie zależy od odległości między węzłami w przestrzeni, a jedynie wpływa na dokładność obliczeń. Aby otrzymać wynik, należy rozwiązać układ równań, w którym niewiadomymi są nieznane wartości funkcji na kolejnej warstwie czasowej.

Problem formułujemy dla równania (7.86), które przepiszemy

$$\alpha u_{xx} = u_t \quad (7.107)$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi (7.87) i warunkiem początkowym (7.88).



Rys.7.28. Schemat dyskretyzacyjny Cranka-Nicolsona

Schemat dyskretyzacyjny składa się z dwóch warstw węzłów – rys.7.28

Drugą pochodną przestrzenną zapisujemy jako średnią dla dwóch warstw t i $t + \Delta t$, oznaczonych odpowiednio literami k i $k + 1$

$$u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i-1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{\Delta x^2} \right) \quad (7.108)$$

Pierwszą pochodną czasową przestawiamy jako schemat różnicowy w przód

$$u_t = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (7.109)$$

Wstawiając (7.108) i (7.88) do równania (7.107), mamy

$$\alpha \frac{\frac{1}{2}u_{i-1,k+1} - u_{i,k+1} + \frac{1}{2}u_{i+1,k+1}}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\frac{1}{2}u_{i-1,k} - u_{i,k} + \frac{1}{2}u_{i+1,k}}{\Delta x^2} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (7.110)$$

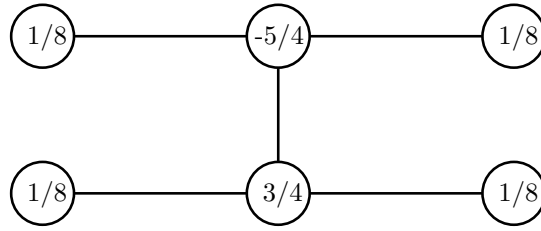
Dzieląc powyższe równanie przez Δt oraz przegrupowując równanie (nie wiadome przeliczamy na lewą stronę równania) i zakładając $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$, mamy

$$\frac{1}{2}\lambda u_{i-1,k+1} - (\lambda + 1)u_{i,k+1} + \frac{1}{2}\lambda u_{i+1,k+1} = -\frac{1}{2}\lambda u_{i-1,k} + (\lambda - 1)u_{i,k} - \frac{1}{2}\lambda u_{i+1,k} \quad (7.111)$$

Zmieniając znaki, otrzymujemy

$$-\frac{1}{2}\lambda u_{i-1,k+1} + (\lambda + 1)u_{i,k+1} - \frac{1}{2}\lambda u_{i+1,k+1} = \frac{1}{2}\lambda u_{i-1,k} + (1 - \lambda)u_{i,k} + \frac{1}{2}\lambda u_{i+1,k} \quad (7.112)$$

Wstawiając jak poprzednio $\lambda = \frac{1}{4}$ i $\alpha = 1$, otrzymujemy schemat Cranka-Nicolsona dla równania (7.107) o postaci (zob. rys.7.29)



Rys.7.29. Schemat dyskretyzacyjny Cranka-Nicolsona

$$-\frac{1}{8}u_{i-1,k+1} + \frac{5}{4}u_{i,k+1} - \frac{1}{8}u_{i+1,k+1} = \frac{1}{8}u_{i-1,k} + \frac{3}{4}u_{i,k} + \frac{1}{8}u_{i+1,k} \quad (7.113)$$

Dla warstwy czasowej $t = \Delta t$ mamy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}100 + \frac{5}{4}u_5 - \frac{1}{8}u_6 &= \frac{1}{8}100 + \frac{3}{4}36 + \frac{1}{8}4 \\ -\frac{1}{8}u_5 + \frac{5}{4}u_6 - \frac{1}{8}u_6 &= \frac{1}{8}36 + \frac{3}{4}4 + \frac{1}{8}4 \end{aligned} \quad (7.114)$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy rozwiązanie dla warstwy czasowej $t = \Delta t$. Rozwiązanie dla czterech warstw czasowych przedstawia rys.7.30.

7.5.6. Rozwiązanie równań hiperbolicznych za pomocą MRS

Obecnie pokażemy rozwiązanie problemu sformułowanego za pomocą równania hiperbolicznego. Rozważamy problem zdefiniowany za pomocą równania, które może być modelem matematycznym problemu drgań sprężystej struny

$$\alpha u_{xx} = \beta u_{tt} \quad (7.115)$$

z warunkami brzegowymi

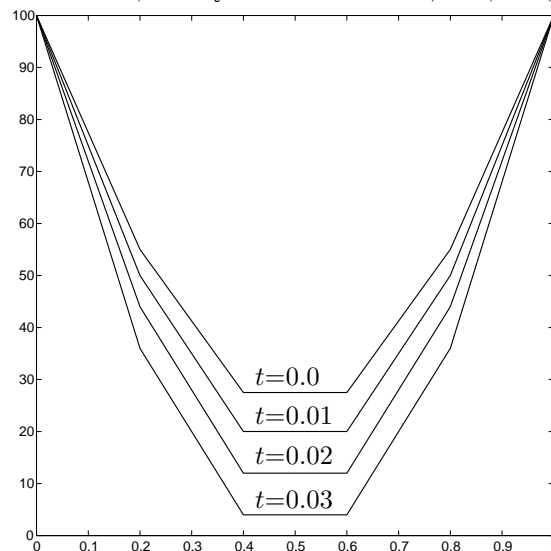
$$u(a, t) = u_a(t), \quad u(b, t) = u_b(t) \quad (7.116)$$

i warunkami początkowymi

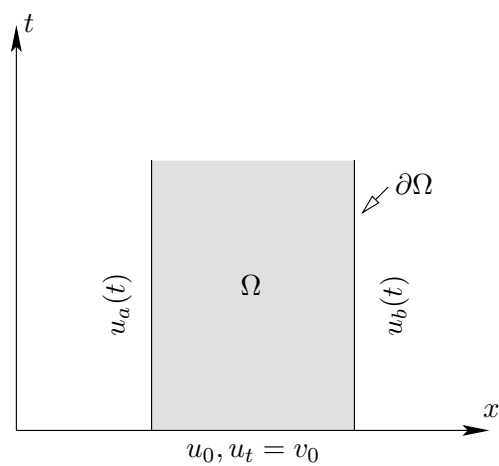
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x) \quad (7.117)$$

gdzie $t \geq 0$ oraz $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, rys.7.31.

Crank-Nicholson, rozwiązania dla czasu: 0.0, 0.01, 0.02, 0.03

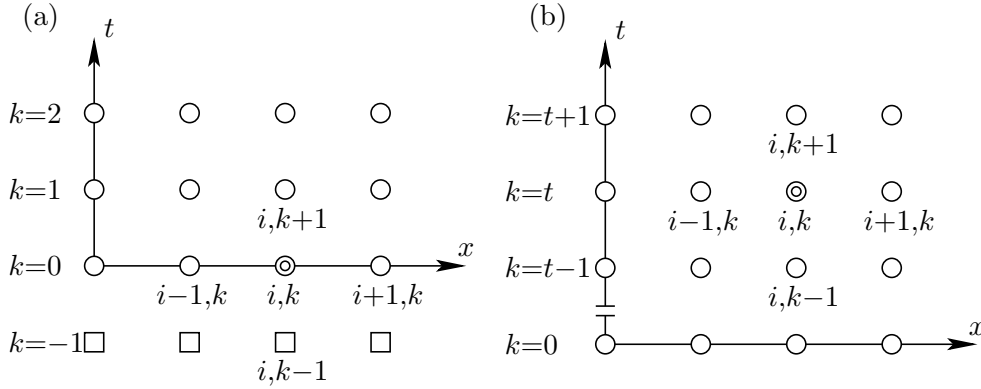


Rys.7.30. Rozwiązanie dla schematu dyskretyzacyjnego Cranka-Nicolsona

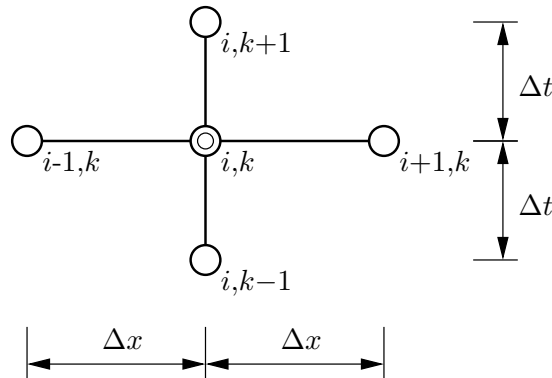


Rys.7.31. Obszar i warunki brzegowe dla równania hiperbolicznego

Dyskretyzację problemu opisanego równaniami (7.115)–(7.117) za pomocą MRS dokonuje się, przyjmując pewną siatkę węzłów, rys.7.32 – dyskretyzujemy zarówno przestrzeń, jak i czas za pomocą jawnego schematu całkowania, rys.7.33.



Rys.7.32. Siatka punktów do całkowania po czasie; dla warstwy czasowej $k = 0$ (a), dla warstwy czasowej $k > 0$ (b)



Rys.7.33. Schemat jawny (explicite) całkowania po czasie

Zastępując drugie pochodne względem x oraz względem t wzorami różnicowymi, równanie (7.117) dla warstwy czasowej k (dla $k > 0$), rys.7.32b, można zapisać następująco:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} = \beta \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta t^2} \quad (7.118)$$

Dzieląc powyższe równanie przez czynnik $\frac{\Delta t^2}{\beta}$, oznaczając przez $\lambda = \frac{\Delta t^2}{\beta \Delta x^2}$ (warunek $\lambda \leq 1$ jest warunkiem stabilności), otrzymujemy

$$u_{i,k+1} = \lambda(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) + 2u_{i,k} - u_{i,k-1} \quad (7.119)$$

Taki schemat jest ważny dla typowego kroku czasowego $k \geq 1$. Dla warstwy czasowej $k = 0$ ($t = t_0 = 0$) mamy nieokreśloną wartość $u_{i,k-1} = u_{i,-1}$ (węzły na warstwie czasowej t_{-1}). Wartość tę wyznaczamy z drugiego warunku początkowego (7.117)₂ na wartość pierwszej pochodnej poszukiwanej funkcji u względem czasu. Warunek ten dyskretyzujemy, stosując schemat różnicowy centralny. Dla warstwy czasowej $k = 0$ i węzła i mamy

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,-1}}{2\Delta t} = v_{0i} \quad (7.120)$$

skąd

$$u_{i,-1} = -v_{0i}2\Delta t + u_{i,k+1} \quad (7.121)$$

Aby „wystartować” z obliczeniami dla czasu $t = 0$ (czyli $k=0$), przekształcamy schemat (7.119), otrzymując

$$u_{i,k+1} = \lambda(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) + 2u_{i,k} + v_{0i}2\Delta t - u_{i,k+1} \quad (7.122)$$

Przenosząc nieznaną wartość $u_{i,k+1}$ na lewą stronę równania, otrzymujemy schemat dla warstwy czasowej $k = 0$

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{2} [\lambda(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) + 2u_{i,k} + v_{0i}2\Delta t] \quad (7.123)$$

W przypadku $v_{0i} = 0$ schemat dodatkowo się upraszcza.

Jako przykład rozwiążemy problem początkowo brzegowy

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u = u(x, t) \quad (7.124)$$

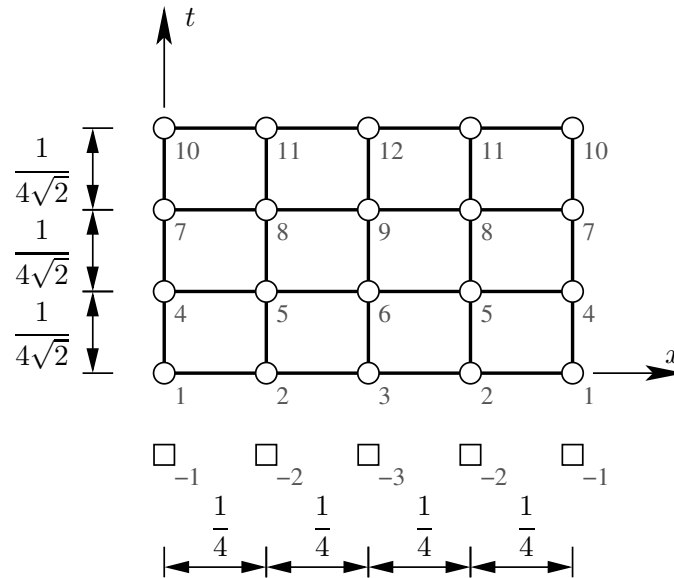
z warunkami brzegowymi na brzegach $x = 0$, i $x = 1$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 1 \quad (7.125)$$

oraz warunkami początkowymi dla $t=0$

$$u(x, 0) = \cos 2\pi x \quad \text{oraz} \quad v(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad (7.126)$$

Rozwiązanie ma oś symetrii względem punktu $x = 0.5$, rys.7.34.



Rys.7.34. Dyskretyzacja zagadnienia w przestrzeni i czasie – siatka punktów

Dyskretyzacja problemu (7.124)–(7.126) jest następująca: Przyjmujemy następujące wartości przyrótów współrzędnych $\Delta x = \frac{1}{4}$, $\Delta t = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, skąd $\lambda = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} < \lambda_{\text{kryt}} = 1$. Z warunku początkowego na funkcję wynika, że $u_1 = 1, u_2 = \cos 2\pi\frac{1}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0, u_3 = \cos \pi = 0, u_4 = \cos \frac{3\pi}{2}, u_5 = 1$. Z warunku brzegowego (7.125) można wywnioskować, że $u_4 = u_7 = u_{10} = u_1 = 1$. Z warunku początkowego (7.117)₂ dla punktów 2 i 3 wynika, że

$$\frac{u_5 - u_{-2}}{2\Delta t} = 0 \rightarrow u_{-2} = u_5 \quad (7.127)$$

oraz

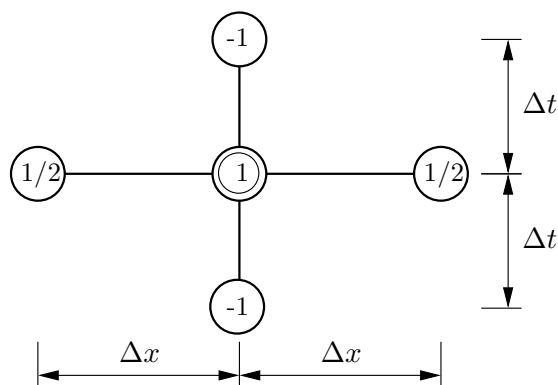
$$\frac{u_6 - u_{-3}}{2\Delta t} = 0 \rightarrow u_{-3} = u_6 \quad (7.128)$$

Schemat (7.119) przybiera po przyjęciu powyższych danych postać analityczną

$$\frac{1}{2}u_{i+1,k} + u_{i,k} + \frac{1}{2}u_{i-1,k} - u_{i,k-1} - u_{i,k+1} = 0 \quad (7.129)$$

zaś graficzną pokazaną rys.7.35.

W kolejnych krokach czasowych musimy obliczyć wartości $u_5, u_6, u_8, u_9, u_{11}$, i u_{12} .



Rys.7.35. Schemat jawny (explicite) całkowania po czasie

Dla czasu $t = 0$, wykorzystując równanie (7.122) (zob. rys.7.32a), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 u_5 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_1 - 2u_2 + u_3) + 2u_2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + 0 - 1) + 0 \right] = 0 \\
 u_6 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_1 - 2u_2 + u_3) + 2u_3 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(0 + 2 + 0) - 2 \right] = -\frac{1}{2} \quad (7.130)
 \end{aligned}$$

Dla czasu $t = \Delta t$, wykorzystując relację (7.129), mamy (zob. rys. 7.32b)

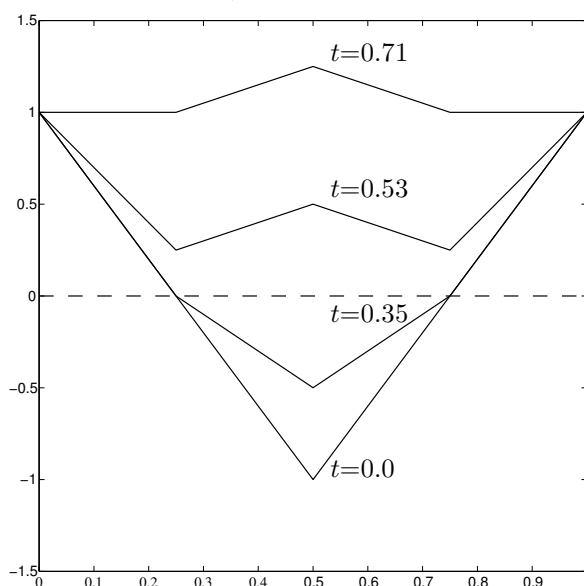
$$\begin{aligned}
 u_8 &= \frac{1}{2}(u_4 - 2u_5 + u_6) + 2u_5 - u_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + 0 + 0 = \frac{1}{4} \\
 u_9 &= \frac{1}{2}(u_5 - 2u_6 + u_5) + 2u_6 - u_3 = \frac{1}{2} \left(0 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 1 = \frac{1}{2} \quad (7.131)
 \end{aligned}$$

Dla czasu $t = 2 \cdot \Delta t$ wzór na nieznanne wartości funkcji jest następujący:

$$\begin{aligned}
 u_{10} &= \frac{1}{2}(u_7 - 2u_8 + u_9) + 2u_8 - u_5 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + 0.5 \right) + \frac{1}{2} - 0 = 1 \\
 u_{11} &= \frac{1}{2}(u_8 - 2u_9 + u_8) + 2u_9 - u_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} \right) + 2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.25 \quad (7.132)
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie powyższe zilustrowano na rys.7.36.

Schemat jawny, rozwiązania dla czasu: 0.0, 0.35, 0.53, 0.71



Rys.7.36. Przebiegi rozwiązania dla kolejnych warstw czasowych

7.5.7. Zalety i wady klasycznej MRS

Klasyczna MRS ma cały szereg zalet, które – w ogromnym skrócie – można określić następująco:

- łatwa interpretacja modelu dyskretnego MRS oraz duża skuteczność w przypadku regularnego obszaru (prostokąt, koło, elipsa, wycinek kołowy, wycinek elipsy, pierścień etc.) oraz regularnej (prostokątnej, quasi-prostokątnej, trójkątnej – komórkowej) siatki węzłów. Wówczas występuje duża łatwość generacji siatki (generacji gwiazd), schematów i równań różnicowych. Ponadto wygenerowany schemat różnicowy jest (na ogół) jednakowy dla wszystkich węzłów wewnętrznych. Nie bez znaczenia pozostaje również prostota całkowania numerycznego, oznaczająca prosty „przydział powierzchni” poszczególnym węzłom siatki (wzór prostokątów). Jest to szczególnie ważne w sformułowaniu globalnym MRS, jak i w zagadnieniach niejednorodnych, w sformułowaniu lokalnym tej metody;

- bardzo dobrze opracowane podstawy teoretyczne MRS przy regularnych siatkach węzłów;
- fakt istnienia lokalnego sformułowania MRS, co zasadniczo różni tę metodę od MES czy MEB i pozwala, w wielu przypadkach, posługiwać się tylko oryginalnym, lokalnym sformułowaniem problemu, bez konieczności konstruowania podejścia wariacyjnego.

Mankamenty klasycznej MRS, które w bardzo poważnym stopniu ograniczają obszar jej zastosowań, to:

- trudność w zastosowaniu jej w obszarach o dowolnym, nieregularnym kształcie, zwłaszcza gdy brzeg obszaru jest krzywoliniowy; dyskretyzacja warunków brzegowych napotyka wówczas spore trudności. Na rys.7.37 pokazano dwie sytuacje, które wymagają indywidualnego potraktowania;
- brak możliwości lokalnego zagęszczania siatki, celem uzyskania możliwie najlepszego rozwiązania, przy najmniejszej liczbie stopni swobody;
- trudność w łączeniu obszarów o różnych wymiarach, np. belki (1D) z płytą (2D), belki(1D) i płyty(2D) z fundamentem (3D)– mechanika konstrukcji dostarcza tu ogromnej liczby tego typu przykładów złożonych zagadnień brzegowych;
- trudność w uwzględnianiu *niejednorodności* typu matematycznego (różne sformułowania matematyczne w podobszarach), czy fizycznego (różny materiał w podobszarach) oraz obciążeń typu *skupionego*, przyłożonych w dowolnych punktach obszaru.

Wady te zostały usunięte w sformułowaniu UMRS poprzez przyjęcie dowolnie nieregularnych siatek węzłów oraz nadmiarowych węzłów przy generacji uogólnionych wzorów (operatorów) różnicowych. Używając nadmiarowych węzłów, poprawia się współczynniki aproksymacji oraz zmniejsza resztę szeregu Taylora. Trzeba jednak pamiętać, że nadmiarowe węzły, w przypadku siatki regularnej, nie poprawiają dokładności; operator klasyczny jest na ogół nieco dokładniejszy niż uogólniony. Jednakże obydwa operatory, tj. klasyczny i uogólniony, mają – co jest najważniejsze – ten sam rząd zbieżności dla siatki regularnej. W przypadku siatki nieregularnej operator klasyczny traci bardzo

równań – jednokrotne różniczkowanie układu równań względem niewiadomych funkcji i ich pochodnych.

Obecnie rozszerzymy i skomentujemy podstawowe etapy dyskretyzacji zagadnienia brzegowego za pomocą UMRS, którymi są:

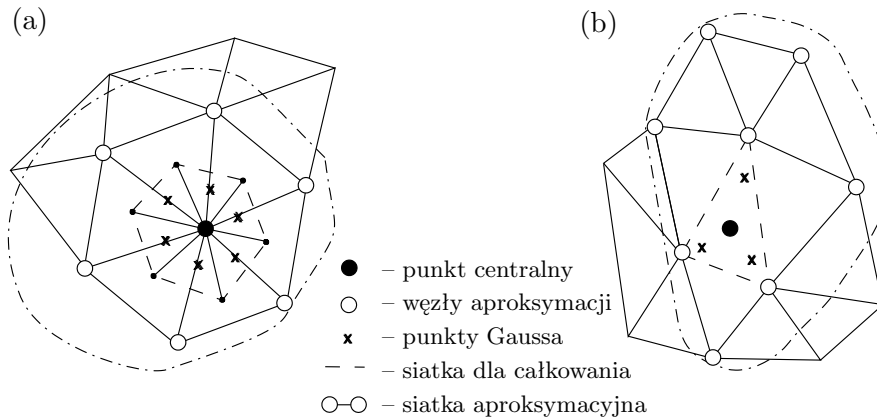
1. Definicja zagadnienia oraz wybór sformułowania dyskretnego (lokalne, lub wariacyjne).

2. Konstrukcja siatki aproksymacyjnej. Generacja siatki węzłów we wnętrzu i na brzegu obszaru oraz węzłów zewnętrznych – strefa przybrzeżna na zewnątrz obszaru. Generacja węzłów we wnętrzu zależy od narzuconej funkcji ich gęstości: albo *a priori*, albo *a posteriori* po wykonaniu obliczeń i oszacowaniu błędów *a posteriori*. Jeśli znane są: regularność rozwiązania i rząd zbieżności metody oraz zastosowany estymator błędu jest skuteczny, można bardzo precyzyjnie zaprognozować rozkład węzłów. Sam dobór węzłów do gwiazd jest już sprawą prostszą. Można tu wyróżnić następujące warianty:

- jedna gwiazda rozpięta nad elementem całkowania – punkt odniesienia dla gwiazdy (punkt, względem którego dobierana jest konfiguracja gwiazdy) w środku ciężkości elementu,
- kilka gwiazd rozpiętych nad elementem – punkty odniesienia w punktach Gaussa lub w węzłach elementu całkowania.

3. Konstrukcja siatki do całkowania. Wybór typu siatki zależy od przyjętego sposobu całkowania:

- a) siatka do całkowania, niezależna od siatki aproksymacyjnej, może być skonstruowana tak jak typowa siatka MES. Obszar jest podzielony na proste elementy geometryczne, których węzły są na ogół niezależne od węzłów aproksymacji. Jedynym wymaganiem tutaj jest, by można było dostatecznie dokładnie wykonać całkowanie. W strefach, gdzie występuje silna koncentracja węzłów aproksymacji, elementy całkowania powinny być mniejsze, aczkolwiek jeśli ten warunek nie jest spełniony, podnosi się rząd kwadratury całkowania;
- b) siatka do całkowania, zależna od węzłów aproksymacji, umożliwia przeprowadzenie całkowania na dwa sposoby, które określa się jako (rys.7.38a):

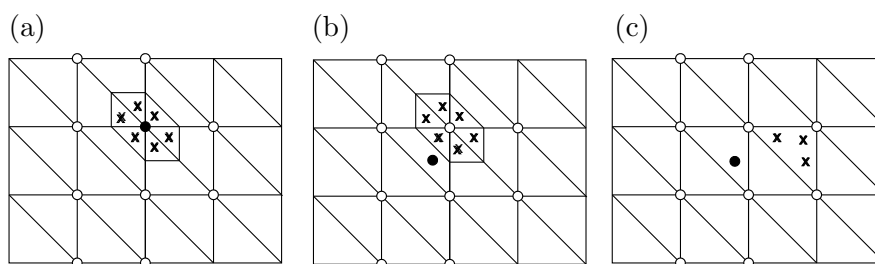


Rys.7.38. Całkowanie typu Gaussa w MRS: dookoła węzłów (a), między węzłami (b)

- (i) całkowanie dookoła węzłów – podział obszaru na podobszary przypisane węzłom, np. przez konstrukcję tzw. wielokątów Voronoi, ewentualnie rozbić tego obszaru na proste elementy geometryczne: trójkąt, czworokąt, rys.7.38a, służące później do całkowania kwadratami Gaussa,
- (ii) całkowanie między węzłami, opierające się wygenerowanych wcześniej elementach definiowanych za pomocą siatki aproksymacyjnej, rys.7.38b.

4. Definicja algorytmicznej struktury UMRS. Na tym etapie należy rozważyć:

- a) sposób rozpięcia aproksymacji UMRS, a więc jakie punkty mają przypisaną gwiazdę (obszar aproksymacji), określenie wpływu danej gwiazdy (definicja wagi), definicję rodzaju i liczby stopni swobody w węźle;
- b) selekcję węzłów do gwiazd (precyzyjna definicja obszarów aproksymacji), klasyfikację gwiazd zarówno z punktu widzenia geometrycznego (gwiazdy we wnętrzu, na brzegu wypukłym, wklęsłym, gwiazdy jednostronne – wędrujący brzeg etc.), jak i aproksymacyjnego (stabilność lub niestabilność generowanego przez gwiazdę schematu aproksymacyjnego);
- c) określenie rozkładu obciążeń i warunków brzegowych, sprawdzenie konsystentności modelu numerycznego, a więc czy jest prawidłowa liczba



Rys.7.39. Rozpięcie aproksymacji w środku ciężkości elementu całkowania (a) lub w środku ciężkości gwiazdy (b) i (c)

podparć oraz czy liczba węzłów w gwiazdach jest wystarczająca (w stosunku do założonego stopnia aproksymacji). Ponadto należy zagwarantować, żeby każdy węzeł obszaru należał chociaż do jednej gwiazdy, a dwa lub więcej węzłów nie zajmowało tej samej pozycji etc.;

- d) wybranie metody rozwiązania układu równań liniowych oraz sposobu agregacji współczynników układu równań, określenie profilu macierzy globalnej, szerokości frontu etc.

5. Generacja schematów różnicowych dla poszczególnych pochodnych lub kompletu pochodnych (dla całego operatora określonego rzędu). W przypadku silnej niestabilności aproksymacji (wyznacznik układu WRNK bliski zeru) do-generowanie punktów, ewentualnie powiększenie obszaru wpływu węzłów lub obniżenie stopnia aproksymacji – ponowna generacja wzorów aproksymacyjnych. Istnieje kilka sposobów rozpięcia aproksymacji:

- W każdym żądanym punkcie, np. w węźle aproksymacji, punkcie Gaussa etc.;
- W środku ciężkości elementu całkowania, rys.7.39a, lub w punkcie centralnym lokalnego obszaru całkowania, a następnie rozszerzenie aproksymacji na cały żądany obszar, wykorzystując gotowy już wielomian, będący kombinacją współczynników aproksymacji i funkcji bazowych.
- W środku ciężkości gwiazdy, w pozostałych punktach jak wyżej, rys.7.39b,c.

6. Generacja równań różnicowych we wnętrzu oraz na brzegu obszaru (w tym również dyskretyzacja warunków brzegowych) dla:

- a) wersji lokalnej,
- b) wersji wariacyjnej – całkowanie numeryczne i agregacja układu równań. Narzucenie warunków brzegowych jest również elementem kompletowania układu równań metody. Można je spełnić następująco:
 - na etapie globalnego układu równań (tak jak w MES); warunki brzegowe na ogół nie są tu spełnione w sposób ścisły – zależnie od generacji wzorów różnicowych. Istnieje możliwość wprowadzenia do globalnego układu równań dodatkowych równań wynikających z dyskretyzacji warunków brzegowych z ewentualnym wykorzystaniem węzłów zewnętrznych;
 - przez wprowadzenie mnożników Lagrange’a lub funkcji kary;
 - przez ścisłe spełnienie warunków brzegowych w czasie generacji wzorów różnicowych (wymuszenie dodatkowego warunku na wzorach różnicowych);
 - przez wprowadzenie dodatkowych stopni swobody (np. pochodnej normalnej na brzegu);
 - przez połączenie MES i MRS – wariacyjnej, tzn. wykorzystanie interpolacyjnych własności funkcji kształtu MES.

7. Rozwiązanie liniowego (lub nieliniowego) układu równań o strukturze pasmowej symetrycznej lub niesymetrycznej (wersja wariacyjna), rozproszonej (rzadkiej) – wersja lokalna lub mieszanej pasmowo-rozproszonej (MRS-wa lub MRS-wa/MRS-lok). W przypadku gdy problem jest nieliniowy, z reguły staje się konieczny powrót do punktu 5 z nowym rozwiązaniem startowym. Jest to oczywiście zależne od typu algorytmu rozwiązującego.

8. Postprocessing oraz analiza błędów *a posteriori*. Elementami tego etapu są:

- a) obliczanie wielkości pierwotnych i wtórnych – postprocessing,
- b) analiza błędów *a posteriori* – obliczanie błędów rozwiązania oraz szacowanie nowego rozkładu gęstości siatki, spełniającego z góry zadane warunki,

- c) wizualizacja wyników oraz synteza zagadnienia.

9. Ponowna generacja siatki, opierająca się na oszacowanym błędzie rozwiązania oraz przyjętej strategii wyznaczania gęstości węzłów siatki. Siatka taka musi być konsystentna z punktu widzenia matematycznego (spełnienie równań matematycznych problemu) oraz fizycznego (spełnienie równań fizycznych problemu), co wymaga transformacji rozwiązania między siatkami. Następuje powrót do obliczeń, w szczególnych przypadkach nawet do punktu 1 (np. w „biegu” zmiana sformułowania). Na rys.7.40 przedstawiono schemat blokowy algorytmu UMRS.

W dalszym ciągu odniesiemy się do wszystkich punktów, ale na pierwszy plan zostaną wysunięte wszystkie problemy związane z generacją wzorów aproksymacyjnych oraz dyskretyzacją zagadnień brzegowych celem udostępnienia Czytelnikowi wiedzy pozwalającej na samodzielny rozwój metody⁸. Z uwagi na to, że generacja siatki węzłów aproksymacyjnych jest zagadnieniem ważnym zostanie omówiona w następnym punkcie.

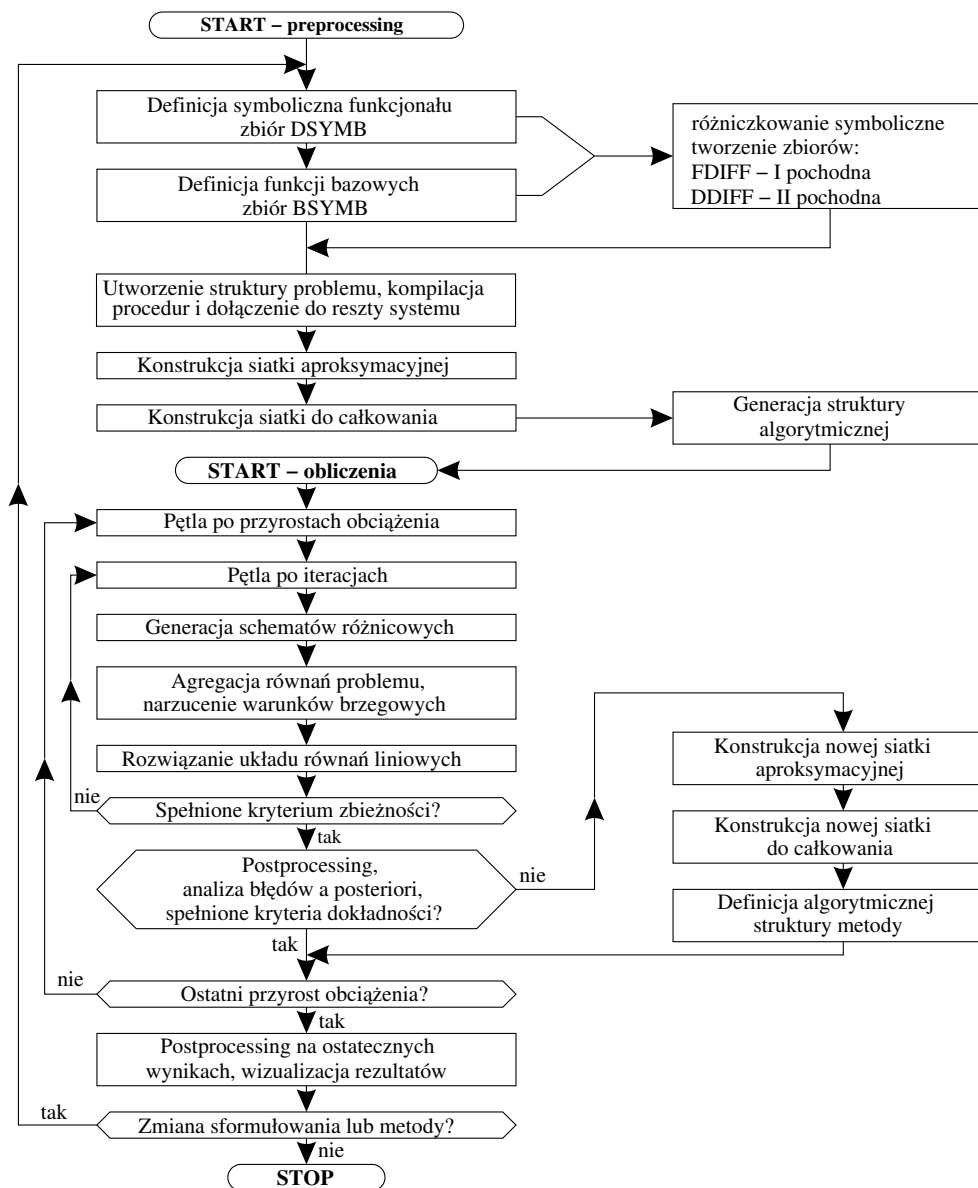
7.6.2. Generacja siatek węzłów aproksymacyjnych

Podstawowym założeniem przy generacji siatek węzłów jest to, że siatki: aproksymacyjna i do całkowania mogą być tworzone niezależnie. Jest to sytuacja zasadniczo odbiegająca od tego, co zwykle spotyka się w MES.

Obecnie skomentujemy sposoby generacji dowolnie nieregularnej siatki węzłów w metodach bezsiatkowych. Dowolnie nieregularna siatka pozwala na: bardziej elastyczne, niż w przypadku siatki regularnej, dopasowanie położenia węzłów do dowolnego kształtu obszaru, zagęszczenie siatki w strefie, gdzie można spodziewać się dużych gradientów poszukiwanej funkcji oraz na łatwiejsze narzucenie warunków brzegowych, z uwagi na większą możliwość lepszego wyboru punktów zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz obszaru, tam gdzie one są istotnie potrzebne.

Pod pojęciem dowolnie nieregularnej siatki węzłów będziemy rozumieć siatki na płaszczyźnie, na powierzchni i w przestrzeni o gęstości i konfiguracji węzłów zupełnie dowolnej, ograniczonej jedynie zasadniczym wymaganiem, jakie narzuca się siatce węzłów w każdej metodzie dyskretnej, tzn. wymaganiem możliwie gładkiego przejścia od strefy o dużej gęstości węzłów do strefy

⁸W Politechnice Krakowskiej funkcjonuje system NAFDEM, w którym zrealizowano omówione tutaj koncepcje.



Rys.7.40. Schemat blokowy algorytmu UMRS

o małej gęstości węzłów. Taka siatka gwarantuje m.in. poprawność i stabilność schematów aproksymacyjnych oraz możliwość uwzględnienia dużych gradient-

tów poszukiwanego rozwiązania.

W ostatnich kilkunastu latach powstało kilka programów pozwalających automatycznie generować siatkę. Jednakże z uwagi na intensywny rozwój metod bezsiatkowych używa się głównie generatorów siatek, które powstały dla potrzeb MES. Zmiana typu aproksymacji w metodach bezsiatkowych spowodowała, że wykorzystanie generatorów siatek MES w tych metodach jest możliwe.

Jednym ze sposobów generacji siatki węzłów, zarówno w MES, jak i w metodach bezsiatkowych, jest generowanie zbioru węzłów z określoną gęstością, a następnie triangularyzacja siatki poprzez połączenie węzłów w możliwie najlepsze trójkąty. Trójkąty te powinny być w miarę możliwości ostrokątne. Możliwości tutaj jest bardzo wiele. Optymalny podział zapewnia konstrukcja wielokątów Voronoi. Podobny wynik można uzyskać przez konstrukcję wstępnej siatki trójkątów, która następnie podlega optymalizacji poprzez przesuwanie węzłów do środka ciężkości otoczeń. Taki proces wykonany wielokrotnie powoduje jednak rozpełzywanie stref koncentracji węzłów na cały obszar, co jest oczywiście niekorzystne – potrzebny jest tu więc pewien kompromis.

Innym podejściem będzie najpierw generacja siatki węzłów do całkowania, z reguły czworokątnej, natomiast siatka aproksymacyjna będzie tworzona niezależnie, a także niekiedy modyfikowana w trakcie obliczeń. Dlatego sprawą zasadniczą staje się dobór gwiazdy węzłów aproksymacji do danego punktu centralnego (obliczeniowego), gdyż decyduje on o jakości aproksymacji.

7.6.3. Kryteria selekcji gwiazd

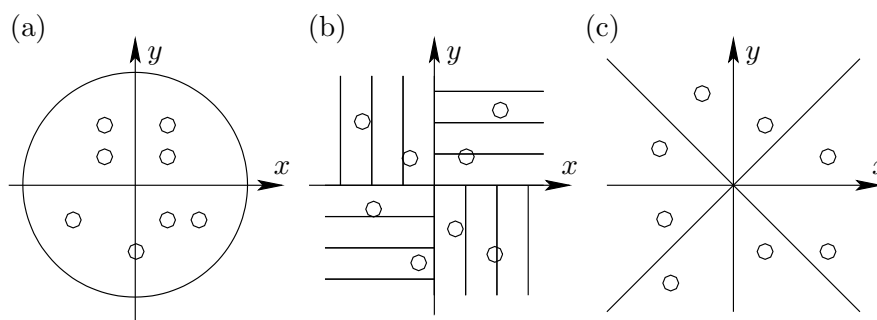
Omawiając kryteria selekcji gwiazd należy zauważyć, że dla najczęściej używanej aproksymacji drugiego stopnia (6 współczynników) w gwieździe powinno być minimum 6 węzłów, ale raczej nie więcej niż 10. Jeżeli w punkcie, względem którego dobierana jest gwiazda, istnieje węzeł, to najlepsza z nich będzie zawierać 9 węzłów, bo umożliwi to skonfigurowanie gwiazdy o symetrycznie rozmieszczonych węzłach. Jeżeli punkt centralny gwiazdy nie jest węzłem, to optymalna liczba jej węzłów wynosi 8, w każdej ćwiartce układu – 2 węzły.

Kryteria selekcji gwiazd różnią się w zależności od typu siatki do całkowania. W przypadku siatki do całkowania niezależnej od siatki aproksymacyjnej możemy wyróżnić następujące kryteria selekcji gwiazd, rys.7.41.

1. Kryterium odległości, biorące pod uwagę nośnik czworokątny, kołowy lub eliptyczny, rys.7.41a. Do gwiazdy należą tylko węzły leżące wewnątrz ob-

szaru określonego przez nośnik. Poważną wadą tej koncepcji jest to, że gwiazda może mieć silnie niesymetryczny rozkład węzłów, dający niestabilny lub osobliwy schemat aproksymacyjny.

2. Kryterium krzyża, rys.7.41b. Jest to proste i bardzo skuteczne kryterium, w którym obszar został podzielony na 4 strefy. Do każdej strefy należy inna ćwiartka układu współrzędnych wraz z jedną półosią układu współrzędnych (co zaznaczono kreskami na rys.7.41b). Jest to kryterium odległościowo-topologiczne, bowiem nie tylko odległość decyduje o włączeniu węzła do gwiazdy, lecz również przynależność do określonej ćwiartki układu współrzędnych. W każdej ćwiartce dobiera się określoną liczbę węzłów najbliższych tej półosi układu współrzędnych, która została dołączona do danej ćwiartki. Dla lokalnej MRS (lub wariacyjnej MRS z całkowaniem dookoła węzłów) dobiera się zwykle 2 węzły do gwiazdy w każdej ćwiartce układu współrzędnych. Jeżeli 9 węzeł jest węzłem centralnym, tzn. właśnie względem niego następuje selekcja węzłów gwiazdy, prezentowane kryterium jest bardzo skuteczne przy minimalnej liczbie węzłów dobieranych do gwiazdy. Brak węzła w jej środku istotnie obniża zalety kryterium krzyża.
3. Kryterium przynależności sektorowej Perrone-Kao, rys.7.41c. Płaszczyzna jest podzielona na 8 sektorów. W każdym sektorze wybiera się jeden węzeł. Kryterium to daje dość zrównoważoną konfiguracyjnie gwiazdę, ale niekiedy nie można w pewnych sektorach dobrać węzła, np. w pobliżu brzegu.

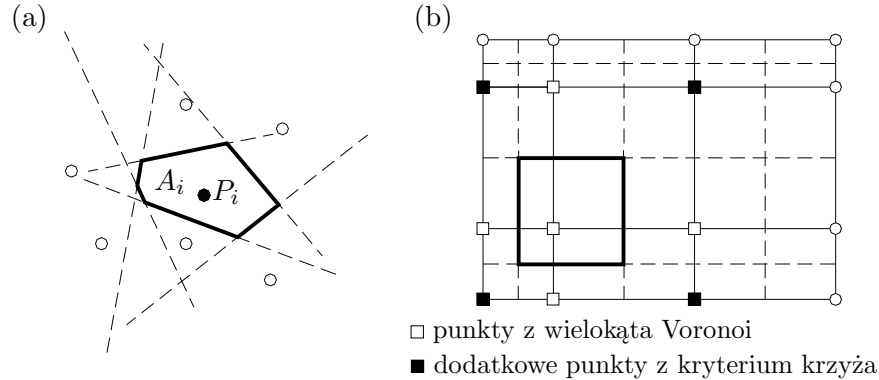


Rys.7.41. Kryteria selekcji gwiazd: kryterium odległości (a), kryterium krzyża (b), kryterium przynależności sektorowej (c)

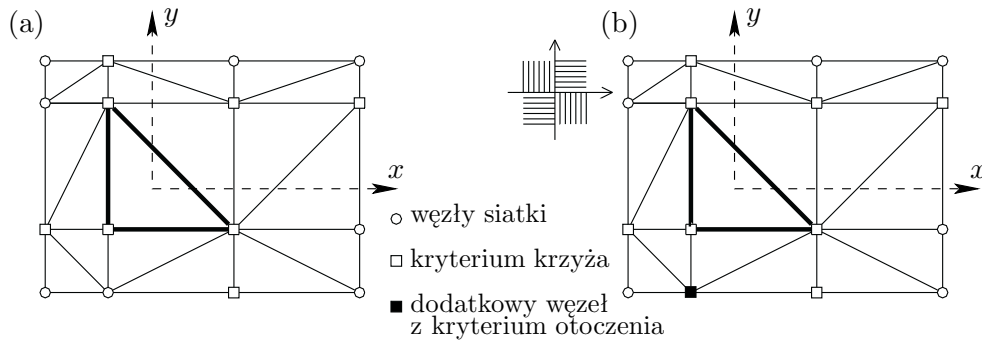
W przypadku siatki do całkowania zależnej od siatki aproksymacyjnej, oprócz poprzednio wymienionych kryteriów selekcji gwiazd, możemy wyróżnić jeszcze następujące, (rys.7.42–7.44):

1. Kryterium łączone Voronoi+kryterium krzyża, rys.7.42. Na rys.7.42 pokazano zasadę konstrukcji wielokąta Voronoi. Pomiedzy punktem A_i a sąsiednimi punktami prowadzone są odcinki. Symetralne tych odcinków *odcinają* z płaszczyzny pewien obszar wypukły wokół węzła P_i . Węzły, które sąsiadują z węzłem P_i poprzez wspólny bok (tzw. silny sąsiad) lub wierzchołek wielokąta Voronoi (tzw. słaby sąsiad), należą do otoczenia Voronoi węzła P_i . Łatwo zauważyć, że gwiazdy zbudowane na węzłach z otoczenia Voronoi będą zawierały różną liczbę węzłów, co może uniemożliwić zbudowanie aproksymacji lub prowadzić do niestabilności wzorów aproksymacyjnych. Dlatego też na rys.7.42b 5-węzłową gwiazdę z otoczenia Voronoi (silnych sąsiadów) uzupełniono 4 węzłami z kryterium krzyża, wyszukując w każdej ćwiartce węzeł leżący najbliżej danej półosi układu współrzędnych. To samo można zastosować dla siatki trójkątnej.
2. Kryterium krzyża + kryterium otoczenia – silni sąsiedzi elementu całkowania, rys.7.43. Jest to kryterium bardzo pomocne w przypadku gdy mamy gotową siatkę trójkątną. Wtedy punktami pewnymi są tzw. punkty silnie związane z danym trójkątem (połączone dwoma krawędziami). Pozostałe węzły uzupełnia się z kryterium krzyża tak, aby w każdej ćwiartce układu znajdowały się 2 węzły.
3. Kryterium sąsiadów; jest to kryterium topologiczne, rys.7.44:
 - a) pierwsze otoczenie węzłów elementu,
 - b) pierwsze otoczenie węzłów elementu uzupełnione o pierwsze otoczenia węzłów silnie związanych z elementem (dla III rzędu wielomianów),
 - c) pierwsze otoczenie węzłów silnie i słabo związanych z elementem,
 - d) pierwsze i drugie otoczenia węzłów elementu.

Zaprezentowane kryteria topologiczne są dość oczywiste. Mając siatkę – węzły i relacje przylegania węzłów do elementów – łatwo jest z jednej strony dobrać węzły leżące najbliżej rozpatrywanego punktu, z drugiej



Rys.7.42. Kryteria selekcji gwiazd: konstrukcja wielokąta Voronoi (a), połączenie punktów z wielokąta Voronoi i kryterium krzyża (b)

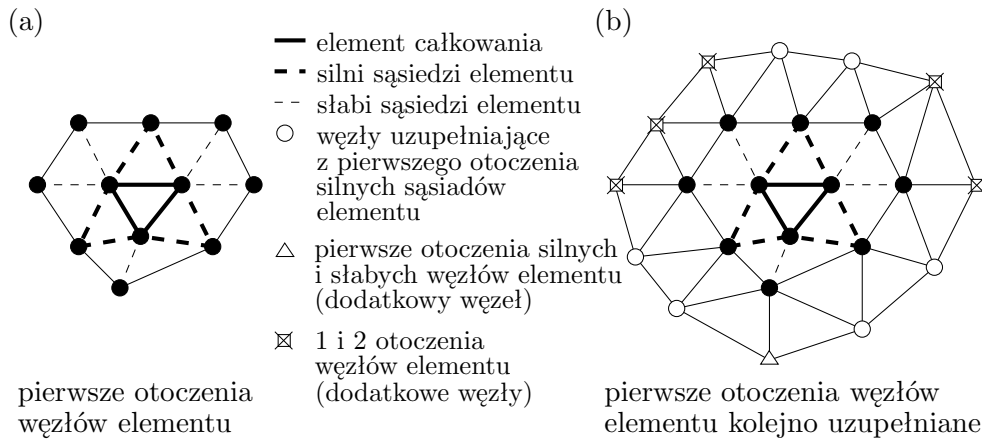


Rys.7.43. Kryteria selekcji gwiazd: kryterium krzyża (a), kryterium łączone krzyża i otoczenia (b)

zaś wybrać je tak, aby tworzyły korzystną konfigurację z punktu widzenia stabilności schematu aproksymacyjnego. To, który wariant kryterium wybierzemy do realizacji zależy od stopnia aproksymacji, którą chcemy rozpiąć, wykorzystując gwiazdę. Warto tu zaznaczyć, że w literaturze metod bezsiatkowych zdecydowanie za mało uwagi poświęca się metodom selekcji węzłów do gwiazd, a jest to sprawa kluczowa.

7.6.4. Aproksymacja MES a aproksymacja bezsiatkowa

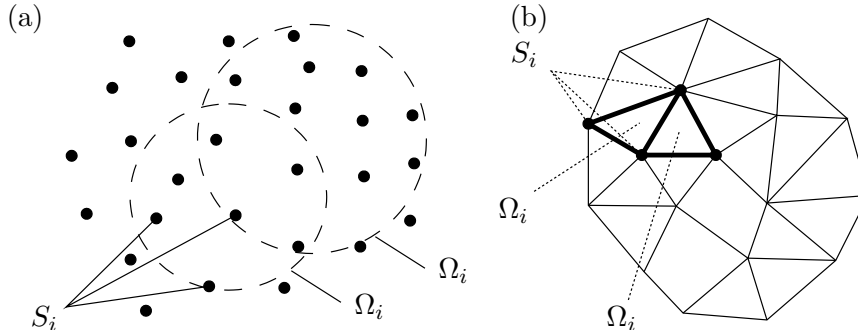
Sposób definiowania funkcji kształtu N_i^e w MES został opisany w rozdziale 5, jednakże będzie tu zaprezentowany ponownie, aby ułatwić Czytelnikowi zro-



Rys.7.44. Kryteria selekcji gwiazd: kryterium pierwszego otoczenia węzłów elementu (a), kryterium drugiego otoczenia (kolejne uzupełnianie węzłów) (b)

zumienie, czym się one różnią w stosunku do funkcji kształtu występujących w metodach bezsiatkowych.

Załóżmy, że mamy obszar aproksymacji Ω_i (chmurę punktów) funkcji $u(\mathbf{x})$ i niech s_j , $j = 1, \dots, n$ będzie zbiorem n punktów o współrzędnych $\mathbf{x} \in \Omega_i$. Na rys.7.45 pokazano obszary interpolacji dla metody bezsiatkowej oraz MES. Nieznana funkcja u może być aproksymowana wewnątrz Ω_i związkiem



Rys.7.45. Obszary interpolacji: dla bezsiatkowej MRS (a), MES (b)

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (7.133)$$

gdzie $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, a wektor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ zawiera typowe jednomiany, zwane

bazowymi funkcjami interpolacyjnymi w przestrzeni współrzędnych, zapewniające kompletność bazy. Dla przestrzeni 2D

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad \text{dla } m = 3 \quad (7.134)$$

oraz

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad \text{dla } m = 6 \quad \dots \text{ itd.} \quad (7.135)$$

Wyrażenie na funkcję $u(\mathbf{x})$ (7.133) możemy teraz napisać dla n punktów, które zawiera obszar Ω_i , otrzymując układ równań

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_i^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (7.136)$$

gdzie $u_j^h = u(\mathbf{x}_j)$ są nieznanymi, poszukiwanymi wartościami funkcji u w punkcie j , $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$ – aproksymacyjnymi wartościami i wreszcie $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$.

Jak wiadomo, w MES liczba punktów aproksymacji u jest taka sama jak liczba funkcji bazowych (dla jednego stopnia swobody w węźle), zatem $m = n$. W tym przypadku mamy do czynienia z aproksymacją interpolacyjną i \mathbf{P} jest kwadratową macierzą, zatem przyrównując \mathbf{u}^h z $\mathbf{P}\mathbf{a}$ w równaniu (7.136) i rozwiązując tak otrzymany układ równań, dostaniemy

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}^h = \mathbf{Q}\mathbf{u}^h \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \quad (7.137)$$

Jak widać z równania (7.136), kwadratowa macierz \mathbf{P} ma postać

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_n(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

Podstawiając relację na \mathbf{a} do równania (7.133), aproksymację funkcji u można przedstawić jako

$$u \cong \hat{u} = \mathbf{p}^T \mathbf{Q}\mathbf{u}^h = \mathbf{N}^T \mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^n N_j u_j^h \quad (7.139)$$

gdzie

$$\mathbf{N}^T = [N_1, N_2, \dots, N_n] = \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \quad \text{lub} \quad N_j = \sum_{l=1}^m p_l(\mathbf{x}) Q_{lj} \quad (7.140)$$

Jak widać ze związku (7.140)₂ funkcje kształtu powstają jako iloczyn kolejnych funkcji bazowych i kolejnych elementów kolumny *macierzy aproksymacyjnej* \mathbf{Q} . Macierz \mathbf{Q} ma taką nazwę, ponieważ – jak to widać ze wzoru (7.137) – wystarczy przemnożyć ją przez wartości funkcji, aby otrzymać nieznanne współczynniki a_i , a więc i aproksymację funkcji. O jej innych własnościach będziemy mówili w dalszym ciągu pracy. Warto na koniec podkreślić, że związek na aproksymację funkcji \hat{u} (7.139) obowiązuje w całym elemencie.

Tak skonstruowane funkcje kształtu spełniają warunek delty Kroneckera

$$N_j(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (7.141)$$

Oznacza to, że dla dwóch różnych obszarów interpolacji Ω_i i Ω_l (rys.7.45b) korespondujące funkcje kształtu są takie same na brzegach obszarów (i) i (l), tzn.

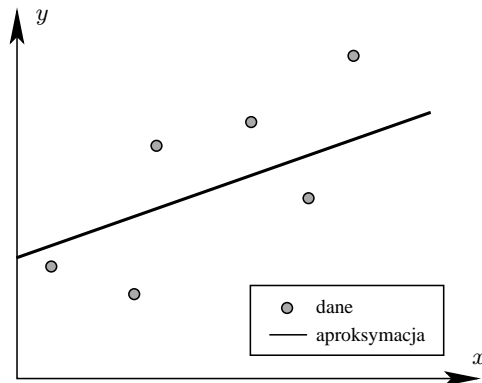
$$N_j^{(i)} = N_j^{(l)}$$

Należy tu podkreślić, że na ogół nie wyprowadza się funkcji kształtu w ten sposób, korzystając raczej z teorii interpolacji. Jednakże sposób powyższy był wykorzystywany w początkowym okresie rozwoju MES oraz jest zgodny z procedurą, jaka ma miejsce w metodach bezsiatkowych, w tym w UMRS, i jest dydaktycznie uzasadniony.

Odrębny problem powstaje, jeśli liczba punktów obszaru aproksymacji jest większa od liczby funkcji bazowych, czyli jeśli $n > m$. Wtedy macierz \mathbf{P} nie jest kwadratowa, nie da się jej odwrócić i aproksymacja nie musi być zgodna z wszystkimi wartościami u_j^h (funkcja aproksymująca nie odtwarza ściśle wartości węzłowych). W następnym punkcie podamy różne sposoby rozwiązania tego problemu.

7.6.5. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów – MNK, baza w układzie lokalnym, związek z MRS

Załóżmy, że mamy zbiór punktów pokazany na rys.7.46.



Rys.7.46. Zagadnienie aproksymacji funkcji danej dyskretnym zbiorem jej wartości

Funkcję daną dyskretnym zbiorem punktów aproksymujemy funkcją liniową

$$y = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = a_0 + a_1 x \quad (7.142)$$

gdzie $\mathbf{p} = \{p_i\} = \{1, x\}$, $\mathbf{a} = \{a_i\} = \{a_0, a_1\}$

Funkcjonał błędu pomiędzy wartościami ścisłymi a aproksymacyjnymi można zapisać jako

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - f_i)^2 \quad (7.143)$$

Po zróżniczkowaniu funkcjonału błędu (7.143) mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - f_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - f_i) x_i = 0 \end{aligned} \quad (7.144)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań o postaci

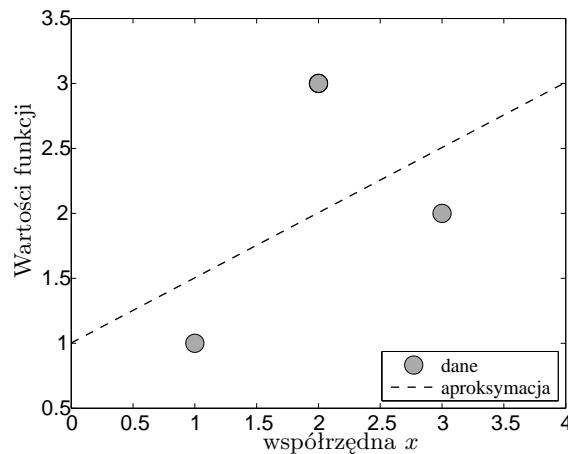
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 1 a_0 + \sum_{i=1}^n x_i a_1 &= \sum_{i=1}^n f_i \\ \sum_{i=1}^n x_i a_0 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2 a_1 &= \sum_{i=1}^n x_i f_i \end{aligned} \quad (7.145)$$

Przyjmując dane $\mathbf{x} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{F} = [1, 3, 2]$, mamy

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad (7.146)$$

czyli prostą o równaniu (zob. rys.7.47)

$$y = 1 + \frac{1}{2}x \quad (7.147)$$



Rys.7.47. Aproksymacja danych dyskretnych funkcją liniową

Pochodna w dowolnym punkcie jest stała i ma wartość $y' = \frac{1}{2}$.

Jeśliby przyjąć funkcję aproksymującą w postaci paraboli

$$y = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (7.148)$$

gdzie $\mathbf{p} = \{p_i\} = \{1, x, x^2\}$, $\mathbf{a} = \{a_i\} = \{a_0, a_1, a_2\}$, to funkcjonal błędu można wyrazić tak

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x + a_2x^2 - f_i)^2 \quad (7.149)$$

Po zróżniczkowaniu (7.149) mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^n (a_2 x^2 + a_1 x_i + a_0 - f_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^n (a_2 x^2 + a_1 x_i + a_0 - f_i) x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^n (a_2 x^2 + a_1 x_i + a_0 - f_i) x_i^2 = 0\end{aligned}\quad (7.150)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ równań o postaci

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n 1a_0 + \sum_{i=1}^n x_i a_1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 a_2 &= \sum_{i=1}^n f_i \\ \sum_{i=1}^n x_i a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 a_1 + \sum_{i=1}^n x_i^3 a_2 &= \sum_{i=1}^n x_i f_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^3 a_1 + \sum_{i=1}^n x_i^4 a_2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i\end{aligned}\quad (7.151)$$

Po wstawieniu danych liczbowych układ równań wygląda następująco:

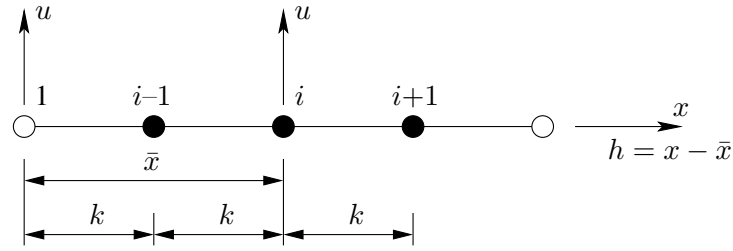
$$\begin{aligned}3a_0 + 6a_1 + 14a_2 &= 6 \\ 6a_0 + 14a_1 + 36a_2 &= 13 \\ 14a_0 + 36a_1 + 98a_2 &= 31\end{aligned}\quad (7.152)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań mamy: $a_0 = -4$, $a_1 = 6.5$, $a_2 = -1.5$. Dla $x = 1.5$ wartości funkcji i ich pochodnych można wyrazić wzorami

$$\begin{aligned}y &= -4 + 6.5x - 1.5x^2 \quad \text{skąd} \quad y(1.5) = 2.375 \\ y' &= 6.5 - 3x \quad \text{skąd} \quad y'(1.5) = 2 \\ y'' &= -3\end{aligned}\quad (7.153)$$

Jak widać z postaci aproksymacji współczynniki aproksymacji nie są pochodnymi: $a_0 \neq y(1.5)$, $a_1 \neq y'(1.5)$, $a_2 \neq y''(1.5)$.

Teraz dokonamy pewnego uogólnienia. Zapiszmy funkcje bazowe w układzie lokalnym związanym z punktem \bar{x} , w którym poszukujemy aproksymacji

Rys.7.48. Układ lokalny w punkcie i dla gwiazdy węzłów w UMRS

– rys.7.48. $h = x - \bar{x}$ jest współrzędną punktu zapisaną w układzie lokalnym gwiazdy, zaś \bar{x} – współrzędną punktu centralnego, rys.7.48.

Mamy określoną funkcję daną dyskretnym zbiorem jej wartości a więc współrzędne punktów $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ i wartości funkcji $\mathbf{F} = [f_1, f_2, f_3]$.

Transformujemy funkcję do układu lokalnego takiego, że $h_i = x_i - \bar{x}$, $i = 1, \dots, n$

Funkcję aproksymującą zapiszmy jako

$$y(\bar{x} + h) = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = a_0 + ha_1 + \frac{1}{2}h^2a_2 + \frac{1}{6}h^3a_3 + \dots + \quad (7.154)$$

gdzie elementy wektora bazowego

$$\mathbf{p} = \left\{ 1, h, \frac{1}{2}h^2, \frac{1}{6}h^3, \dots, \frac{1}{m!}h^m \right\} \quad (7.155)$$

są zapisane w układzie lokalnym, ze współczynnikami takimi, jak w kolejnych funkcjach bazowych szeregu Taylora, zaś wektor \mathbf{a} zawiera współczynniki aproksymacji, które są wartością funkcji i jej kolejnych pochodnych w punkcie centralnym gwiazdy \bar{x} (który może być dowolnym punktem obszaru – niekoniecznie węzłem). Ten de facto operator różnicowy jest określony tak

$$\mathbf{a} = \{a_i\} = \left\{ u(\bar{x}), \frac{du}{dx}(\bar{x}), \frac{d^2u}{dx^2}(\bar{x}), \frac{d^3u}{dx^3}(\bar{x}), \dots, \frac{d^m u}{dx^m}(\bar{x}) \right\}$$

Zdefiniujmy macierz \mathbf{P}

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(h_1) \\ \mathbf{p}^T(h_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(h_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & \frac{1}{2}h_1^2 & \dots & \frac{1}{m!}h_1^m \\ 1 & h_2 & \frac{1}{2}h_2^2 & \dots & \frac{1}{m!}h_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_n & \frac{1}{2}h_n^2 & \dots & \frac{1}{m!}h_n^m \end{bmatrix} \quad (7.156)$$

oraz diagonalną macierz wag

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} w(h_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(h_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(h_n) \end{bmatrix} \quad (7.157)$$

przy czym wagi wyrażają wpływ odległości danego węzła od punktu centralnego \bar{x} i są odwrotnie proporcjonalne do reszty szeregu Taylora, czyli do odległości węzła od punktu centralnego

$$w(h_i) = (|h_i|)^{-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{|h_i|^{m+1}}$$

gdzie m jest numerem maksymalnego wyrazu wziętego w rozwinięciu. Wagi powyższe można zdefiniować na nośniku zwartym, stosując prostą transformację z przedziału nieskończonego na skończony. Można stosować także wagi innego typu. Ich klasyfikację przedstawiono w punkcie 7.9.1 podręcznika.

Funkcję błędu MNK można zapisać teraz wzorem

$$J(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Pa} - \mathbf{F})^T \mathbf{W}(\mathbf{Pa} - \mathbf{F}) \quad (7.158)$$

zaś jej pochodne

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{Aa} - \mathbf{BF} = \mathbf{0} \quad (7.159)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (7.160)$$

W przypadku braku wag powyższe macierze redukują się do

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \quad (7.161)$$

Ostatecznie układ równań na nieznanne współczynniki \mathbf{a} ma postać

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{BF} \quad (7.162)$$

i jego rozwiązanie można wyrazić w formie

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{BF} = \mathbf{QF} \quad (7.163)$$

gdzie

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (7.164)$$

jest macierzą o specjalnym znaczeniu, bowiem kombinacje wierszy tej macierzy z elementami wektora wartości węzłowych funkcji (zob. wzór (7.163)) dają wartości funkcji i jej pochodnych w punkcie \bar{x} , czyli jest to tzw. *macierz wzorów różnicowych*.

Funkcję aproksymującą można teraz zapisać w znanej postaci jako

$$y = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = \mathbf{p}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m p_j Q_{ji} \right) f_j = \sum_{i=1}^n N_i f_i \quad (7.165)$$

gdzie

$$N_i = \sum_{j=0}^m p_j Q_{ji} \quad (7.166)$$

są znanymi już wcześniej z MES funkcjami kształtu. Warto zauważyć, że każda funkcja kształtu powstaje jako rezultat mnożenia odpowiedniej kolumny macierzy wzorów różnicowych i wektora bazowego.

Wracając do przykładu, dla $\bar{x} = 1.5$ i bazy kwadratowej mamy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & \frac{1}{2}h_1^2 \\ 1 & h_2 & \frac{1}{2}h_2^2 \\ 1 & h_3 & \frac{1}{2}h_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.125 \\ 1 & 0.5 & 0.125 \\ 1 & 1.5 & 1.125 \end{bmatrix} \quad (7.167)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{11}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{4} & \frac{27}{16} \\ \frac{11}{8} & \frac{27}{16} & \frac{83}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 1.375 \\ 1.5 & 2.75 & 1.6875 \\ 1.375 & 1.6875 & 1.2969 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \quad (7.168)$$

Stąd można już obliczyć macierz \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.75 & -0.125 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.169)$$

oraz

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{F} = [2.375, 2, -3] \quad (7.170)$$

Uwzględniając fakt, że $h = x - 1.5$, z równania (7.154) można wywnioskować, że funkcja aproksymująca ma postać

$$y(x) = 2.375 + 2(x - 1.5) - \frac{3}{2}(x - 1.5)^2 \quad (7.171)$$

zatem

$$y(1.5) = 2.375, \quad y'(1.5) = 2 - 3(x - 1.5) = 2, \quad y''(1.5) = -3 \quad (7.172)$$

Funkcję aproksymującą można zapisać też w układzie lokalnym (zob. (7.154))

$$y(h) = 2.375 + 2h - \frac{3}{2}h^2 \quad (7.173)$$

zatem uwzględniając fakt, że dla punktu, w którym poszukuje się aproksymacji $h = 0$ mamy

$$y(0) = 2.375, \quad y'(0) = 2 - 3h = 2, \quad y''(0) = -3 \quad (7.174)$$

Wektor \mathbf{a} zawiera więc wartości funkcji, pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie $\bar{x} = 1.5$. Zasadnicza różnica pomiędzy wersją metody najmniejszych kwadratów zaprezentowaną wcześniej, a obecnie polega na tym, że poprzednio współczynniki aproksymacji nie miały tak dogodnej interpretacji. Macierz \mathbf{Q} jest, jak widać, macierzą wzorów różnicowych, bo suma współczynników w wierszach odpowiadających za pierwszą i drugą pochodną jest równa zeru, a to jest jedna z głównych cech macierzy wzorów różnicowych.

Dla $\bar{x} = 2$ (punkt w środku między punktami 1 i 3) macierz wzorów różnicowych \mathbf{Q} zawiera współczynniki typowe dla schematów różnicowych zaprezentowanych wcześniej (tutaj dla odległości węzłów $h = 1$)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.175)$$

co można zapisać tak

$$\mathbf{a} = \mathbf{Df} = \begin{bmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \\ \frac{d^2f}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (7.176)$$

We wzorach powyższych zastosowano interpolację. Przyjęto 3 współczynniki niewiadome i 3 punkty. Nic nie stoi na przeszkodzie, by przyjąć, że mamy do czynienia z aproksymacją (są wtedy nadmiarowe punkty). Tą drogą uogólniono MRS, stosując aproksymację MNK z wagami.

Funkcje kształtu można zapisać jako

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{j=0}^2 Q_{j1} p_j = -0.5h + h^2 \\ N_2 &= \sum_{j=0}^2 Q_{j2} p_j = 1 - 2h^2 \\ N_3 &= \sum_{j=0}^2 Q_{j3} p_j = 0.5h + h^2 \end{aligned} \quad (7.177)$$

Przyjmijmy dla przykładu, że mamy dane 3 punkty oraz określone w nich wartości $\mathbf{x} = [1, 2, 3]$ i $\mathbf{F} = [1, 3, 2]$ oraz wektor bazowy w postaci

$$\mathbf{p} = [1, h], \quad \text{gdzie } h_i = x_i - \bar{x}, \quad \bar{x} = 1.5 \quad (7.178)$$

zatem wektor współrzędnych lokalnych punktów wynosi

$$\mathbf{h} = [-0.5, 0.5, 1.5] \quad (7.179)$$

Macierze \mathbf{P} , \mathbf{A} , \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{Q} mają postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 1 & h_2 \\ 1 & h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (7.180)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 \\ 1.5 & 2.75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2.75}{6} & \frac{-1.5}{6} \\ \frac{-1.5}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4583 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (7.181)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \frac{3.5}{6} & \frac{2}{6} & \frac{0.5}{6} \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & 0.3333 & 0.0833 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (7.182)$$

Pochodne można zapisać wzorem

$$\mathbf{a} = \mathbf{Df} = \begin{bmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \end{bmatrix} = \mathbf{QF} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (7.183)$$

Skomplikujmy teraz sytuację i załóżmy, że mamy do czynienia z aproksymacją ważoną. Na aproksymację w punkcie \bar{x} większy wpływ będą teraz miały punkty bliżej leżące rozważanego punktu \bar{x} , jeśli przyjmie się wagi w postaci $w_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{x_i - \bar{x}}$. Macierz wag będzie miała postać

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_3} \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

Macierze \mathbf{W} , \mathbf{P} , \mathbf{A} , \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{Q} mają dla tego przypadku formy

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (7.185)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (7.186)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4\frac{2}{3} & 1.0 \\ 1.0 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (7.187)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2.0 & 2 & \frac{2}{3} \\ -1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (7.188)$$

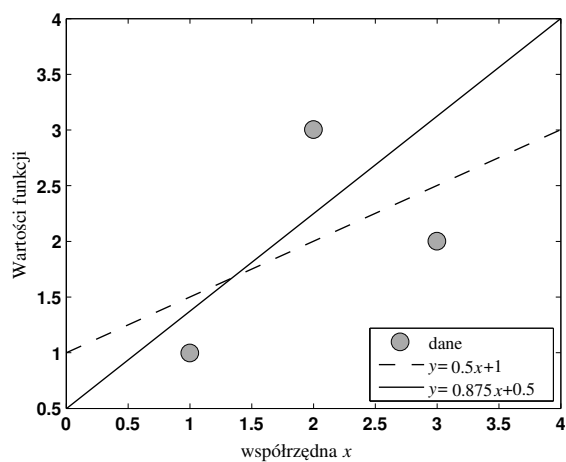
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7.5}{32} & \frac{-3}{32} \\ \frac{-3}{32} & \frac{14}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5625 & -0.0938 \\ -0.0938 & 0.4375 \end{bmatrix} \quad (7.189)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{18}{32} & \frac{12}{32} & \frac{2}{32} \\ \frac{-20}{32} & \frac{8}{32} & \frac{12}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.375 & 0.0625 \\ -0.625 & 0.250 & 0.375 \end{bmatrix} \quad (7.190)$$

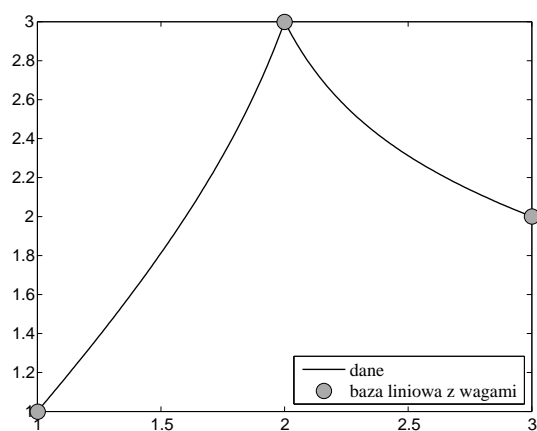
W tym przypadku pochodne wynoszą

$$\mathbf{a} = \mathbf{Df} = \begin{bmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \end{bmatrix} = \mathbf{QF} = \begin{bmatrix} 1.8125 \\ 0.875 \end{bmatrix} \quad (7.191)$$

Wyniki aproksymacji w punkcie $x = 1.5$ zaprezentowano na rys. 7.49 i 7.50. Jeśli uwzględnimy wagi, w każdym punkcie mamy inną aproksymację. Zostało to narysowane dla całego przedziału (1,3) na rys. 7.50.

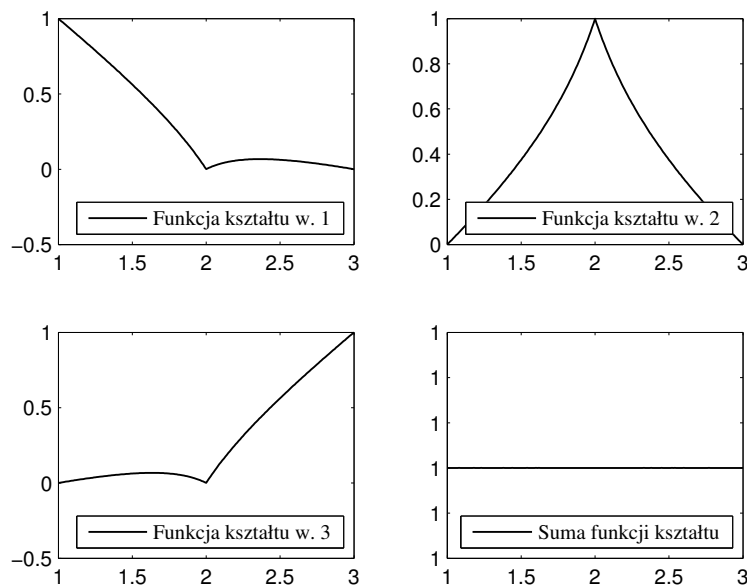


Rys.7.49. Aproksymacja danych dyskretnych funkcją liniową: linia ciągła – aproksymacja bez wag, linia przerywana – aproksymacja z wagami



Rys.7.50. Aproksymacja danych dyskretnych funkcją liniową z wagami dla całego przedziału (1,3)

Po zastosowaniu wag nie mamy więc jednej, obowiązującej dla całego przedziału, funkcji aproksymującej, lecz w każdym punkcie musimy przeprowadzić proces aproksymacji; efekt ten widać na rys. 7.50. W każdym punkcie mamy inną funkcję liniową. Geometrycznie efekt jest taki, jakby aproksymacja z funkcji liniowej (rys.7.49) stała się funkcją nieliniową (rys. 7.50) mimo tego, że baza jest liniowa. Można również narysować funkcje kształtu dla węzłów 1,2 i 3 oraz obliczyć ich sumę – rys.7.51. Jak można się było spodziewać, suma funkcji kształtu równa się 1.

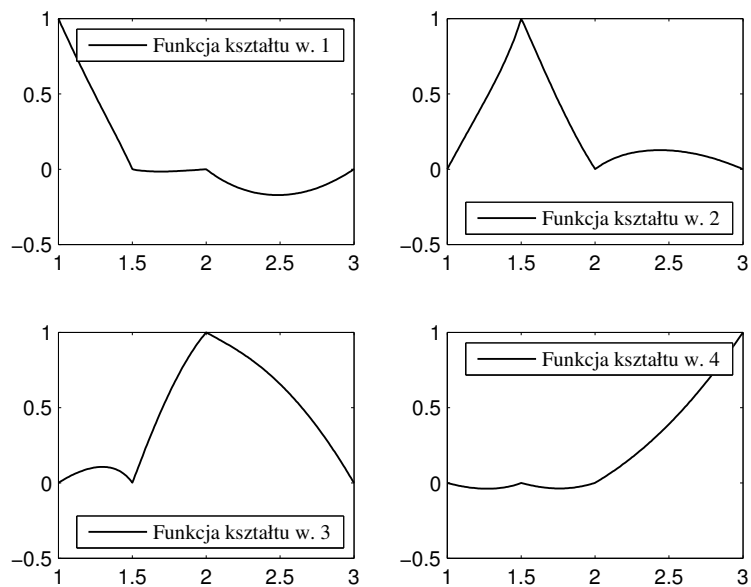


Rys.7.51. Funkcje kształtu dla MNK (baza liniowa) oraz ich suma

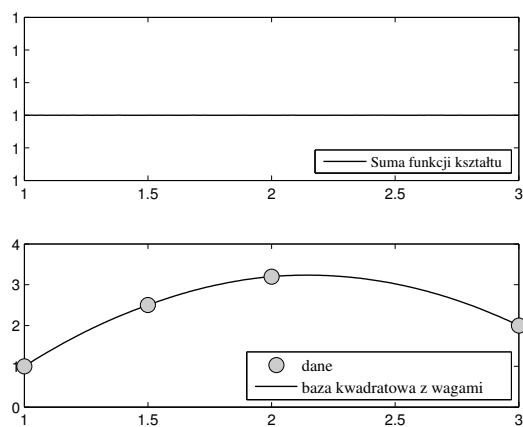
Weźmy przykład, w którym zdefiniowano 4 punkty $\mathbf{x} = [1, 1.5, 2, 3]$ oraz $\mathbf{F} = [1, 2.5, 3.2, 2]$. Załóżmy, że baza jest kwadratowa. Po rozwiązaniu zagadnienia, jak poprzednio, funkcje kształtu i aproksymację funkcji ilustrują rysunki 7.52 i 7.53.

Dla wielomianu drugiego stopnia, zdefiniowanego za pomocą punktów $\mathbf{x} = [0, 1, 4, 9, 16, 25]$ i $\mathbf{F} = [0, 1.1, 1.8, 3.3, 3.8, 5.5]$, funkcje kształtu i aproksymację funkcji ilustrują rysunki 7.54 i 7.55.

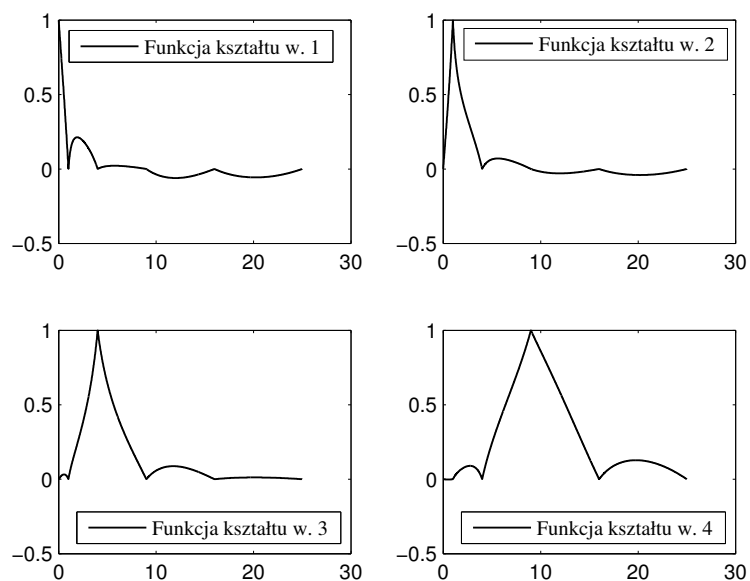
Dla wielomianu trzeciego stopnia, zdefiniowanego za pomocą tych samych punktów co poprzednio, funkcje kształtu i aproksymację funkcji zilustrowano na rys.7.56.



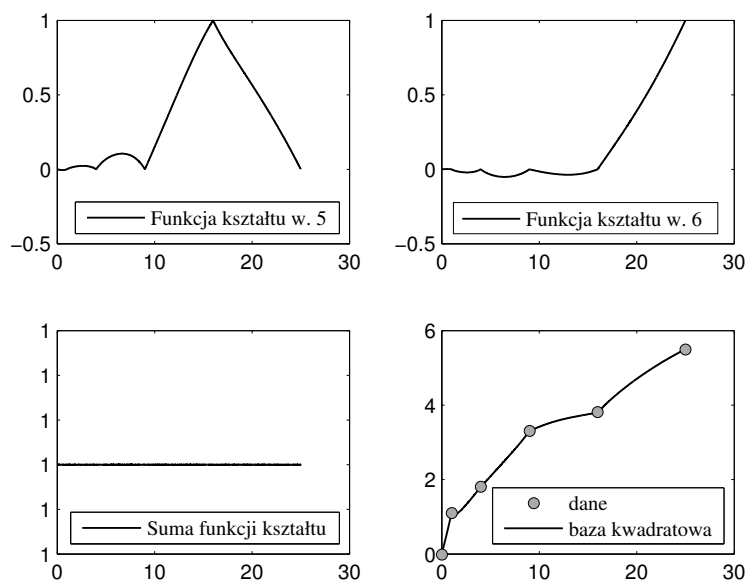
Rys.7.52. Funkcje kształtu dla MNK (baza kwadratowa)



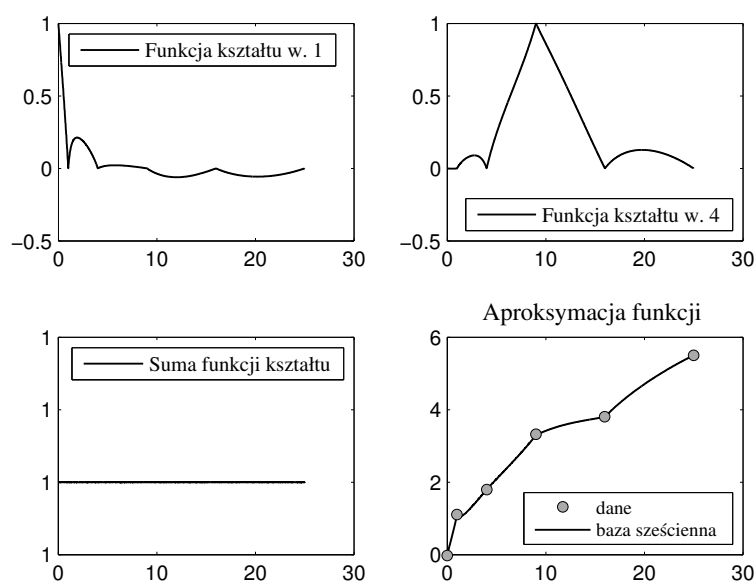
Rys.7.53. Suma funkcji kształtu oraz aproksymacja danych dyskretnych funkcją kwadratową z wagami



Rys.7.54. Funkcje kształtu dla MNK (baza kwadratowa)



Rys.7.55. Funkcje kształtu dla MNK, ich suma oraz aproksymacja danych – baza kwadratowa



Rys.7.56. Aproksymacja danych dyskretnych, baza trzeciego stopnia

Jak widać na tym rysunku, wagi osobliwe spowodowały, że funkcja aproksymująca odtwarza dokładnie wartości ścisłe (interpolacja) mimo iż funkcji bazowych jest mniej niż wartości funkcji.

Reasumując, warto zauważyć, że MNK została powiązana z MRS. Powodem dobrej dokładności tak sformułowanej MRS jest fakt, że optymalizacji przy takim sformułowaniu podlegają zarówno współczynniki rozwinięcia, jak i reszta w szeregu Taylora (wagi).

7.6.6. Porównania aproksymacji UMRS i MES w obszarze jednowymiarowym

Aby zilustrować podobieństwa i różnice między aproksymacją MES i UMRS, rozważmy najprostszy jednowymiarowy przykład, rys.7.48. Weźmy następujące rozwinięcie funkcji w szereg względem punktu centralnego (h jest tu współrzędną lokalną, k odległością między węzłami):

$$u = u_i + \frac{du_i}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2u_i}{dx^2}h^2 + R$$

Przyjmując, że gwiazda jest rozpięta na trzech równomiernie rozłożonych punktach, pochodne w punkcie centralnym możemy wyrazić tak jak dla przypadku klasycznego, tzn.

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2k} \quad \frac{d^2u_i}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{k^2}$$

wtedy otrzymujemy następujący wzór na funkcję w (7.6.6) dowolnym punkcie obszaru:

$$u = u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2k}h + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{k^2}h^2 + R$$

Kładąc $\xi = \frac{h}{k}$ oraz opuszczając resztę szeregu Taylora, mamy

$$\begin{aligned} u &= u_i + \frac{\xi}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{\xi^2}{2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2)u_{i-1} + (1 - \xi^2)u_i + \frac{1}{2}(\xi + \xi^2)u_{i+1} \end{aligned} \quad (7.192)$$

a przyjmując definicje funkcji kształtu

$$N_1 = \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2), \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{1}{2}(\xi + \xi^2)$$

których postać jest oczywista ze związku (7.192), otrzymujemy

$$u = \tilde{N}_{i-1}u_{i-1} + \tilde{N}_i u_i + \tilde{N}_{i+1}u_{i+1} = \sum_{k=1}^3 \tilde{N}_k u_k$$

W dowolnym punkcie mamy zatem

$$\frac{du}{dx} = \sum_j \frac{d\tilde{N}_j}{dx} u_j = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2k} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{k^2}h$$

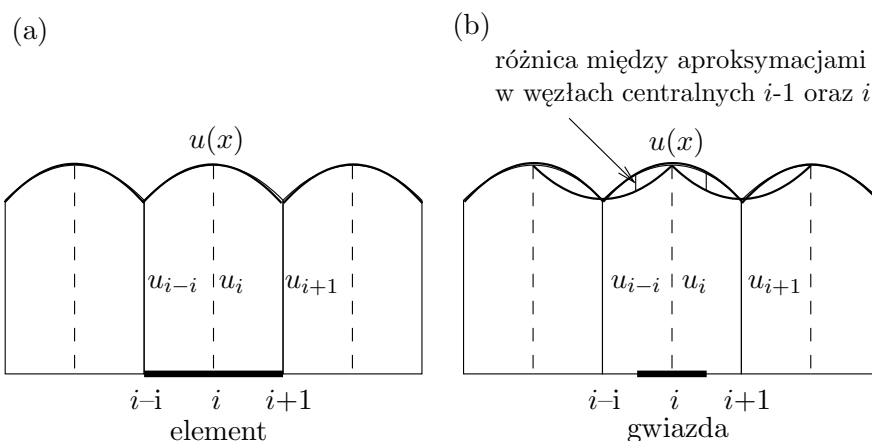
zaś dla punktu centralnego $x = \bar{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2k} \quad \text{oraz} \quad \tilde{N}_{i-1} = 0, \quad \tilde{N}_i = 1, \quad \tilde{N}_{i+1} = 0$$

W MES dla kwadratowych elementów skończonych mamy:

$$u = \sum_i N_i u_i, \quad \text{gdzie} \quad N_1 = \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2), \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{1}{2}(\xi + \xi^2)$$

a więc mamy dokładnie taki sam zapis i dokładnie takie same funkcje kształtu. W MRS sytuacja różni się tym, że kolejna gwiazda zachodzi na rozważaną i wyprowadzany wzór jest używany głównie, choć tak być nie musi, dla węzła centralnego, gdyż aproksymacja jest określona lokalnie w punkcie centralnym i z uwagi na istnienie nadmiarowych węzłów oraz współczynników wagowych i tam jest najdokładniejsza. Zilustrowano to na rys.7.57.



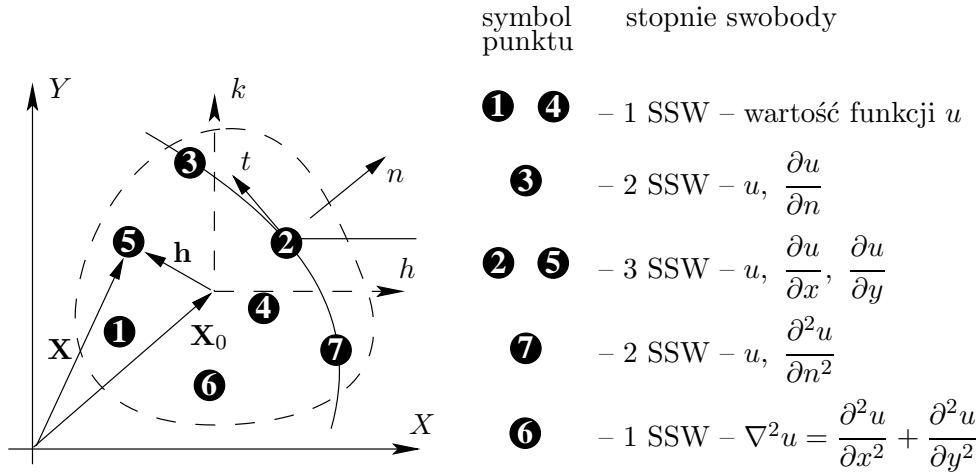
Rys.7.57. Przykład ilustrujący różnice między MES (a) a MRS (b)

7.6.7. Aproksymacja UMRS w obszarze dwuwymiarowym

Aproksymację UMRS, przedstawioną poprzednio, można znacznie uogólnić, przyjmując bogatszy zestaw parametrów węzłowych. Powodów do takiego postępowania jest kilka:

1. Możliwość zastosowania dowolnie nieregularnej siatki węzłów, w złożonych zagadnieniach, gdzie różne części obszaru opisane są operatorami różnego rzędu (np. ciało masywne + powłoka). Sytuacja taka występuje np. w analizie deformacji chłodni kominowej, gdzie powłokę opisują operatory II lub III rzędu, zaś fundament lub podłoże operator I rzędu.
2. Potrzeba ścisłego uwzględnienia dowolnych warunków brzegowych.
3. Podniesienie dokładności aproksymacji (poprawienie zbieżności metody).

Biorąc powyższe pod uwagę, przyjmijmy przykładowo, że mamy sytuację jak na rys.7.58. Wektor stopni swobody przybierze w tym przypadku następującą postać:



Rys.7.58. Gwiazda z uogólnionymi stopniami swobody

$$\mathbf{u} = \left\{ u_1, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, u_3, \frac{\partial u_3}{\partial n}, u_4, u_5, \frac{\partial u_5}{\partial x}, \frac{\partial u_5}{\partial y}, \nabla^2 u_6, u_7, \frac{\partial^2 u_7}{\partial n^2} \right\} \quad (7.193)$$

W punkcie centralnym P_0 jest zdefiniowany operator

$$\mathbf{a} = \{a_i\} = \left\{ u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^p u_0}{\partial y^p} \right\} \quad (7.194)$$

Załóżmy następujące rozwinięcie funkcji u w szereg. W otoczeniu punktu centralnego $P_0(\bar{x}, \bar{y})$ dowolnie ciągła funkcja u może być rozwinięta w szereg Taylora, do wyrazów p -tego rzędu włącznie

$$u = u_0 + h \frac{\partial u_0}{\partial x} + k \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{k^p}{p!} \frac{\partial^p u_0}{\partial y^p} + e(\mathbf{h}) \quad (7.195)$$

gdzie (rys.7.58)

$$u = u(x, y) \quad u_0 = u(\bar{x}, \bar{y}) \quad \mathbf{x} = (x, y)$$

oraz

$$\mathbf{h} = (h, k) \quad h = x - \bar{x} \quad k = y - \bar{y} \quad \rho = \sqrt{h^2 + k^2}$$

Reszta szeregu Taylora ma postać

$$\begin{aligned} e(\mathbf{h}) &= \frac{1}{(p+1)!} \left(h_i \frac{\partial}{\partial x} + k_i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(p+1)} = \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{s=0}^{p+1} \frac{(p+1)!}{s!(p+1-s)!} h_i^s k_i^{p+1-s} \frac{\partial^{p+1-s} u(\epsilon, \eta)}{\partial x^s \partial y^{p+1-s}} \end{aligned}$$

Opuszczając resztę szeregu Taylora, związek (7.195) można zapisać również w formie

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i p_i(\mathbf{h}) = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (7.196)$$

W dalszym ciągu będziemy opuszczać daszek nad funkcją aproksymacyjną. Wektor funkcji bazowych dla funkcji u jest więc następujący:

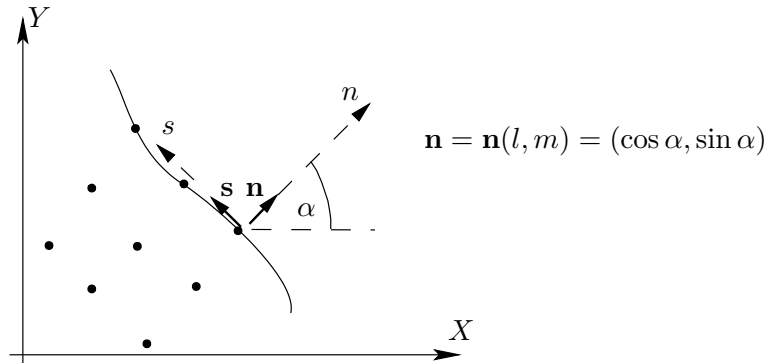
$$\mathbf{p} = \{p_i\} = \left\{ 1, h, k, \frac{1}{2}h^2, hk, \frac{1}{2}k^2, \dots, \frac{1}{p!}k^p \right\}$$

Dla pochodnych $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ wektory funkcji bazowych można wyrazić w postaci

$$\mathbf{p}_x = \{0, 1, 0, h, k, 0, \dots, 0\} \quad \mathbf{p}_y = \{0, 0, 1, 0, h, k, \dots, \frac{p}{p!}k^{p-1}\}$$

Dla innych funkcji (lub innych rozwinięć w szereg) funkcje bazowe należy zdefiniować osobno. Tak np. możemy mieć oddzielne stopnie swobody typu pochodnej normalnej $\frac{\partial}{\partial n}$, zdefiniowane w lokalnym układzie współrzędnych (rys.7.59). Przyjmując oznaczenia: $l = \cos(\phi)$, $m = \sin(\phi)$ i ograniczając się do pochodnych II rzędu, mamy

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_s \\ u_{nn} \\ u_{ns} \\ u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 & 2lm & m^2 \\ 0 & 0 & -lm & l^2 - m^2 & l^2 \\ 0 & 0 & m^2 & -2lm & l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix}$$

Rys.7.59. Lokalny układ współrzędnych (s, n) dla węzła na brzegu

Z rozwinięcia (7.195) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0u_0 + 1\frac{\partial u_0}{\partial x} + 0\frac{\partial u_0}{\partial y} + h\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + 0\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + 0\frac{\partial^p u_0}{\partial y^p} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0u_0 + 0\frac{\partial u_0}{\partial x} + 1\frac{\partial u_0}{\partial y} + 0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + k\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + p\frac{\partial^p u_0}{\partial y^p} \end{aligned} \quad (7.197)$$

zaś pochodna normalna $\frac{\partial u}{\partial n}$ będzie przedstawiona w postaci szeregu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= l\frac{\partial u_0}{\partial x} + m\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0u_0 + l\frac{\partial u_0}{\partial x} + m\frac{\partial u_0}{\partial y} + lh\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \\ &+ (lk + mh)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + mk\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots \end{aligned}$$

zaś wektor funkcji bazowych dla pochodnej normalnej będzie wyglądał następująco:

$$\mathbf{p}_n = l \mathbf{p}_x + m \mathbf{p}_y = \{0, l, m, lh, lk + mh, mk, \dots\}$$

I tak postępujemy dla dowolnego stopnia swobody. Aby opisać sytuację na rys.7.58, należy jeszcze wyprowadzić wzory na funkcje $\nabla^2 u$ oraz $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Stosując w węzłach gwiazdy wzór (7.195), otrzymujemy układ równań o postaci

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ u_4 \\ u_5 \\ \frac{\partial u_5}{\partial x} \\ \frac{\partial u_5}{\partial y} \\ \nabla^2 u_6 \\ u_7 \\ \frac{\partial^2 u_7}{\partial n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & k_1 & \frac{1}{2}h_1^2 & h_1k_1 & \frac{1}{2}k_1^2 & \dots & \frac{1}{p!}k_1^p \\ 1 & h_2 & k_2 & \frac{1}{2}h_2^2 & h_2k_2 & \frac{1}{2}k_2^2 & \dots & \frac{1}{p!}k_2^p \\ 0 & 1 & 0 & h_2 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_2 & k_2 & \dots & \frac{p}{p!}k_2^{p-1} \\ 1 & h_3 & k_3 & \frac{1}{2}h_3^2 & h_3k_3 & \frac{1}{2}k_3^2 & \dots & \frac{1}{p!}k_3^p \\ 0 & l & m & lh_3 & mk_3 & (lk_3 + mh_3) & \dots & m\frac{p}{p!}k_3^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{p(p-1)}{p!}k_6^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial x \partial y}{\partial^2 u_0} \\ \frac{\partial y^2}{\partial^2 u_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial^p u_0}{\partial y^p} \end{bmatrix} \quad (7.198)$$

co w zapisie macierzowym daje

$$\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{a} + \mathbf{R}_1 \quad (7.199)$$

gdzie \mathbf{R}_1 jest resztą wynikającą z odrzucenia wyrazów wyższego rzędu lub pewną niejednorodnością wynikającą np. z niejednorodnych warunków brzegowych, które chcemy spełnić na etapie lokalnym przy generacji wzorów różnicowych. W dalszych rozważaniach pominiemy \mathbf{R}_1 .

Układ równań (7.199) może być nadokreślony. Do rozwiązania go stosuje się wtedy metodę minimalizacji (ważonych najmniejszych kwadratów), przemnażając równanie (7.199) przez diagonalną macierz wag zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{W} = \left[\alpha'_1 + \alpha_1 \frac{1}{\rho_1^{p+1}}, \alpha'_2 + \alpha_1 \frac{1}{\rho_2^{p+1}}, \alpha'_3 + \alpha_3 \frac{1}{\rho_3^p}, \dots, \alpha'_k + \alpha_k \frac{1}{\rho_k^{p-1}} \right] \quad (7.200)$$

gdzie ρ jest odległością węzła od punktu centralnego. Natomiast współczynniki $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ wyrażają wpływ innych czynników (niż odległość)

na istotność danego równania w układzie (7.199). Wagi zdefiniowane równaniem (7.200) można znormalizować celem uzyskania lepszego uwarunkowania układu równań.

Opuszczając resztę \mathbf{R}_1 w równaniu (7.199), przenosząc wyrazy na jedną stronę i podnosząc tak powstałe residuum równania do kwadratu, funkcja błędu na nieznanne współczynniki a_i przyjmuje znaną już postać

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{W}^2 (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u}) \quad (7.201)$$

i jest ona typowa mimo skomplikowanej struktury stopni swobody w układzie równań (7.198). W równaniu (7.201) macierz \mathbf{W} może występować w pojedynczej potędze (nie w kwadracie). Ważymy zatem albo kwadrat błędu, albo błąd.

Po jego minimalizacji ważony układ równań (7.199) można zapisać w znanej już formie

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (7.202)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T (\mathbf{W})^2 \mathbf{P} = \mathbf{B} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T (\mathbf{W})^2 \quad (7.203)$$

co po rozwiązaniu daje

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad (7.204)$$

gdzie \mathbf{Q} jest *uogólnioną macierzą wzorów różnicowych*. Komentarza wymaga postać macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} , w których wagi są podniesione do kwadratu (zob. (7.203)). Można użyć wag w pojedynczej potędze, jak to pokazano przy okazji wyprowadzania wzorów dla metod najmniejszych kwadratów. Zostanie jednakże uzyskany nieco inny rezultat.

Wstawiając współczynniki rozwinięcia \mathbf{a} do wzoru na aproksymację funkcji (7.196), otrzymujemy

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij} u_j p_i(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{h}) u_i \quad \tilde{N}_j(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^m Q_{ij} p_i(\mathbf{h}) \quad (7.205)$$

gdzie \tilde{N}_j są funkcjami kształtu zapisanymi w układzie lokalnym. Różniczkując funkcje kształtu (7.205), przy założeniu, że współczynniki a_i są stałe, otrzymujemy pochodne lokalne. W literaturze angielskiej często nazywa się je pochodnymi dyfuzyjnymi – rozmytymi (ang. *diffuse derivatives*).

W dowolnym punkcie obszaru będziemy zatem mieć następująco określoną macierz aproksymacji, która jest uogólnieniem zarówno znanej macierzy wzorów różnicowych, jak i stanowi podstawowy element innej nieco postaci zapisu aproksymacji MES niż stosowano dotychczas:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n] = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & \tilde{N}_2 & \dots & \tilde{N}_n \\ \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \tilde{N}_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \tilde{N}_n}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^p \tilde{N}_1}{\partial y^p} & \frac{\partial^p \tilde{N}_2}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial^p \tilde{N}_n}{\partial y^p} \end{bmatrix} \quad (7.206)$$

zaś wzór aproksymacyjny przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} u \\ u_x \\ u_y \\ u_{xx} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (7.207)$$

i jest on słuszny zarówno dla MRS, jak i MES – jeśli funkcje kształtu \tilde{N}_i zastąpimy funkcjami kształtu MES N_i . Dalsze uogólnienie, zamieszczone w punkcie 7.7, będzie polegało na zamianie w związku (7.206) pochodnych lokalnych na pochodne konsystentne, tj. pochodne ciągłe.

Obecnie przejdziemy do rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień brzegowych różnymi metodami: MES, UMRS w sformułowaniu lokalnym oraz wariacyjnym.

Wykorzystując zarówno lokalne, jak i globalne podejście MRS rozwiążemy szereg zagadnień brzegowych. Jako pierwsze rozpatrzmy skręcanie pręta pryzmatycznego, dyskretyzując odpowiednie równanie różniczkowe II rzędu z warunkami brzegowymi Dirichleta. Zastosujemy nieregularną siatkę i lokalną MRS. Następnie problem skręcania rozwiążemy MES, a także techniką kombinowaną MES/MRS, wykorzystując MES do znalezienia rozwiązania podstawowego, a następnie MRS do obliczenia naprężeń (pochodnych). Podejście to dało szczególnie dobre rezultaty.

Kolejnym zagadnieniem będzie rozwiązanie problemu stacjonarnego przepływu ciepła ze źródłami punktowymi. Zastosujemy lokalną MRS i nieregularne siatki węzłów dla obszaru kwadratowego oraz dla obszaru nieregularnego z narożami wypukłymi i wklęsłymi.

Dalsze przykłady będą dotyczyły problemu zginania płyt; przyjmiemy jako punkt wyjściowy zasadę minimum energii sprężystej. Rozpatrzmy zagadnienie zginania swobodnie podpartej płyty kwadratowej, wykorzystując ciąg siatek regularnych i nieregularnych. Pokażemy zalety stosowania siatek nieregularnych

Z uwagi na to, że funkcje kształtu aproksymacji bezsiatkowej nie spełniają warunku delty Kroneckera, zatem nie są funkcjami interpolacyjnymi (nie spełniają więc warunków brzegowych Dirichleta), pokażemy jak spełnić te warunki za pomocą mnożników Lagrange'a. Sformułujemy odpowiednie zasady wariacyjne dla problemów jedno- i dwuwymiarowych. Drogą całkowania przez części naturalne warunki brzegowe (warunki statyczne) zostaną uwzględnione w zasadzie wariacyjnej. Skomentujemy jednocześnie pojawienie się pewnych członów. Pokażemy również rozwiązanie rozciągania pręta obciążonego siłami masowymi, startując zarówno ze sformułowania lokalnego i dyskretyzując równania za pomocą lokalnej MRS, jak i korzystając z wyprowadzonego sformułowania wariacyjnego, dyskretyzując je następnie MES i bezsiatkową MRS. Do wyników dołączymy rezultaty obliczeń uzyskanych aproksymacją bezsiatkową. Trudno jest wyciągnąć głębsze wnioski z prostych testów, ale jeden jest ważny i nie podlega dyskusji. Pochodne funkcji są obliczane w metodach bezsiatkowych o wiele dokładniej niż w MES, co jest szczególnie interesujące dla inżyniera.

Przykład 7.5. Wymienione metody zastosujemy do analizy skręcania pręta przyzmatycznego o przekroju kwadratowym, rozważanej w przykładzie 7.4, wykorzystując zarówno sformułowanie lokalne, jak i wariacyjne problemu oraz stosując dowolnie nieregularne siatki węzłów. Symbol MES/MRS oznacza, że MRS zastosowano do obróbki wyników MES (tzw. postprocessing). W sformułowaniu lokalnym należy znaleźć funkcję $F(x,y)$ taką, że

$$\begin{aligned} -\nabla^2 F &= 2G\theta & \text{w obszarze } \Omega \\ F &= 0 & \text{na brzegu } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.208)$$

gdzie F jest funkcją naprężenia, zaś θ jednostkowym kątem skręcania.

Sformułowanie wariacyjne polega na minimalizacji funkcjonału

$$I(F) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [(F_{,x})^2 + (F_{,y})^2] - 2G\theta F \right\} d\Omega$$

przy warunku brzegowym

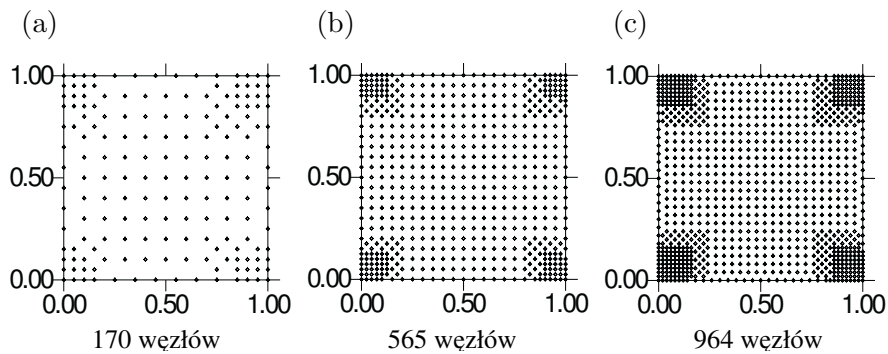
$$F = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega$$

Naprężenia styczne wynoszą (z jest współrzędną prostopadłą do przekroju)

$$\tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

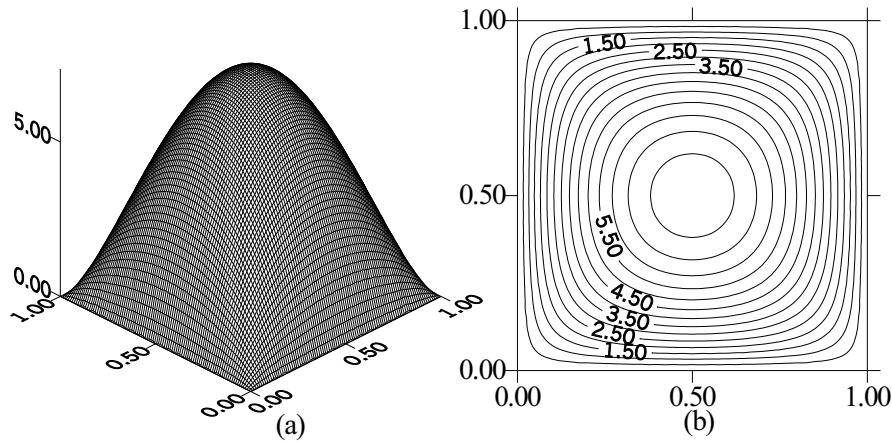
W obliczeniach przyjęto przekrój kwadratowy o wymiarach 1 oraz $2G\theta = 100$. Dla zbadania tempa zbieżności wykorzystanych metod analizy zastosowano kolejno trzy (nieregularne) siatki o różnym stopniu zagęszczenia (rys.7.60), identyczne dla MES, MRS-lok i podejścia MES/MRS. Są to siatki 170, 565 i 964-węzłowe.

Szczegółowe wyniki zaprezentowano dla siatki nieregularnej 565-węzłowej o parametrach: min. rozmiar oczka 0.025, max – 0.05. Na rys.7.61 pokazano rzut aksonometryczny oraz warstwicę funkcji skręcania otrzymanej lokalną MRS dla siatki nr 2. Rys.7.62 obrazuje rzuty aksonometryczne oraz warstwicę naprężeń τ_{zx} dla siatki nr 2.

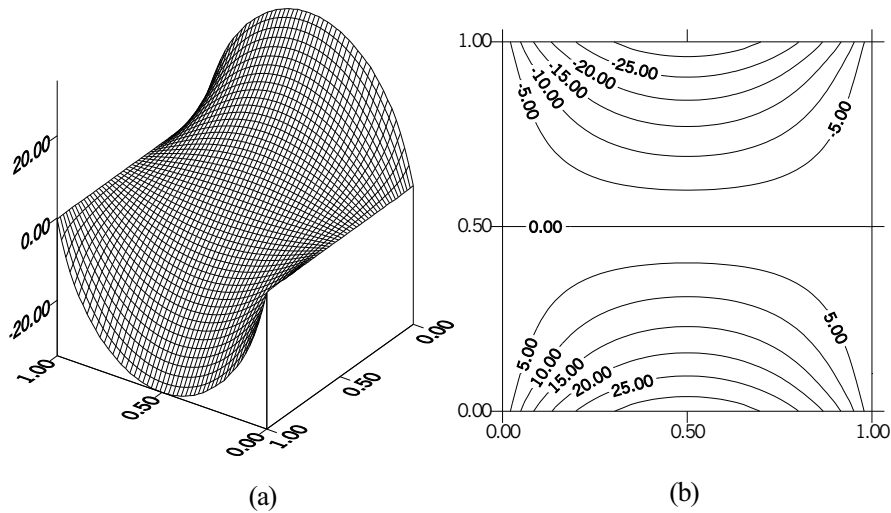


Rys.7.60. Siatki dla problemu skręcania: siatka nr 1 (a), siatka nr 2 (b), siatka nr 3 (c)

Dla oceny dokładności rozwiązania uzyskanego MRS-lok rozwiążemy następie problem za pomocą MES, stosując liniowe elementy trójkątne i siatkę

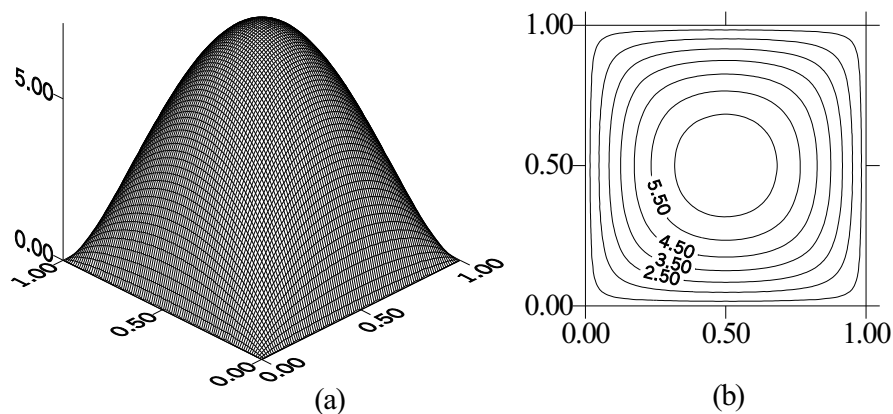


Rys.7.61. Funkcja skręcania pręta pryzmatycznego, MRS-lok, siatka 2

Rys.7.62. Skręcanie pręta pryzmatycznego, MRS-lok, τ_{zx} – widok, i warstwy, siatka 2

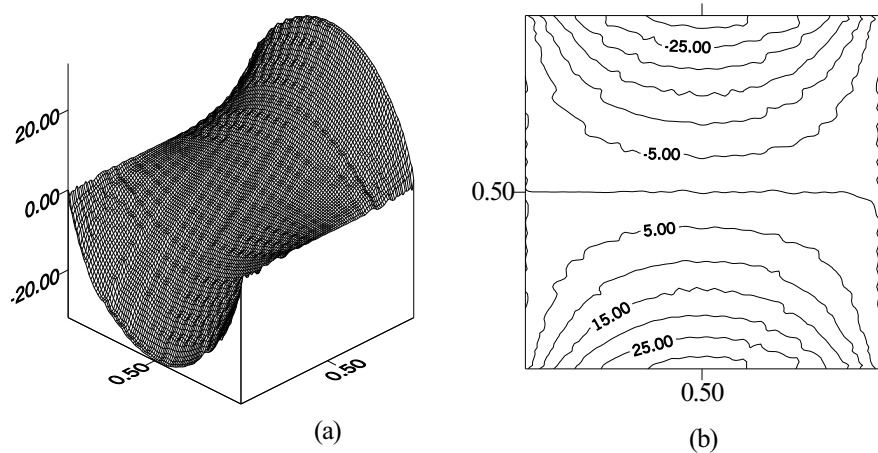
nr 2. Na rys.7.63 pokazano rzut aksonometryczny oraz warstwy funkcji naprężeń. Otrzymano rozwiązanie o dużej regularności oraz liczbowo praktycznie równoważne wynikom uzyskanym MRS-lok dla tejże siatki. Natomiast obliczone w punktach Gaussa naprężenia MES, rys.7.64, mają mniejszą dokładność, co przejawia się dużą nieregularnością wyników.

W dalszym ciągu poświęcimy nieco uwagi technice prowadzenia obliczeń

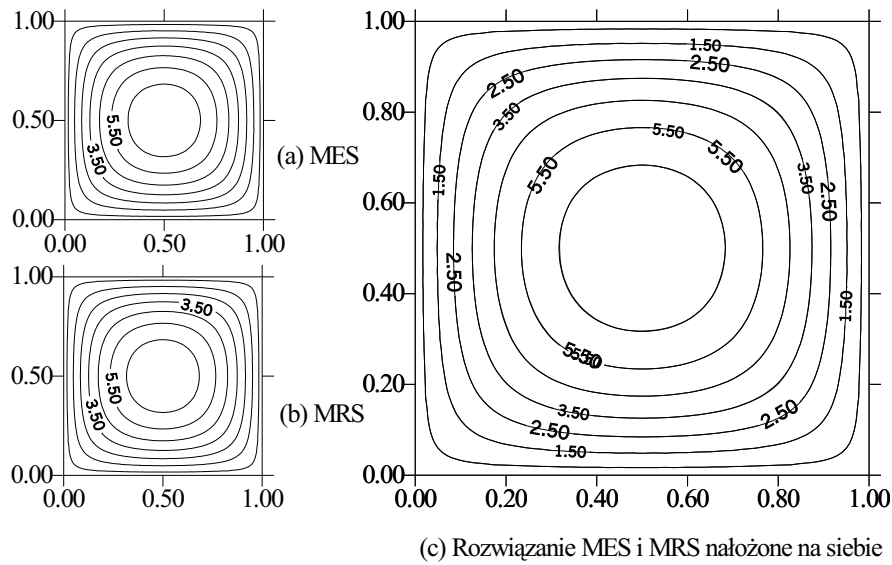


Rys.7.63. Skręcanie pręta pryzmatycznego, MES-T-3, funkcja naprężenia – widok i warstwice, siatka 2

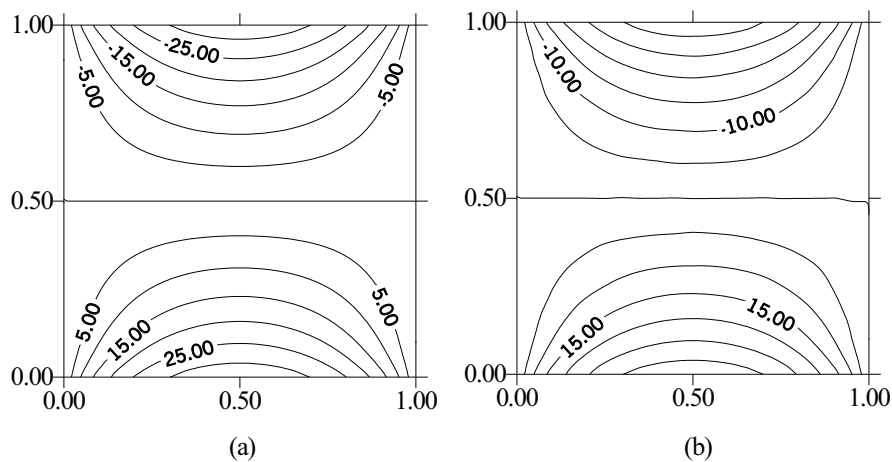
jednocześnie dwiema metodami, tzn. MES i MRS. Uwzględniając fakt, że rozwiązania dla funkcji naprężenia otrzymane MES i MRS-lok różnią się niewiele od siebie (rys.7.65), obliczono naprężenia MRS, wykorzystując funkcję naprężenia otrzymaną MES. Na rys.7.66 zestawiono warstwice funkcji τ_{xz} uzyskane MRS-lok oraz kombinowaną metodą MES – postprocessing MRS. Rozwiązania te są praktycznie identyczne zarówno jakościowo, jak również i ilościowo.



Rys.7.64. Skręcanie pręta pryzmatycznego, MES-T-3, τ_{zx} – widok i warstwice, siatka 2



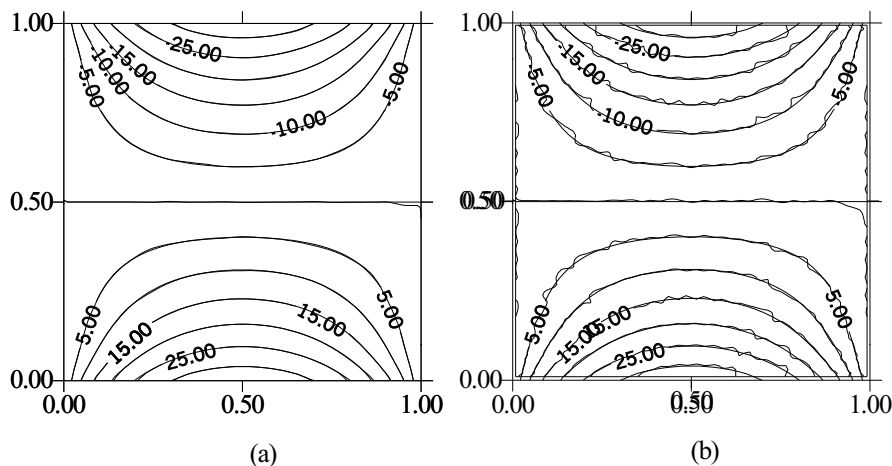
Rys.7.65. Skręcanie pręta pryzmatycznego, siatka 2: warstwy funkcji naprężenia MES-T-3 (a), MRS-lok. (b) oraz MES i MRS (c)



Rys.7.66. Warstwy τ_{zx} , siatka 2: MRS-lok, MES/MRS-postproc.

Na rys.7.67 zestawiono wyniki obliczeń dla τ_{zx} uzyskane kolejno techniką MRS-lok-MES/MRS-postproc. oraz MES/MRS-postproc.-MES. Widać, że dla pochodnych rozwiązania MES jest metodą znacznie mniej dokładną niż MRS,

lecz okazuje się, że postprocessing MRS na wynikach uzyskanych za pomocą MES daje doskonale rezultaty.



Rys.7.67. Warstwice τ_{zx} , siatka 2: MRS-lok-MES/MRS-postproc.(a), MES/MRS-postproc.-MES (b)

Przykład 7.6. Posługując się uogólnioną MRS, wykonano obliczenia testowe dla stacjonarnych problemów przepływu ciepła, gdzie równania przewodnictwa redukują się do równania Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna. Aby sprawdzić dokładność metod, rozwiązaliśmy zagadnienie zarówno w obszarze regularnym, jak i nieregularnym postawione następująco:

Rozwiązać równanie Laplace'a

$$\Delta T = 0 \quad \text{w} \quad \Omega$$

z warunkiem brzegowym Neumanna

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{na brzegu} \quad \partial\Omega \quad (A, B)$$

W punkcie A $x_A = 1.0, y_A = 3.0$ (rys.7.68) przyjęto warunek brzegowy Dirichleta (tzw. źródło punktowe)

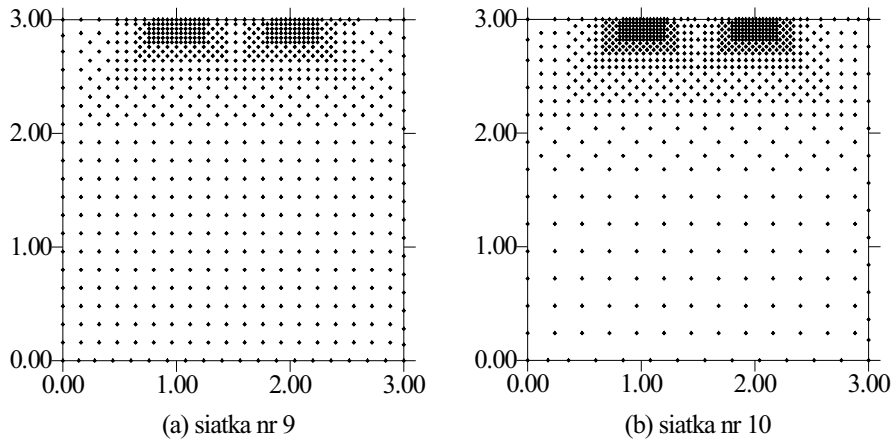
$$T_A = 1$$

zaś w punkcie B $x_B = 2.0, y_B = 3.0$ (rys.7.68) położono inny warunek punktowy

$$T_B = 0$$

Odpowiada to warunkom chłodzenia lub ogrzewania ciała przez źródła punktowe. Jest to sytuacja często spotykana w technice.

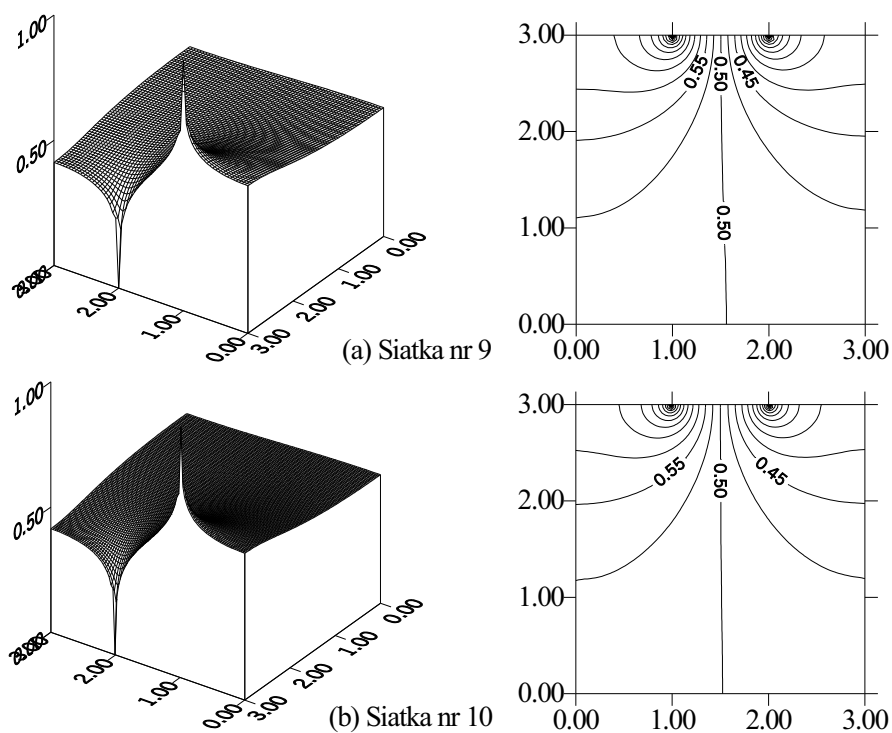
Do obliczeń zastosowano gwiazdy 9-węzłowe dla lokalnego sformułowania MRS. Na rys.7.68 zaprezentowano 2 siatki z zagęszczeniem wokół źródeł. Rys.7.69 pokazuje funkcję temperatury uzyskaną lokalną MRS dla różnych siatek. Na rys.7.69a-d pokazano również warstwy funkcji temperatury. Widać dużą gładkość rozwiązania.



Rys.7.68. Siatki dla problemu ze źródłami: nr 9–761 węzłów (a), nr 10–793 węzły (b)

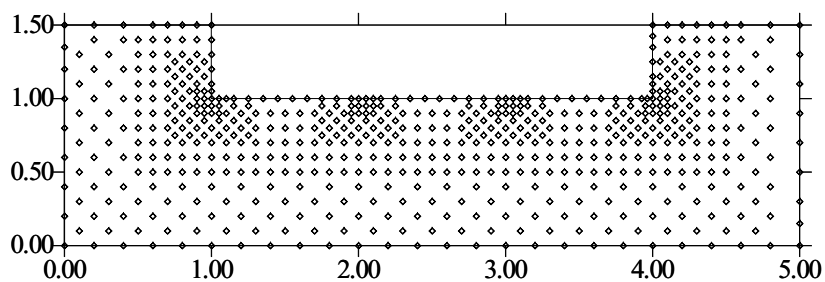
Analizując szczegółowo wyniki, stwierdzamy, iż zagęszczając siatkę, szczególnie wokół źródeł, wyniki poprawiały się. Na rys. 7.69 łatwo ocenić jakość rozwiązania po przebiegu warstwy $T = 0.5$, która powinna przebiegać przez środek obszaru z uwagi na to, że takie jest rozwiązanie ścisłe. Ten warunek dostatecznie dokładnie spełnia dopiero siatka nr 10.

Obliczenia powtórzono dla obszaru nieregularnego, rys.7.70, przyjmując źródła $T_A = 1$ i $T_B = 0$. Na rys.7.70 zaprezentowano siatkę przyjętą do obliczeń. Na kolejnych rysunkach (rys.7.71 i 7.72) pokazano warstwy rozwiązania i rzut aksonometryczny funkcji temperatury. Następnie siatkę zagęszczono (rys.7.70). Uzyskane rezultaty (rys.7.71 i 7.72) zbliżone są do poprzednich i świadczą o uzyskaniu wystarczającej dokładności, aczkolwiek można zauwa-



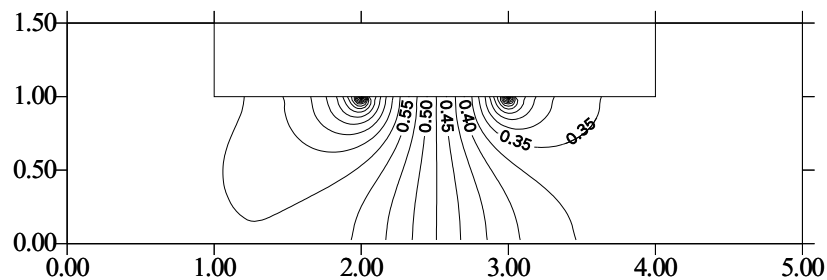
Rys.7.69. Rozwiązanie problemu ze źródłami – widok i warstwice – dla siatek: nr 9–761 węzłów (a), nr 10–793 węzły (b)

żyć pewne niewielkie nieregularności rozwiązania w pobliżu źródeł oraz we wklęsłych narożach.

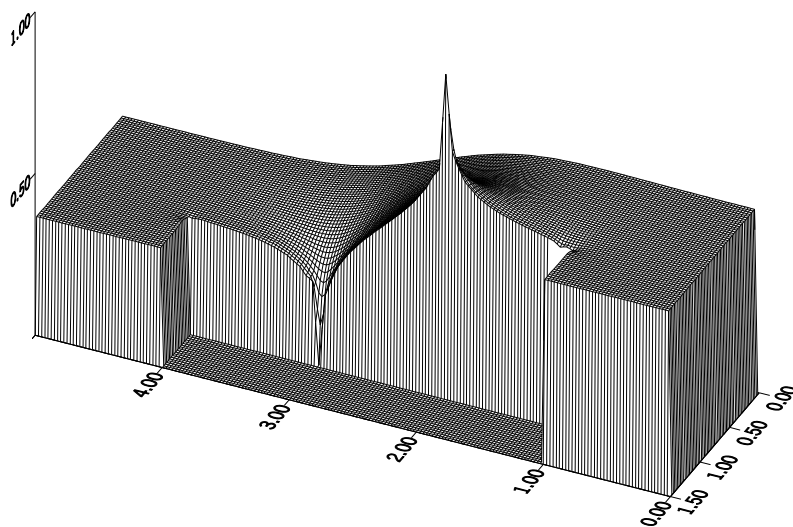


Rys.7.70. Siatka dla problemu ze źródłami – obszar nieregularny

Otrzymane wyniki świadczą o dużej dokładności lokalnej MRS, co stanowi



Rys.7.71. Problem ze źródłami – warstwice rozwiązania



Rys.7.72. Problem ze źródłami – widok rozwiązania

dobry prognostyk dla stosowania jej w złożonych zagadnieniach brzegowych.

Przykład 7.7. Rozważmy zginanie płyty cienkiej. Do rozwiązania wykorzystamy wariacyjną UMRS. W obliczeniach zastosujemy różne siatki (regularne i nieregularne). Dla niektórych zadań przedstawimy tempo zbieżności wyników aproksymacyjnych do ścisłych.

Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej problemu zginania płyty ma

postać

$$J = \frac{D_m}{2} \int_{\Omega} (\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega} p w d\Omega - P w \quad (7.209)$$

gdzie

D_m – sztywność płytowa (patrz p. 7.5.4),

w – ugięcie płyty,

p – obciążenie ciągłe, normalne do powierzchni płyty,

P – obciążenie skupione.

Przyjęto do dyskretyzacji problemu MRS, zatem aproksymację wyrazimy w postaci

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{q}, \quad \mathbf{D}\mathbf{u} = \{w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}\} \quad (7.210)$$

gdzie $\mathbf{D}\mathbf{u}$ jest operatorem różnicowym w punkcie centralnym gwiazdy, \mathbf{Q} – macierzą wzorów różnicowych, zaś $\mathbf{q} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ – wektorem wartości węzłowych funkcji ugięcia w . Układ równań MRS otrzymuje się, poszukując punktu stacjonarnego funkcjonału J (7.209)

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{D}\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{D}\mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0$$

Wzór na macierz sztywności otrzymujemy, dokonując drugiej wariacji funkcjonału

$$\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \left(\sum_i^{lpcalk} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{D}\mathbf{u}} \right) \mathbf{Q}_i \alpha_i = \sum_i^{lpcalk} \mathbf{Q}_i^T \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{D}\mathbf{u}^2} \mathbf{Q}_i \alpha_i$$

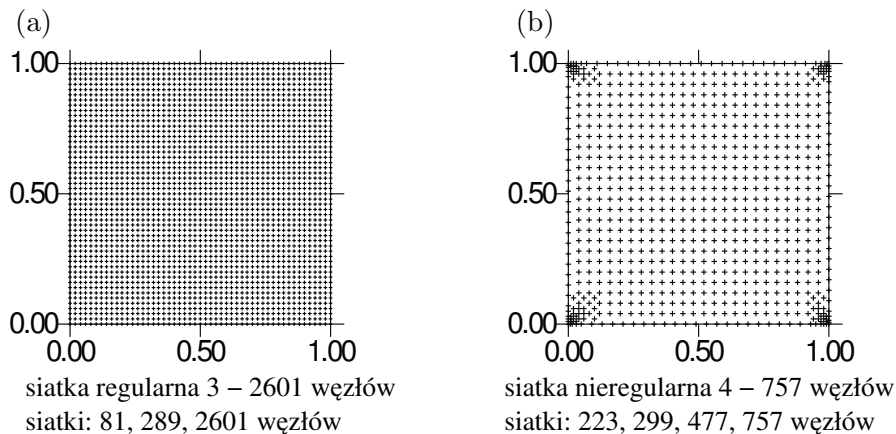
gdzie α_i jest wagą wynikającą z całkowania numerycznego.

Mając określony funkcjonał należy obliczyć pochodne $\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{D}\mathbf{u}^2}$.

Dla przykładu rozwiążemy płytę czworokątną swobodnie podpartą, obciążoną obciążeniem ciągłym o stałej wartości.

Do obliczeń przyjęto płytę kwadratową o wymiarach 1×1 m swobodnie podpartą, obciążoną obciążeniem ciągłym oraz stałe geometryczne, materiałowe i obciążenie: moduł Younga $E = 10000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, współczynnik Poissona $\nu = \frac{1}{6} = 0.1666667$, grubość płyty $h = 0.1$ m i obciążenie płyty równomiernie rozłożone o intensywności $p = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$. Ponadto założono, że płyta jest swobodnie podparta wzdłuż całego obwodu.

Przeprowadzono obliczenia dla kilku siatek, przyjmując siatki regularne (81, 289 i 2601 węzłów) i nieregularne (223, 299 477 i 757 węzłów). Dwie siatki o największej gęstości zaprezentowano na rys.7.73.



Rys.7.73. Przykładowe siatki przyjęte do obliczeń dla płyty kwadratowej swobodnie podpartej

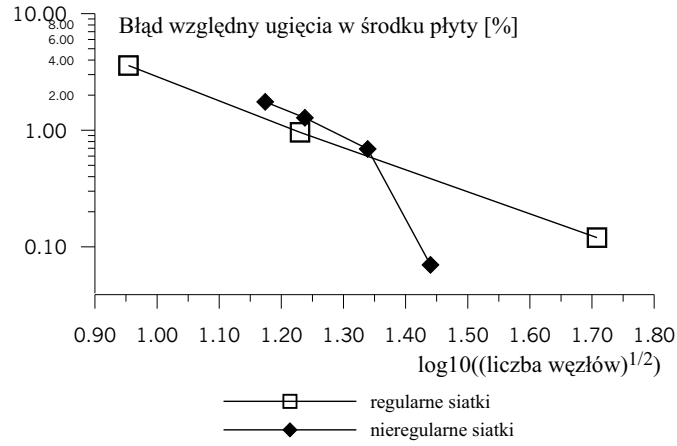
Wyniki otrzymane MRS wskazują na szybką zbieżność do wyników ścisłych. W tab.7.4 zamieszczono także błędy względne dla ugięcia oraz momentów m_x i m_y w środku ciężkości płyty.

Wyniki otrzymane MRS wskazują na szybką zbieżność do wyników ścisłych. Na rys.7.74 i 7.75 zaprezentowano tempo zbieżności rozwiązań dla ugięcia i momentu w środku płyty do wyników ścisłych.

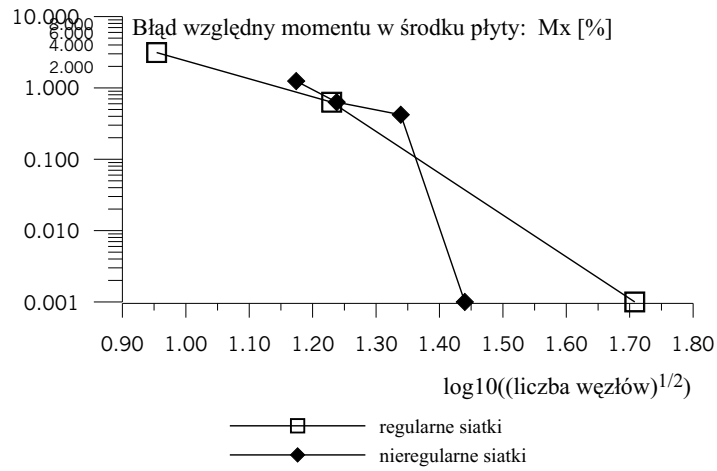
Omawiając wyniki łatwo zauważyć, że otrzymany błąd dla momentów jest istotnie mniejszy od błędu dla ugięć. Otrzymano tu więc podobnie nadzbieżność dla pochodnych lokalnych, tym razem dla pochodnych II rzędu.

Siatka	L. węz. - n	$\sqrt{(n)}$	błąd ugięcia [%]	m_x , błąd	m_y , błąd	min. i max d	$\frac{\text{min.d}}{\text{max.d}}$
00	16	4	0.004185, 2.33	0.0324 , 2.33	0.0324 , xx	0.05 , 0.25	2.0
01	36	6	0.005053, 2.33	0.04799, 2.33	0.04799, 2.33	0.05 , 0.25	2.0
02	121	6.16	0.004862, 2.66	0.0439 , 2.33	0.0439 , 2.33	0.05 , 0.25	2.0
reg	441	6.45	0.004656, 1.69	0.0439 , 2.28	0.0439 , 2.283	0.05 , 0.22	1.0
4	743	6.86	0.004769, 0.68	0.0429 , 0.00	0.0430 , 0.2	0.015, 0.10	6.5

Tabela 7.4. Płyta kwadratowa swobodnie podparta, obciążona ciśnieniem równomiernie złożonym.



Rys.7.74. Płyta kwadratowa swobodnie podparta, proces zbieżności dla ugięcia w środku płyty



Rys.7.75. Płyta kwadratowa swobodnie podparta, proces zbieżności dla momentów w środku płyty

7.7. Metody bezsiatkowe – zagadnienia zaawansowane

7.8. Uwagi wstępne

Pierwszą część rozdziału poświęcimy uogólnionej aproksymacji funkcji, która nas doprowadzi do zdefiniowania pochodnej ciągłej (konsystentnej). Zostanie to wykorzystane w sformułowaniu tzw. bezelementowej metody Galerkina, która jest szczególnie użyteczna w skomplikowanych zagadnieniach mechaniki (analiza propagacji rysy, duże deformacje ciał, zagadnienia lokalizacji odkształceń etc.)

W tym rozdziale opiszemy bezelementową metodę Galerkina będącą pewną wersją wariacyjnej MRS. Na końcu rozdziału zamieścimy i skomentujemy sposoby efektywnej generacji pochodnych konsystentnych.

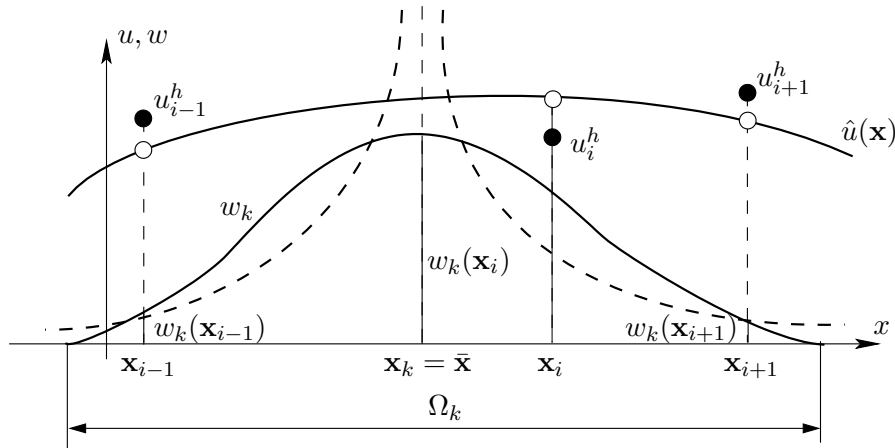
Podstawowym uogólnieniem, wprowadzonym w niniejszym rozdziale, jest wprowadzenie tzw. pochodnej konsystentnej (ciągłej). Sama aproksymacja pozostaje bez zmian, bo zawsze wynika z lokalnego rozwinięcia funkcji w szereg w danym punkcie. I nie ma znaczenia, jakie funkcje bazowe zostaną użyte i w jakim układzie określone. Co najwyżej stopień stabilności aproksymacji oraz zbieżność będą lepsze lub gorsze.

Dokonując różniczkowania lokalnej aproksymacji, pochodne tej aproksymacji będą nieciągłe od punktu do punktu, bo w każdym punkcie mamy inne rozwinięcie funkcji. Chodzi o to, by uciąglić pochodne, a więc uwzględnić fakt, że funkcja aproksymacyjna zmienia się od punktu do punktu. Jest to istotne z punktu widzenia teoretycznego, bo w każdym sformułowaniu wariacyjnym jest tak, że z lewej strony równania mamy pochodne, z prawej funkcje. Jeśli będą używane pochodne konsystentne, to wtedy stopień ciągłości lewej i prawej strony jest porównywalny. Jeśli natomiast będą używane pochodne lokalne, wprowadzamy do lewej strony równania nieciągłości oraz niezgodność między aproksymowaną funkcją a jej pochodnymi. Jest rzeczą oczywistą, że własności schematu aproksymacyjnego z ciągłymi pochodnymi będą inne (m.in. jednostajna zbieżność) niż z pochodnymi lokalnymi.

7.9. Uogólnienie aproksymacji funkcji

7.9.1. Metoda ustalonych wielokrotnych najmniejszych kwadratów

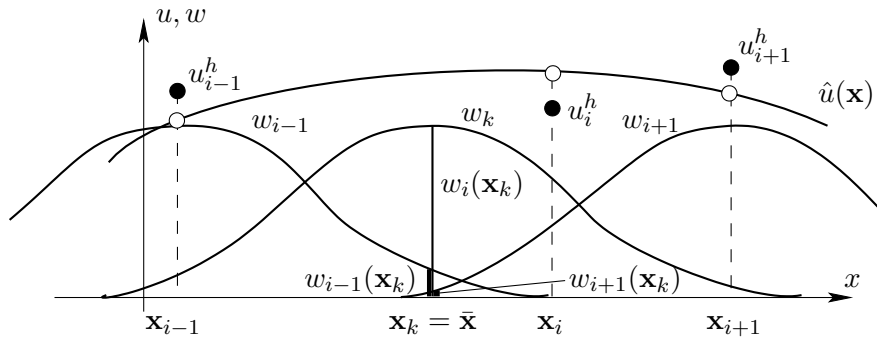
Oznaczmy przez \hat{u}_i parametr węzłowy funkcji u , przy czym $\hat{u}_i \neq u^h(\mathbf{x}_i)$ oraz \mathbf{x}_i są współrzędnymi punktów węzłowych $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$. Obecnie przypomnimy ideę ważonych ruchomych najmniejszych kwadratów (WRNK). Polega ona na tym, że minimalizujemy kwadraty odległości pomiędzy funkcją aproksymacyjną \hat{u}_i a wartościami węzłowymi u_i^h , mnożąc je przez funkcję wagową, która uwzględnia wpływ odległości rozpatrywanego węzła od punktu, w którym poszukuje się aproksymacji, na błąd w danym punkcie. Koncepcję metody ważonych ruchomych najmniejszych kwadratów ilustruje rys.7.76. Waga w jest zdefiniowana w punkcie $\bar{\mathbf{x}}$, gdzie nieznaną funkcję \hat{u} jest obliczana i przyjmuje w tym punkcie największą wartość. Ma ona zdefiniowany kształt i nośnik w zależności od położenia punktu $\bar{\mathbf{x}}$ – zob. rys.7.76.



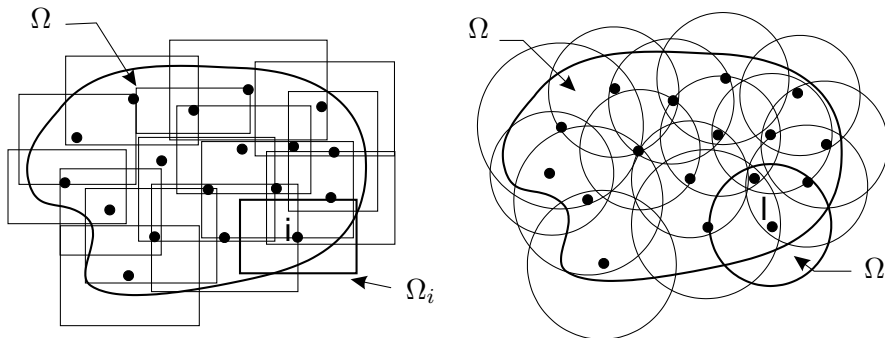
Rys.7.76. Metoda ważonych ruchomych najmniejszych kwadratów

Na tle koncepcji WRNK wprowadzimy metodę ustalonych wielokrotnych najmniejszych kwadratów (UWNK). W każdym punkcie obszaru funkcja wagi powinna być dopasowana do lokalnej gęstości punktów. Dlatego też trudno jest zdefiniować poprawnie funkcję wagi w dowolnym punkcie obszaru, gdyż rodzi to nieskończenie wiele możliwości. Z tego powodu zaproponowano nieco inne podejście. Ideą tą jest związanie funkcji wagowej w_i z każdym węzłem \mathbf{x}_i , dzięki czemu można ograniczyć liczbę różnych funkcji wagowych, rys.7.77,

dostosowując je do lokalnej gęstości punktów (zob. również sytuację dwuwymiarową, rys.7.78).



Rys.7.77. Metoda wielokrotnych ustalonych najmniejszych kwadratów



Rys.7.78. Nakładanie się obszarów wpływu dla obszarów dwuwymiarowych

Funkcje te następnie są użyte do ważenia kwadratów różnic między aproksymacją a wartością funkcji w dowolnym punkcie. Jeżeli punkty są rozłożone jednorodnie w obszarze i przyjmiemy, że funkcja wagi w dowolnym punkcie obszaru w_x nie zmienia kształtu od punktu do punktu i jest symetryczna, to słuszna jest relacja

$$w_x(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = w_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (7.211)$$

Z kolei związanie tej funkcji z każdym węzłem obszaru powoduje, że zamieniają się rolami punkty \mathbf{x} i \mathbf{x}_k

$$w_x(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = w_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

I to jest waga dla metody UWRK.

Funkcję u rozwijamy w szereg dookoła punktu $\bar{\mathbf{x}}$. Lokalną aproksymację w punkcie $\bar{\mathbf{x}}$ możemy zapisać jako

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (7.212)$$

gdzie $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ jest kompletnym wielomianem rzędu p z m współczynnikami, \mathbf{a} – wektorem współczynników zależnych od punktu $\bar{\mathbf{x}}$, określonych następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^p, x^k y^{p-k}, \dots, y^p], \\ \mathbf{a}^T(\bar{\mathbf{x}}) &= [a_0(\bar{\mathbf{x}}), a_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, a_m(\bar{\mathbf{x}})] \end{aligned} \quad (7.213)$$

Procedura minimalizacji prowadząca do znalezienia współczynników $a_j(\bar{\mathbf{x}})$ jest opisana wzorami (7.158)–(7.164).

Poniżej zdefiniujemy macierze UWNK: macierz \mathbf{P} (prostokątną)

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (7.214)$$

oraz \mathbf{W} – diagonalną macierzą wag

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} w_1(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (7.215)$$

Macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} , otrzymane w wyniku minimalizacji funkcjonału, mają dla metody UWNK postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \mathbf{B} \mathbf{P} = \sum_{j=1}^n w_j(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{P}^T \mathbf{W} = [w_1(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \end{aligned} \quad (7.216)$$

Przytoczone powyższymi wzorami sformułowanie jest ważne również dla metody WRNK, jeśli przyjmie się, że jest tylko jedna funkcja wagowa w punkcie \mathbf{x}_k , w którym poszukuje się aproksymacji, czyli należy przyjąć założenie

$$w_j(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_j) = w_k(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \quad (7.217)$$

Aproksymację UWNK można zapisać jako

$$u^h = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x}) u_i = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{u} \quad (7.218)$$

gdzie

$$\tilde{N}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (7.219)$$

są funkcjami kształtu w metodach bezsiatkowych, zaś \mathbf{Q}_i jest i-tą kolumną macierzy \mathbf{Q} .

Wprowadzając lokalny układ współrzędnych związany z punktem $\bar{\mathbf{x}}$ jako $\mathbf{h}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$ i zapisując w nim zarówno wektory bazy (w postaci wynikającej z szeregu Taylora), jak i wagi, macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} można wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^n w_j(-\mathbf{h}_j) \mathbf{p}(\mathbf{h}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{h}_j) \\ \mathbf{B} &= [w_1(-\mathbf{h}_1) \mathbf{p}(\mathbf{h}_1), w_2(-\mathbf{h}_2) \mathbf{p}(\mathbf{h}_2), \dots, w_k(-\mathbf{h}_n) \mathbf{p}(\mathbf{h}_n)] \end{aligned}$$

Obszary wpływu dla poszczególnych węzłów są na ogół różne, stąd układy lokalne dla węzłów są różne, a z uwagi na to, że funkcje wagi są zapisane w układach lokalnych, trzeba ten fakt uwzględnić w różniczkowaniu.

Macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})$ jest dobrze znaną z MRS macierzą wzorów aproksymacyjnych, aczkolwiek nie mającą wprost własności wzorów różnicowych. Natomiast jeśli wykorzystamy lokalny układ współrzędnych i funkcje bazowe będą miały formę z szeregu Taylora, \mathbf{Q} będzie macierzą wzorów różnicowych.

Bezsiatkowe funkcje kształtu, podobnie jak funkcje kształtu w MES, spełniają warunek kompletności

$$\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x}) = 1$$

Pochodne przestrzenne funkcji kształtu (np. pochodną $\frac{\partial}{\partial x}$) można zapisać jako

$$\tilde{N}_{i,x} = \mathbf{p}^T_{,x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i = \mathbf{p}^T_{,x} \mathbf{Q}_i \quad (7.220)$$

Z uwagi na to, że przedstawiona procedura aproksymacyjna wynika z metody najmniejszych kwadratów oraz $m < n$ mamy

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) \neq u_j^h \quad (7.221)$$

tj. funkcja aproksymacyjna nie odtwarza wprost wartości węzłowych. Jednakże dla $m = n$ otrzymuje się po prostu aproksymację MES, czyli $\hat{u}(x) = u_j^h$ i warunek delty Kroneckera jest ponownie spełniony.

Powracając do funkcji wagowych, należy zauważyć, że podstawowe cechy funkcji wagi w to

$$w_k(\bar{\mathbf{x}}) = 1 \quad w_k(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in \Omega_k \quad \text{oraz} \quad w_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \notin \Omega_k$$

Nośnik funkcji wagowej Ω_k definiuje *obszar wpływu*, na funkcjonal błędu metody najmniejszych kwadratów mają wpływ tylko te węzły, które leżą w strefie wpływu wagi (w jej nośniku).

Dla metody RNK funkcja wagowa jest zdefiniowana w układzie lokalnym związanym z punktem $\bar{\mathbf{x}}$. Dla metody UWRK funkcja wagowa jest związana z węzłem, zatem można uwzględnić tu nieco precyzyjniej gęstość siatki.

Jeżeli założymy, że waga zależy od odległości d od punktu $\bar{\mathbf{x}}$, otrzymamy

$$w = w(r) \quad d^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (7.222)$$

Na koniec tego rozdziału przedstawimy klasyfikację najczęściej spotykanych funkcji wagowych. Do chwili obecnej pojawiło się wiele funkcji wagowych, wykorzystanych przy wyprowadzaniu wzorów aproksymacyjnych. Pierwszą była waga osobliwa

$$w(d) = \frac{1}{d} \quad (7.223)$$

Inna, bardzo często używana, jest odwrotnością reszty szeregu Taylora (podniesioną do kwadratu), gdzie p jest rzędem rozwinięcia (Liszka, Orkisz)

$$w(d) = \frac{1}{d^{2(p+1)}} \quad (7.224)$$

Kolejna funkcja wagowa pojawiła się przy okazji aproksymacji danych doświadczalnych (W.Karmowski). Ma ona postać

$$w(d) = \left(d^2 + \frac{g^4}{d^2 + g^2} \right)^{-(p+1)} \quad (7.225)$$

przy czym parametr g decyduje o stopniu „lokalności” aproksymacji. Dla $g = 0$ otrzymujemy wagę jak poprzednio osobliwą, co oznacza, że mamy do czynienia z interpolacją, jeśli rozpatrywany punkt jest węzłem. Jeśli $g \rightarrow \infty$, aproksymacja staje się aproksymacją globalną.

Spośród różnych funkcji wagowych największą popularnością cieszą się jednak dwie: pierwsza oparta na funkcji sklejaney III stopnia

$$w(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} < d \leq 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (7.226)$$

druga oparta na funkcji sklejaney IV stopnia

$$w(d) = \begin{cases} 1 - 6d^2 + 8d^3 - 3d^4 & d \leq 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (7.227)$$

Waga trójkątna ma postać

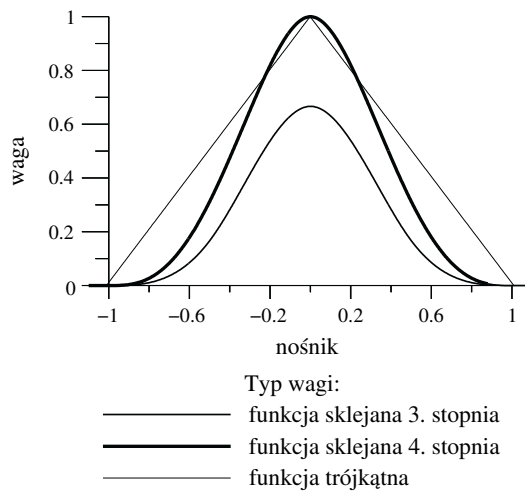
$$w(d) = \begin{cases} 1 - \frac{|d|}{d_{\max}}(1 - \epsilon) & |d| \leq \frac{d_{\max}}{1 - \epsilon} \\ w(d) = 0 & |d| > \frac{d_{\max}}{1 - \epsilon} \end{cases} \quad (7.228)$$

przy czym przyjęto $\epsilon = 10^{-3}$ dla najbardziej odległych punktów.

Na rys. 7.79 zaprezentowano kilka przykładowych funkcji wagowych. Warto zauważyć, że nie każda funkcja wagowa ma maksymalną wartość równą jeden.

Klasa ciągłości aproksymacji wynika ze stopnia funkcji bazowych oraz z klasy ciągłości wagi. Jeżeli funkcja wagowa określona jest na nośniku zwartym oraz jej wartość, a także wartości jej pochodnych są równe zeru na brzegu nośnika, powoduje to, że waga ma wysoką klasę ciągłości. Wtedy również funkcja aproksymująca ma odpowiednio wysoką klasę ciągłości, bo dziedziczy klasę ciągłości wagi. Przykładowo dla wagi w postaci splajnu III rzędu (ciągłość C^2) uzyskuje się dla aproksymacji globalnej klasę ciągłości C^2 , a więc jeszcze drugie pochodne są ciągłe. To stanowi jeden z głównych powodów tak ogromnego zainteresowania metodami bezsiatkowymi.

Przypadek, w którym punkt \bar{x} zajmuje pozycję dowolnego węzła, jest sytuacją szczególną i wymaga ostrożnego potraktowania, jeśli waga jest osobliwa, rys.7.76. Wartość aproksymowanej funkcji jest taka sama jak parametru węzłowego u^h i otrzymujemy interpolację – funkcja aproksymacyjna odtwarza dokładnie wartości węzłowe. Warto zwrócić uwagę, że nie mamy już jednego, globalnego, przepisu na aproksymowaną funkcję, jak w metodzie ustalonych kwadratów, lecz w każdym punkcie obszaru przepis na aproksymację funkcji jest inny. I to zasadniczo odróżnia metody bezsiatkowe od MES.



Rys.7.79. Wagi typu: funktorii sklejanych – sześcienna i czwartego stopnia oraz waga trójkątna

7.9.2. Aproksymacja globalna

Lokalną aproksymację w punkcie $\bar{\mathbf{x}}$, dla metod ruchomych i ustalonych wielokrotnych kwadratów, zapisaną jako (zob. wzór (7.212))

$$u(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$$

możemy uogólnić. Przeprowadźmy teraz następujące rozumowanie. Zmierzając z punktem $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, mamy $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, tzn. żądamy obliczenia wartości funktoria kształtu $\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ w tym samym punkcie, w którym obliczyliśmy macierz aproksymacji lokalnej, czyli z krzywej aproksymacji lokalnej pozostawiamy tylko 1 punkt; otrzymujemy

$$u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (7.229)$$

Parametry a_i (współczynniki aproksymacji) nie są teraz stałe, lecz zmieniają się ciągle wraz ze zmianą położenia punktu \mathbf{x} , stąd odwracanie macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ jest konieczne w każdym punkcie, w którym poszukujemy funktoria \hat{u} . W ten sposób dochodzimy do definicji aproksymacji globalnej i globalnych funktorii kształtu.

Jeśli spełnione są następujące warunki:

- a) funktoria wagowa jest ciągła i różniczkowalna w Ω_k , czyli $\forall \mathbf{x} \in \Omega_k$ istnieją odpowiednie pochodne,

- b) funkcja wagowa znika na brzegu obszaru Ω_k oraz poza nim,
- c) liczba punktów n wewnątrz obszaru Ω_k jest równa lub większa niż parametr m oznaczający liczbę funkcji bazowych we wszystkich punktach $\mathbf{x} \in \Omega_k$,

wtedy definicja globalnych funkcji kształtu jest jednoznaczna. Dla dowolnego punktu \mathbf{x} mają one postać

$$\tilde{N}_j(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m p_l(\mathbf{x}) Q_{lj}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad (7.230)$$

oraz

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (7.231)$$

W związku z tym pochodne funkcji u^h będą obliczane jako pochodne z iloczynu funkcji

$$u(\mathbf{x})_{,x} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})_{,x} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x})_{,x} \quad (7.232)$$

Tak obliczone pochodne nazywać będziemy pochodnymi konsystentnymi, w odróżnieniu od pochodnych lokalnych, co w powyższym wzorze sprowadziłoby się do pominięcia po prawej stronie drugiego składnika.

Różniczkowanie funkcji kształtu będzie teraz procesem złożonym, bowiem $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ są macierzami zależnymi od położenia punktu, zatem będą podlegały różniczkowaniu tak samo jak funkcje bazowe.

Zapiszmy teraz związek na aproksymację funkcji u

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \tilde{N}_j(\mathbf{x}) u_j^h = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{u}^h \quad (7.233)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad (7.234)$$

Różniczkując relację (7.234), pochodną funkcji kształtu obliczymy jako ($j=x, y$)

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x})_{,j} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})_{,j} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})_{,j} \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})_{,j} \quad (7.235)$$

Pochodne macierzy $\mathbf{B}(\mathbf{x})_{,x}$ oraz $\mathbf{A}(\mathbf{x})_{,x}$ mają postać

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \quad (7.236)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x})_{,x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) = \\
&= \frac{\partial w}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & y_1^m \\ x_1 & x_1^2 & \dots & x_1 y_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^m & x_1 y_1^m & \dots & y_1^{2m} \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & \dots & y_2^m \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2 y_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_2^m & x_2 y_2^m & \dots & y_2^{2m} \end{bmatrix} + \\
&+ \dots + \frac{\partial w}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & \dots & y_n^m \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n y_n^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^m & x_n y_n^m & \dots & y_n^{2m} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.237}$$

Macierz $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})_{,j}$ obliczono przez zróżniczkowanie relacji $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$, co daje

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})_{,j} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})_{,j} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \tag{7.238}$$

Przykładowo

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{i,x} &= [\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_i(\mathbf{x})]_{,x} \\
&= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})_{,x} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})_{,x} \mathbf{B}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{i,x}(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})_{,x} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x})_{,x}
\end{aligned} \tag{7.239}$$

W dalszym ciągu pokażemy jak można efektywnie wykonać różniczkowanie funkcji kształtu i w sposób ekonomiczny obliczyć pochodne wyższych rzędów, uzyskując *konsystentną macierz wzorów różnicowych*, a więc reguły aproksymacyjne dla dowolnego rzędu operatora liniowego.

Powyższe funkcje kształtu również spełniają warunek kompletności

$$\sum_{j=1}^n \tilde{N}_j(\mathbf{x}) = 1$$

W matematyce taka relacja często nazywa się podziałem jedności. Aby była prawdziwa, funkcje bazowe muszą zawierać człon rzędu zerowego (czyli

liczbę 1). Zauważmy, że funkcje kształtu MWLS nie spełniają warunku delty Kroneckera, tj. $\tilde{N}_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$.

Rozwiązując problemy inżynierskie, istotne jest czy funkcje kształtu spełniają warunki kompletności zdefiniowane w p. 5.6.4 (ruchu sztywnego oraz stałego odkształcenia). Odpowiedź jest pozytywna, co dalej wyjaśnimy.

7.9.3. Rząd aproksymacji funkcji kształtu i warunki kompletności

W metodzie ustalonych najmniejszych kwadratów parametry \mathbf{a} są stałe w całym obszarze Ω_i , więc rząd aproksymacji jest dokładnie taki sam jak rząd funkcji bazowych $\mathbf{p}(x)$. Natomiast w metodzie ruchomych najmniejszych kwadratów i ustalonych wielokrotnych najmniejszych kwadratów parametry \mathbf{a} zależą od położenia punktu \mathbf{x} , zatem funkcja \hat{u} może zawierać człony wyższego rzędu niż w funkcjach bazowych \mathbf{p} . W literaturze zamieszczono dowód na to, że wprowadzone reguły mogą aproksymować (ściśle) przynajmniej wszystkie funkcje użyte do definicji \mathbf{p} , który obecnie przytoczymy. Jest on bardzo istotny, jeśli chodzi o zbieżność metody.

Rozważmy zbiór aproksymacji

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \tilde{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j \quad (7.240)$$

gdzie

$$\mathbf{u} = [\hat{u}_1(\mathbf{x}), \hat{u}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{u}_n(\mathbf{x})] \quad (7.241)$$

oraz

$$\mathbf{u}_j = [u_{j1}^h, u_{j2}^h, \dots, u_{jn}^h] \quad (7.242)$$

są lokalnymi wartościami aproksymacji, tj. u_{ji}^h są poszukiwanymi parametrami odpowiadającymi funkcji aproksymacyjnej \hat{u}_j . Podstawiając za każdą wartość u_{ji}^h wartość wielomianu $p_l(\mathbf{x}_j)$ (tj. l -ty człon w \mathbf{p}), mamy

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (7.243)$$

Teraz, używając definicji funkcji interpolacyjnej, otrzymujemy

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \tilde{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (7.244)$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{p}_i^T = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (7.245)$$

Po wykorzystaniu definicji \mathbf{B} (7.216) otrzymujemy

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1} \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{p}^T \quad (7.246)$$

zatem jest ściśle interpolowana każda funkcja, która definiuje wektor bazowy $\mathbf{p}(x)$. Oznacza to, że już dla liniowej bazy funkcje: zarówno stała, jak i liniowa są odtwarzane ściśle. Tym sposobem również i kryteria ruchu sztywnego oraz stałych odkształceń będą spełnione.

Jak wiadomo podstawą zbieżności MES jest spełnienie warunków kompletności i zgodności. Jak już podkreślono, warunki kompletności spełniają również funkcje kształtu metod bezsiatkowych. Czy to wystarczy do zapewnienia zbieżności metodzie przy rozwiązywaniu problemu brzegowego, to będzie można stwierdzić po aplikacji metody i rozpatrzeniu kilku innych problemów, np. faktu, że funkcje kształtu metod bezsiatkowych nie spełniają warunku delty Kroneckera, tzn. nie są interpolantami, lecz tzw. aproksymantami.

W MES warunki kompletności sprawdza się w tzw. *teście na łacie* (ang. *patch test*). Dla funkcji kształtu (i dwuwymiarowych problemów) mają one postać

$$\sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})x_i = x \quad \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})y_i = y \quad (7.247)$$

Warunki te są równoważne wynikowi poprzednio przeprowadzonego dowodu (który jest ogólniejszy).

Warunki kompletności dla pochodnych można wyprowadzić, różniczkując: (7.247)₂ po x , (7.247)₂ po y , (7.247)₃ po x i (7.247)₃ po y ; otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,x} x_i &= 1 & \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,y} x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,x} y_i &= 0 & \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,y} y_i &= 1 \end{aligned} \quad (7.248)$$

Warunki (7.247) i (7.248) są podstawą do zapewnienia zbieżności metod bezsiatkowych. Mogą być także wykorzystane do generacji wzorów aproksymacyjnych metod bezsiatkowych.

7.10. Bezelementowa metoda Galerkina

7.10.1. Uwagi ogólne

Obecnie przedstawimy bliżej wersję metody bezsiatkowej, zwaną w literaturze *bezelementową metodą Galerkina (BMG)*. Jak już to wcześniej powiedzieliśmy, ta nowa nazwa wariacyjnej MRS wynika z wykorzystania metody Bubnowa-Galerkina zastosowanej do wyprowadzenia sformułowania słabego rozważanego problemu. Pewną cechą wyróżniającą tę metodę jest to, że przy jej formułowaniu zwrócono szczególną uwagę na konieczność możliwie ścisłego spełnienia warunków brzegowych Dirichleta i to zarówno jednorodnych, jak i niejednorodnych. Konieczność takiego specjalnego potraktowania tych warunków brzegowych wynika z cechy metody najmniejszych kwadratów. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do aproksymacji funkcji powoduje, że w układzie równań metod bezsiatkowych niewiadomymi nie są, na ogół, wielkości poszukiwanego pola w węzłach, lecz parametry węzłowe tylko w pewnym przybliżeniu odpowiadające wartościom węzłowym poszukiwanego pola. Zatem narzucenie warunków brzegowych na parametry węzłowe jest dość istotnym uproszczeniem, które powoduje brak zbieżności, zwłaszcza dla gęstych siatek. Czytelnik zna pojęcie więzu gładkiego w mechanice. Jest to więz, którego praca wirtualna jest równa zero, np. podpora przegubowa, przegubowo-przesuwna, podpora z pełnym zamocowaniem. Praca więzu jest to bowiem praca reakcji na przemieszczeniu punktu podparcia i albo przemieszczenie jest równe zero, albo reakcja – prostopadła do kierunku przemieszczenia punktu podparcia. Jeżeli tego typu zamocowania nie zostaną zrealizowane w metodach bezsiatkowych precyzyjnie, więzy powyższe stają się niegładkie, jest w nich produkowana pewna dodatkowa praca, będąca wynikiem przyjętego sposobu aproksymacji, co powoduje brak zbieżności zarówno w strefie, gdzie nałożono warunki Dirichleta, jak i globalnie w obszarze.

Na przykładach zagadnień brzegowych zostanie wprowadzona koncepcja BMG. W pierwszej kolejności rozpatrzony będzie przypadek jednowymiarowy.

7.10.2. BMG w zagadnieniach jednowymiarowych

Obecnie zostanie pokazane jak można sformułować równania BMG dla przypadku jednowymiarowego na znanym już przykładzie rozciąganej pręta. Zostaną określone podstawowe parametry BMG, tj. sposób aproksymacji i całkowania. Czytelnik, mamy nadzieję, będzie miał sposobność wyrobienia sobie poglądu na możliwości metody oraz na to, jak prowadzić obliczenia, by uzyskać maksymalną dokładność minimalnym kosztem. Do obliczeń zastosowano również klasyczną MRS oraz MES, co pozwoliło na porównanie wyników tych metod oraz na ocenę dokładności BMG.

Przykład 7.8. Rozważmy zagadnienie brzegowe deformacji pręta rozciąganej rozwiązywane w przykładzie 7.1 i opisane równaniami

$$\begin{aligned} -EA \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x) & 0 < x < L \\ u(0) &= u^0 & \text{na brzegu } x = 0 \\ EA \frac{du}{dx}(L) &= P & \text{na brzegu } x = L \end{aligned} \quad (7.249)$$

Celem otrzymania dyskretnych równań problemu założmy, że funkcje aproksymujące $u \in H^1$, mnożniki Lagrange'a, za pomocą których spełnimy warunki brzegowe $\lambda \in H^0$, dla wszystkich funkcji testujących

$$\delta v \in H^1 \quad \text{i} \quad \delta \lambda \in H^0$$

gdzie H^0 i H^1 są przestrzeniami Hilberta rzędu zerowego i pierwszego.

Przemnażając (7.249)₁ przez funkcję testową δv i całkując przez części, pierwszy człon równania (7.249)₁ (dla wygody wykorzystamy oznaczenie pochodnej $\frac{d(\cdot)}{dx} \equiv (\cdot)'$) przyjmie formę

$$\int_0^L \delta v [AEu'' + f(x)] dx = - \int_0^L \delta v' AEu' dx + \delta v AEu' \Big|_0^L + \int_0^L \delta v f(x) dx$$

Drugi składnik po prawej stronie można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \delta v AEu' \Big|_0^L &= \delta v [AEu'(L) - AEu'(0)] = \delta v [P(L) - P(0)] = \\ &= \delta v P(L) + \delta v \lambda(0) \end{aligned}$$

gdzie $AEu'(L) = P(L) = P$, $AEu'(0) = P(0)$. Mnożnik λ ma interpretację reakcji, bowiem

$$\lambda(0) = -P(0) = R$$

Jak już to wiemy poprzez całkowanie przez części doprowadziliśmy do wciągnięcia naturalnego warunku brzegowego (7.249)₂ do zasady wariacyjnej, co w konsekwencji oznacza jego spełnienie. Wykorzystując rezultaty całkowania przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta v [AEu'' + f(x)] dx &= - \int_0^L \delta v' AEu' dx + \delta v P(L) + \delta v \lambda(0) + \\ &+ \int_0^L \delta v f(x) dx + \delta \lambda (u - u^0) = 0 \end{aligned} \quad (7.250)$$

W równaniu (7.250) dołożyliśmy dodatkowo człon $\delta \lambda^t (u - u^0) |_{x=0}$, który pojawia się dlatego, że funkcje próbne (aproksymacyjne) nie spełniają warunku brzegowego Dirichleta. Aby komentarz był pełny, podkreślmy, iż człon $\delta v \lambda |_{x=0}$ pojawia się dlatego, że funkcje testowe (wagowe) nie spełniają warunku brzegowego Dirichleta.

Wprowadzając aproksymację (przez K oznaczono numer stopnia swobody, dla którego ustalony jest warunek brzegowy Dirichleta; po dużych literach K nie ma sumowania)

$$\delta v = \tilde{N}_i \delta v_i \quad u = \tilde{N}_i u_i \quad \lambda = \tilde{N}_{\lambda K} \Lambda_K \quad \delta \lambda = \tilde{N}_{\lambda K} \delta \Lambda_K$$

oraz wykorzystując fakt, że

$$\delta v' = \tilde{N}'_i \delta v_i \quad u' = \tilde{N}'_i u_i$$

mamy

$$\begin{aligned} \delta v_i \left[\int_0^L \tilde{N}'_i A E \tilde{N}'_j dx u_j - \tilde{N}_i P(L) - (\tilde{N}_i \tilde{N}_{\lambda K}) |_{x=0} - \int_0^L \tilde{N}_i f(x) dx \right] + \\ + \delta \Lambda_K \left[\tilde{N}_{\lambda K} (-\tilde{N}_i u_i + u^0) \right] |_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (7.251)$$

i dalej

$$\delta v_i [K_{ij} u_j + G_{iK} \Lambda_K - f_i] + \delta \Lambda_K [G_{Ki} u_i + 0 \Lambda_K - q_K] = 0$$

Z powyższego równania widać, że macierze definiujące problem mają postać

$$K_{ij} = \int_0^L \tilde{N}'_i A E \tilde{N}'_j dx, \quad G_{iK} = -[\tilde{N}_i \tilde{N}_{\lambda K}]|_{x=0} \quad (7.252)$$

$$f_i = +\tilde{N}_i P(L) + \int_0^L \tilde{N}_i f(x) dx \quad q_K = -[\tilde{N}_{\lambda K} u^0]|_{x=0} \quad (7.253)$$

Ostatecznie układ równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (7.254)$$

gdzie $\boldsymbol{\Lambda} = [\Lambda_K]$, $\mathbf{0} = [0]$ oraz $\mathbf{q} = [q_K]$. Jeśli podstawowy warunek brzegowy jest narzucony w wielu węzłach, macierze $\boldsymbol{\Lambda}$, $\mathbf{0}$, \mathbf{q} rozrastają się.

Przedstawiona powyżej dyskretyzacja zagadnienia, w połączeniu z metodą najmniejszych kwadratów zastosowanych do generacji funkcji kształtu, jest nazywana *bezelementową metodą Galerkiną*.

Oprogramowanie równań (7.254) jest nieco trudniejsze niż równań MES. Należy podkreślić, że układ równań (7.254) jest układem z tzw. punktami siodłowymi (zera na przekątnej głównej układu). Stanowi to konsekwencję spełnienia podstawowych warunków brzegowych poprzez wprowadzenie mnożników Lagrange'a.

Istnieje inna możliwość spełnienia warunków brzegowych w metodach bezsiatkowych poprzez połączenie tych metod z MES, co daje automatycznie możliwość wykorzystania interpolacyjnego charakteru funkcji kształtu MES, a co za tym idzie – spełnienia *a priori* podstawowych warunków brzegowych.

Obecnie przedstawimy rozwiązanie numeryczne problemu rozciąganego pręta czterema różnymi metodami: MES, lokalną i wariacyjną MRS oraz BMG. Analizę przeprowadzono za pomocą czterech programów, nazwanych: MES1, LOKMRS1, VARMRS i GAL1⁹. Łatwo można zatem przypisać program odpowiedniej metodzie. Stosowanie programów jest bardzo proste z uwagi na to,

⁹Programy te, wyposażone w grafikę, napisane zostały w MATLAB-ie. Użytkownik może je na własne potrzeby modyfikować, gdyż znajdują się one na stronie internetowej Instytutu L5, WIL.

że głównymi danymi są: liczba węzłów użytych do dyskretyzacji, moduł Younga oraz pole przekroju pręta. Ponadto w programie GAL1 można wybrać typ aproksymacji, tj. czy aproksymacja metody najmniejszych kwadratów zdefiniowana jest w układzie lokalnym, czy globalnym. Ma to duże znaczenie dla stabilności wyników.

W otrzymanych wynikach kryje się cała złożoność metod numerycznych, dlatego też przeanalizujemy szczegółowo ten przykład.

Na rys.7.80a zaprezentowano proces zbieżności wyników aproksymacyjnych do ścisłych otrzymanych MES, lokalną MRS (wyniki dla MRS wariacyjnej są identyczne) oraz BMG dla siatek: 6, 11, 21, 41, 81, 161, 321, 641, 1281 i 2561-węzłowych.

Tempo zbieżności oraz błąd dla wszystkich metod poza BMG są podobne. Tempo zbieżności BMG jest największe. Zastosowano do całkowania błędu 4. punktową kwadraturę Gaussa.

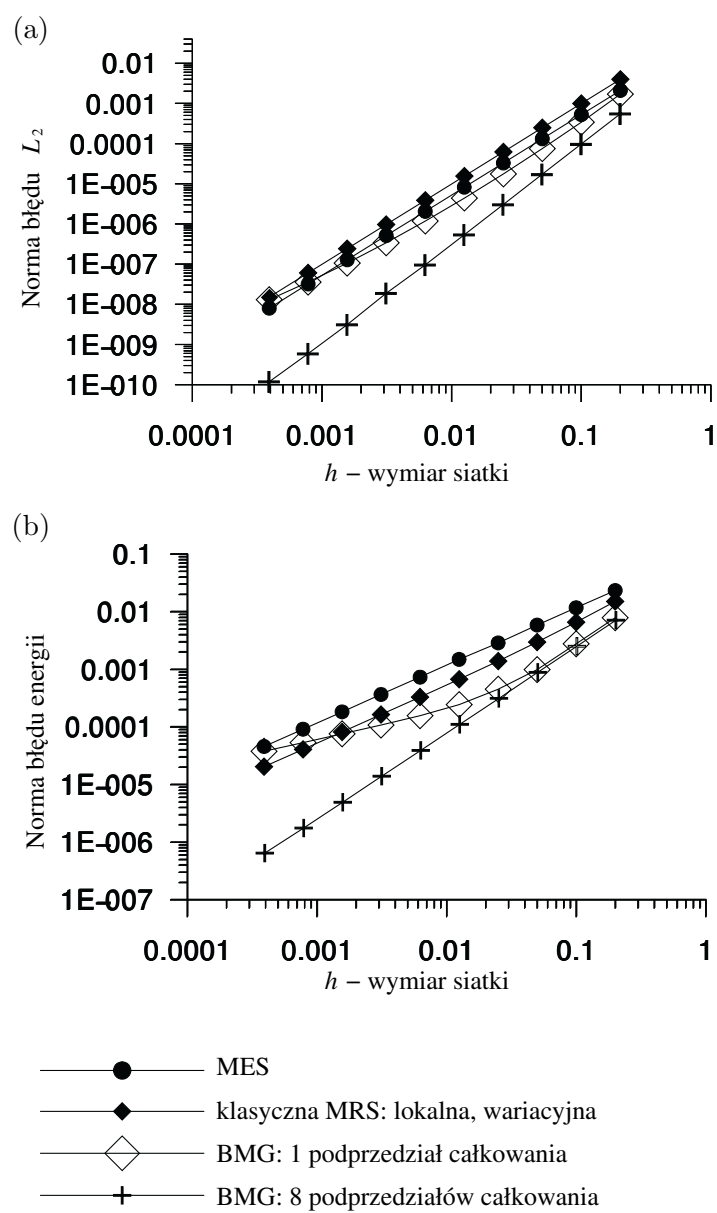
Na rys.7.80b pokazano proces zbieżności w normie energetycznej, przy czym tempo zbieżności dla BMG jest zdecydowanie największe. Wyniki uzyskano przy założeniu, że aproksymacja w beziatkowej MRS jest generowana w układzie lokalnym. Należy zwrócić uwagę, że dopiero dostatecznie dokładne całkowanie macierzy sztywności daje jednostajną zbieżność wyników w BMG (dotyczy to zwłaszcza gęstych siatek).

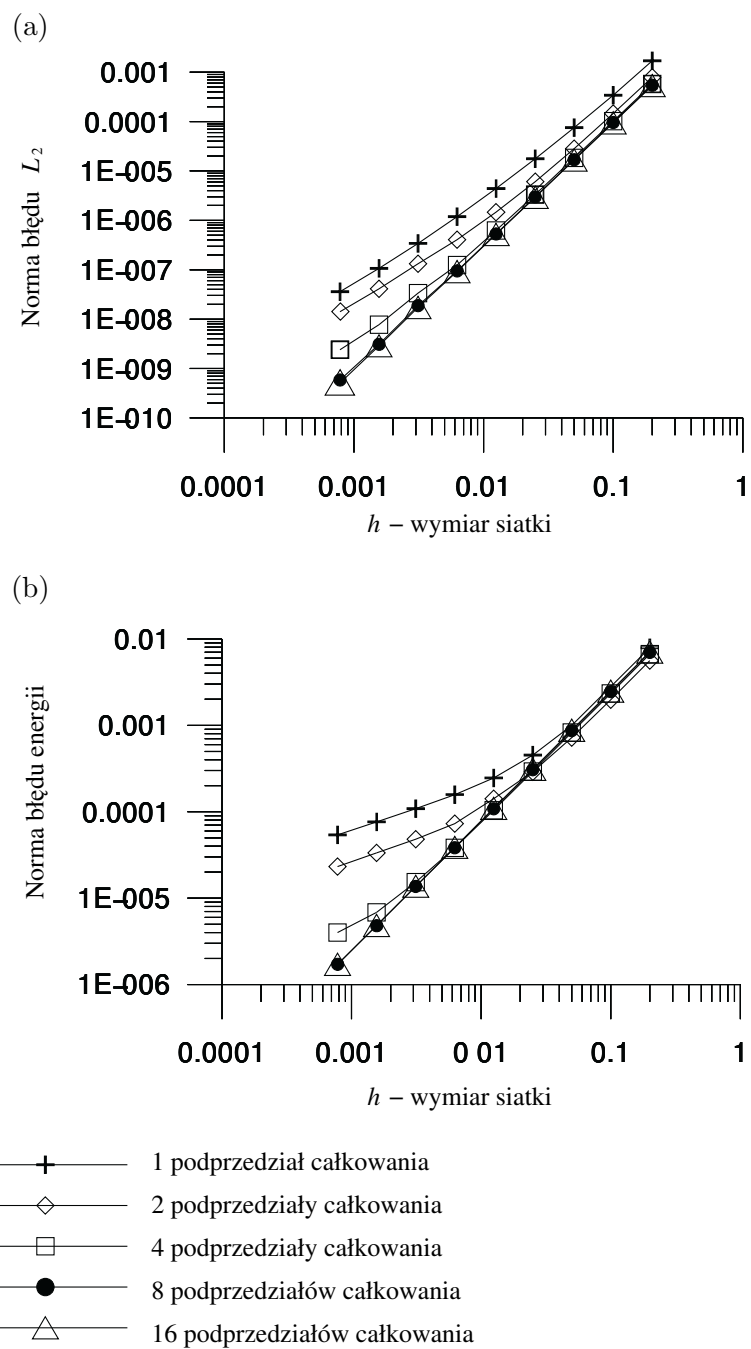
Na rys.7.81a i 7.81b pokazano rezultaty obliczeń, przyjmując różną dokładność całkowania macierzy sztywności, tj. całkując wzorem prostokątów, przy podziale pojedynczego elementu (przedziału) całkowania na 1, 2, 4, 8 i 16 podprzedziałów.

Przedstawione na rys.7.81a i 7.81b rezultaty wskazują na konieczność stosowania kwadratur o stosunkowo dużej dokładności, ale rezultaty są bardzo dobre.

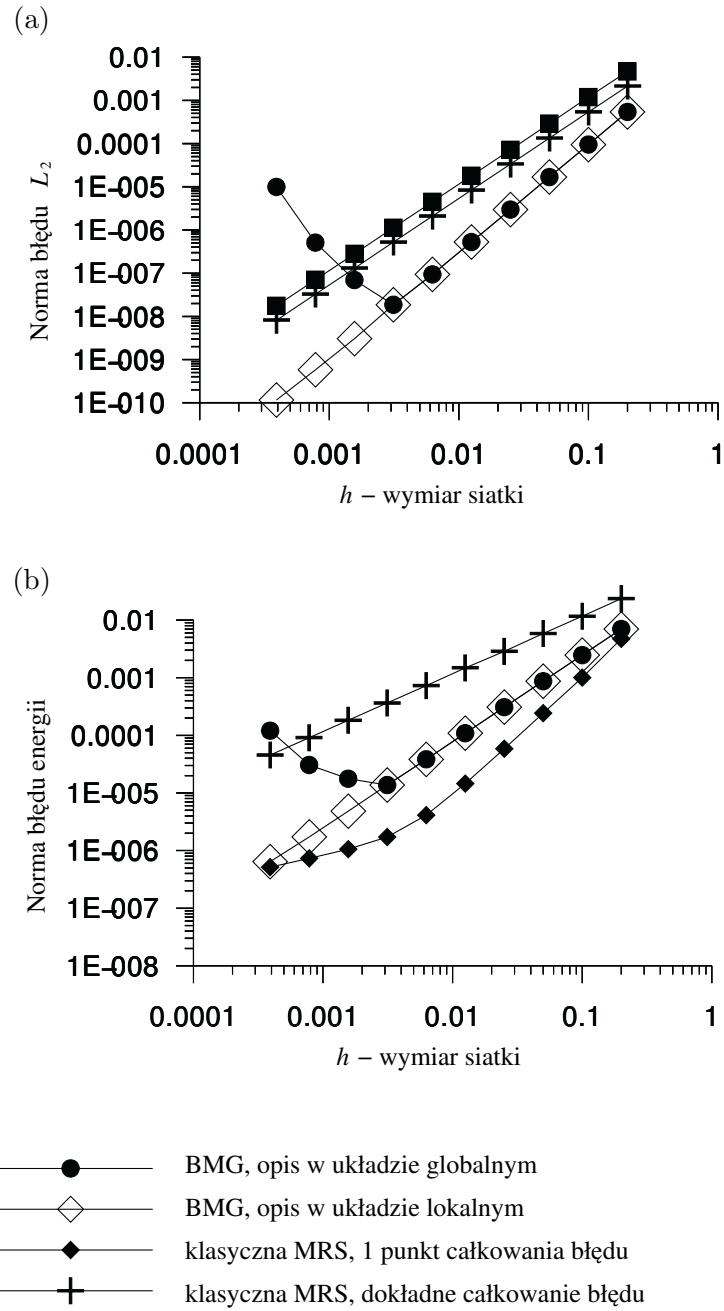
Na rys.7.82a pokazano zbieżność rozwiązania w normie L_2 dla wzorów aproksymacyjnych generowanych w układzie globalnym. Po przekroczeniu pewnego wymiaru siatki (dotyczy to gęstych siatek, powyżej 321 węzłów) wyniki rozbiegają się.

Na rys.7.82b zaprezentowano proces zbieżności w normie energetycznej dla BMG i aproksymacji generowanej w układzie lokalnym oraz globalnym. Rozbieżność procesu dla reguł aproksymacyjnych generowanych w układzie globalnym następuje dla gęstych siatek. Na tym samym rysunku zaprezentowano błąd dla MRS, całkując energię 1-punktową kwadraturą z węzłem całkowania w środku elementu całkowania. Stanowi to dowód na to, że pochodna

Rys.7.80. Proces zbieżności w normie L_2 (a) oraz w normie energii (b)



Rys.7.81. Wpływ dokładności całkowania na wyniki w normie L_2 (a) oraz energetycznej (b) dla różnej dokładności całkowania



Rys.7.82. Proces zbieżności w normie L_2 (a) oraz w normie energetycznej (b) dla aproksymacji generowanej w układzie globalnym i lokalnym

lokalna jest superzbieżna w tym punkcie. Oczywiście błąd jest obliczony nieprawidłowo, ale gdyby tylko wykorzystać środki elementów – to tak by się on kształtował.

Warto tu przywołać jeden ważny rezultat obliczeń. Otóż dla gęstych siatek, jeśli zastosuje się dostatecznie dokładną kwadraturę do całkowania macierzy sztywności oraz układ lokalny do generacji funkcji kształtu, otrzymuje się poprawny rezultat. Jednakże próba obliczenia naprężeń (pochodnych) dla reguł aproksymacyjnych generowanych w układzie globalnym kończy się niepowodzeniem. Oznacza to silną niestabilność wzorów aproksymacyjnych w przypadku, jeśli odległość między węzłami jest mała oraz ich współrzędne określone są w układzie globalnym. Nie można przeprowadzić nawet postprocessingu wyników.

Zamieszczone przykłady testowe wskazują na to, że trzeba być ostrożnym w ocenie metod, bo ich porównanie, nawet dla prostego przypadku, jest trudne, gdyż wyniki są niejednoznaczne. Dokładność wyników jest różna w różnych punktach, to samo dotyczy pochodnych. Użycie całkowych norm błędów wymaga prolongacji (przedłużenia) rozwiązania z punktów dyskretnych na cały przedział całkowania (element). Sposób wykonania tej operacji w istotny sposób wpłynie na wyniki i, w konsekwencji, na ich ocenę. Tym bardziej, że w zaprezentowanym przykładzie nie występuje efekt blokady rozwiązania, w związku z tym nawet prosta metoda może dać bardzo dobre rezultaty. Dlatego nie jest truizmem stwierdzenie, że każda metoda jest dobra, jeśli tylko daje dobre wyniki oraz możliwość oceny wyników *przez samą siebie*. Ta adaptacyjność metody, zwłaszcza w trudnych zagadnieniach, będzie często przesądzać o jej przydatności i stosowalności. Pod tym względem metody bezsiatkowe są wyjątkowe. Bardzo łatwo jest oszacować błąd rozwiązania oraz podnieść jego jakość przez dogęszczenie siatki w pewnej strefie lub podniesienie rzędu aproksymacji.

7.10.3. BMG w zagadnieniach dwuwymiarowych

Obecnie pokażemy jak sformułować równania BMG dla przypadku dwuwymiarowego. Obliczenia przykładowe zostaną przeprowadzone dla zginanego wspornika, obciążonego na końcu obciążeniem pionowym (stycznym do konturu) o rozkładzie parabolicznym. Zostaną określone podstawowe parametry BMG, tj. sposób aproksymacji i całkowania. Obliczenia porównamy z wynikami ścisłymi, co pozwoli na ocenę dokładności BMG.

Przykład 7.9. Rozważmy problem zginania wspornika jako dwuwymiarowe zagadnienie płaskiego stanu naprężenia. Sformułowanie wariacyjne problemu otrzymamy, wykorzystując równanie (5.102), które w naszym przypadku, po zastosowaniu zapisu macierzowego, przyjmie postać

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{w } \Omega \quad (7.255)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest tensorem naprężenia, odpowiadającym polu przemieszczeń \mathbf{u} , zaś $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ – wektorem sił masowych. Warunki brzegowe są następujące: naturalne (statyczne)

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}_0 \quad \text{na } \Gamma_t \quad (7.256)$$

podstawowe (kinematyczne)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{na } \Gamma_u \quad (7.257)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnym do brzegu.

Wariacyjna lub słaba postać równań równowagi może być otrzymana przez zastosowanie standardowej procedury Galerkina. Weźmy funkcje próbne $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1$, a mnożniki Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda} \in H^0$ dla wszystkich funkcji testowych $\delta \mathbf{v} \in H^1$ i $\delta \boldsymbol{\lambda} \in H^0$. Można udowodnić, że powyższy komplet równań będzie spełniony, jeśli sformułujemy następującą zasadę wariacyjną:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{t}^0 \, d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta \mathbf{v} \in H^1, \delta \boldsymbol{\lambda} \in H^0 \end{aligned} \quad (7.258)$$

przy czym $\nabla_s \mathbf{v}^T$ jest symetryczną częścią $\nabla \mathbf{v}^T$. Z uwagi na to, że funkcje próbne nie spełniają podstawowych warunków brzegowych, pojawia się dodatkowy człon $\int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \, d\Gamma$, który zapewnia spełnienie ww. warunków.

Człon $\int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{t}^0 \, d\Gamma$ pojawia się w wyniku całkowania przez części lokalnego sformułowania problemu i zapewnia spełnienie naturalnego warunku brzegowego (7.256).

Aby otrzymać dyskretną postać zasady (7.258), dyskretyzujemy funkcje próbne \mathbf{u} i funkcje testowe $\delta \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{u}}, \quad \delta \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{N}} \delta \hat{\mathbf{u}}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{N}}$ jest macierzą funkcji kształtu, zaś wektory

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

zawierają dwie składowe. Wektory

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}^n \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \hat{v}^n \end{bmatrix}$$

są wartościami węzłowymi zawierającymi te zmienne, których węzły wchodzi do definicji funkcji kształtu.

Podobnie dyskretyzujemy mnożniki Lagrange'a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \tilde{\mathbf{N}}_\lambda(s)\boldsymbol{\Lambda}, & \mathbf{x} &\in \Gamma_u \\ \delta\boldsymbol{\lambda} &= \tilde{\mathbf{N}}_\lambda(s)\delta\boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{x} &\in \Gamma_u \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{N}}_\lambda$ są funkcjami interpolacyjnymi metod bezsiatkowych lub Lagrange'a użytymi do aproksymacji mnożników Lagrange'a, a $\boldsymbol{\Lambda}$ – parametrami aproksymacji. Funkcje kształtu $\tilde{\mathbf{N}}_\lambda$ dotyczą tych węzłów, w których zadane są warunki brzegowe Dirichleta. Ostatecznie równanie (7.258) po dyskretyzacji przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (7.259)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega & G_{iK} &= \int_{\Gamma_u} \tilde{N}_i \tilde{N}_{\lambda K} d\Gamma \\ f_i &= \int_{\Gamma_t} \tilde{N}_i \mathbf{t}^0 d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{N}_i \mathbf{b} d\Omega & q_K &= - \int_{\Gamma_u} \tilde{N}_{\lambda K} \mathbf{u}^0 d\Gamma \end{aligned}$$

oraz

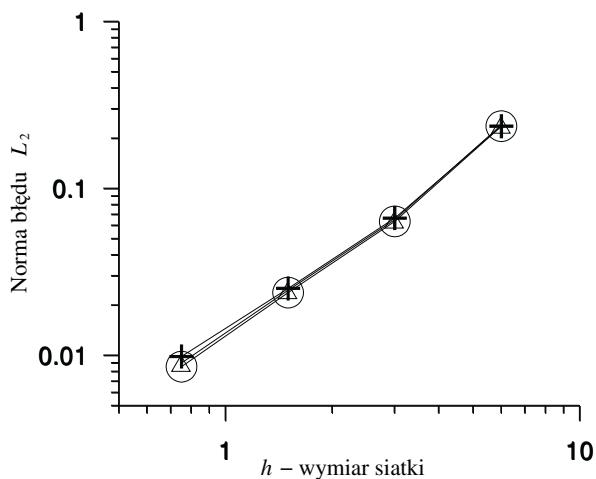
$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{i,x} & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{i,y} \\ \tilde{N}_{i,y} & \tilde{N}_{i,x} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{N}}_K = \begin{bmatrix} \tilde{N}_K & 0 \\ 0 & \tilde{N}_K \end{bmatrix}$$

Macierz modułów sprężystości \mathbf{D} wyrażona jest wzorem (5.121).

Schemat blokowy będący podstawą oprogramowania metody bezsiatkowej dla zagadnień dwuwymiarowych zamieszczono w dodatku B.

Obecnie przedstawimy przykład zastosowania metody bezsiatkowej. Wyniki dotyczą zginania wspornika obciążonego na końcu ciśnieniem stycznym do konturu o rozkładzie parabolicznym. Wypadkowa tego ciśnienia ma wartość 1000 kN, moduł Younga wynosi $E = 3 \cdot 10^7$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$. Użytkownik każdej metody dyskretnej oczekuje od niej, że będzie ona uniwersalna, dokładna, da wyniki przy stosunkowo niewielkim nakładzie czasu pracy zarówno człowieka, jak i komputera. Przedstawiany obecnie przykład pomoże rozstrzygnąć, czy BMG spełnia powyższe wymagania. Obliczenia wykonano dla szeregu różnych wymiarów wspornika, począwszy od 6×12 (bardzo krótki wspornik – ścinana tarcza – proporcje 1:2), do 1536×12 (bardzo długi wspornik – proporcje 128:1). Ponadto zastosowano ciągłe siatki węzłów o różniącym się module w kierunkach osi x i y . Proporcje oczek siatki zmieniały się od 1:8 do 8:1.

Na rys.7.83 zaprezentowano proces zbieżności dla różnej dokładności całkowania.



Wpływ liczby punktów całkowania na wyniki:

- + — 4 punkty całkowania
- △ — 16 punktów całkowania
- ○ — 36 punktów całkowania

Rys.7.83. Proces zbieżności dla wspornika dla różnej dokładności całkowania

Z otrzymanych rezultatów obliczeń wynika, że BMG daje wysokiej klasy

wyniki. Nawet dla bardzo wydłużonych wsporników zarówno ugięcie maksymalne, jak i maksymalne naprężenie normalne bardzo szybko zbiegały się do wyników ścisłych. Wyniki były równoważne tym, jakie otrzymuje się dla elementów skończonych bardzo wysokiego rzędu (np. trzeciego), przy czym w BMG zastosowano tylko liniową bazę. Warto podkreślić jest to, że otrzymywano dobre wyniki również dla bardzo wydłużonych oczek siatki o proporcji 8:1. I tak dla wspornika 96 x 12 błąd ugięcia dla BMG przy siatce kilkudziesięciu węzłów wynosił poniżej 0.1 %, zaś dla elementu skończonego czterowęzłowego prawie 40 % i przy zagęszczaniu siatki poprawiał się bardzo nieznacznie (z uwagi na efekt blokady rozwiązania).

Przyczyn takiego stanu rzeczy należy upatrywać w nieco innym rozkładzie błędów, szczególnie dla pochodnych. Otóż w MES błąd dla pochodnych ma bardzo nierównomierny rozkład po elemencie. W jednych punktach jest mały (ale to są szczególne punkty), w innych zaś bardzo duży. Natomiast w BMG błąd, szczególnie dla pochodnych, cechuje równomierny rozkład, nie ma punktów uprzywilejowanych, zatem metoda BMG jest bardziej ekonomiczna niż MES, gdyż inżyniera najbardziej interesują dobre wyniki dla pochodnych (naprężenia). Przy tym samym błędzie normy energii dla MES i BMG maksymalne błędy dla pochodnych w BMG są dużo mniejsze i to stanowi o sile tej metody. Ponadto w BMG nie potrzebujemy wykonywać postprocessingu wyników (dodatkowej obróbki danych), tak jak w MES. Ma to szczególne znaczenie w problemach fizycznie nieliniowych.

7.11. Efektywna generacja funkcji kształtu i ich pochodnych

Problem obliczania pochodnych konsystentnych funkcji kształtu jest taki sam jak już przedstawiony przy okazji wprowadzania aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów. Obecnie omówimy sposoby efektywnej generacji tych pochodnych.

Sposób I

Funkcje kształtu dla węzła i w metodach bezsiatkowych można zapisać jako

$$\tilde{N}_i = \sum_{j=0}^m p_j(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{ji}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i = \gamma(\mathbf{x}) \mathbf{B}_i \quad (7.260)$$

gdzie zastosowano podstawienie

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \quad (7.261)$$

(w konsekwencji daje to relację $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$, bowiem macierz \mathbf{A} jest symetryczna). Pochodną funkcji kształtu $\frac{\partial}{\partial x}$ można teraz zapisać jako

$$\tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,x} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,x} \mathbf{B}_i + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{i,x} \quad (7.262)$$

Różniczkując związek (7.261) otrzymujemy układ równań na $\boldsymbol{\gamma}(x)_{,x}$ jako

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,x} = \mathbf{p}(\mathbf{x})_{,x} - \mathbf{A}_{,x} \boldsymbol{\gamma} \quad (7.263)$$

Pochodną funkcji kształtu $\frac{\partial}{\partial y}$ można wyrazić jako

$$\tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,y} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,y} \mathbf{B}_i + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{i,y} \quad (7.264)$$

Różniczkując związek (7.262), otrzymujemy układ równań na $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,y}$ jako

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,y} = \mathbf{p}(\mathbf{x})_{,y} - \mathbf{A}_{,y} \boldsymbol{\gamma} \quad (7.265)$$

Drugą pochodną funkcji kształtu $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dla węzła i uzyskać można różniczkując związek (7.263).

Do określenia pochodnych funkcji kształtu potrzebne są jeszcze pochodne macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} :

$$\mathbf{A}_{,x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (7.266)$$

$$\mathbf{B}_{i,x} = \frac{\partial}{\partial x} w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i), \dots \text{itd.} \quad (7.267)$$

Zestawmy układy równań na $\boldsymbol{\gamma}$ i jego kolejne pochodne $\boldsymbol{\gamma}_{,x}, \dots$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,x} &= \mathbf{p}(\mathbf{x})_{,x} - \mathbf{A}_{,x} \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})_{,y} &= \mathbf{p}(\mathbf{x})_{,y} - \mathbf{A}_{,y} \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (7.268)$$

oraz wzory na funkcje kształtu i ich pochodne

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i(\mathbf{x}) &= \gamma(\mathbf{x})\mathbf{B}_i \\ \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,x} &= \gamma(\mathbf{x})_{,x}\mathbf{B}_i + \gamma(\mathbf{x})\mathbf{B}_{i,x} \\ \tilde{N}_i(\mathbf{x})_{,y} &= \gamma(\mathbf{x})_{,y}\mathbf{B}_i + \gamma(\mathbf{x})\mathbf{B}_{i,y}\end{aligned}\quad (7.269)$$

Układy równań na γ i jej pochodne mają, jak widać, taką samą strukturę, gdyż różnią się tylko prawymi stronami. Po rozwiązaniu jednego układu równań możemy rozwiązywać kolejny, uzyskując po kolei γ , $\gamma_{,x}$, $\gamma_{,y}$, a więc i \tilde{N}_i , $\tilde{N}_{i,x}$, $\tilde{N}_{i,y}$, ..., itd.

Układy równań na wektor γ i jego kolejne pochodne rozwiązujemy tylko raz. Aby uzyskać funkcje kształtu i ich pochodne, wystarczy przemnożyć później rezultaty przez wektory \mathbf{B}_i oraz ich pochodne. Jest to już mało pracochłonna operacja.

Sposób II

Związek definiujący funkcje kształtu ma postać

$$\tilde{N}_i = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i = \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_i \quad (7.270)$$

gdzie \mathbf{Q}_i jest i-tą kolumną macierzy aproksymacyjnej.

Macierz aproksymacyjna spełnia więc relację

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_i = \mathbf{B}_i \quad (7.271)$$

Obliczając pochodne funkcji kształtu $N_J = \frac{\partial}{\partial x_J}$ mamy

$$\tilde{N}_{i,J} = \mathbf{p}^T_{,J} \mathbf{Q}_i + \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_{i,J} \quad (7.272)$$

Różniczkując związek (7.271) otrzymujemy

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_{i,J} = \mathbf{B}_{i,J} - \mathbf{A}_{,J} \mathbf{Q}_i \quad (7.273)$$

skąd obliczamy pochodne $\mathbf{Q}_{i,J}$ potrzebne w związku (7.272).

Literatura

Literatura podstawowa

- [1] Akin, J.E., *Finite Element Analysis with Error Estimators*, Elsevier, 2005.
- [2] Austrell, P.-E., Dahlblom, O., Lindemann, J., Olsson, A., Olsson, K.-G., K.Persson, Petersson, H., Ristinmaa, M., Sandberg, G., Wernberg, P.-A. CALFEM– a finite element toolbox. <http://www.gorkon.byggmek.lth.se/Calfem/Calman/calfem34.pdf>, Version 3.4.
- [3] Bhatti, M.A., *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica and Matlab Computations*, John Wiley & Sons, INC, 2005.
- [4] Brebbia, C.A., Dominguez, J., *Boundary Elements, an Introductory Course*, Comp. Mech. Publications, 1989.
- [5] Burczyński, T., *Wspomaganie komputerowe CAD/CAM. Metoda elementów brzegowych*, WNT, Warszawa 1995.
- [6] Computer Science Technical Report CS94-376, University of California, San Diego, *FElt: User's Guide and Reference Manual*, 1993-2000.
- [7] Elsgolc, L.E., *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
- [8] Hughes, T.J.R., *The Finite Element Analysis. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, INC., 2000.
- [9] Hunter, P., Pullan, A., *FEM/BEM notes*, University of Auckland, New Zeland, <http://www.esc.auckland.ac.nz/Academic/Texts/FEM-BEM-notes.html>, last updated: February 16 2001.

-
- [10] Ottosen, N.S., Peterson, H., *Introduction to the Finite Element Method*, Prentice–Hall Inc., 1992.
- [11] Pelczar, A., *Elementy analizy funkcjonalnej*, skrypt uczelniany Nr 376, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1974.
- [12] Rakowski, G., Kacprzyk, Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993.
- [13] Reddy, J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw–Hill Book Company, 1986.
- [14] Reddy, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Intern. Edition, 2006.

Literatura do dalszego studiowania

- [15] Ainsworth, M., Oden, J.T., *A posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley&Sons, inc., New York 2000.
- [16] Akin, J.E., *Application and implementation of finite element method*, Academic Press, 1989.
- [17] Babuška, I., Melenk, J.M., *The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:289–314, 1996.
- [18] Banerjee, P.K., Butterfield, R., *Developments in boundary element methods – 1*, Applied Science Publishers, London 1979.
- [19] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Flemming, M., Krysl, P., *Meshless Methods: An Overview and Recent Development*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:3–44, 1996.
- [20] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley&Sons, Ltd., Chichester 2000.
- [21] Burden, R.L., Faires, J.D., *Numerical analysis*, PWS-KENT Publishing Company, 1985.

- [22] Duarte, C.A., Oden, J.T., *h-p Clouds, An h-p Meshless Method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 12:673–705, 1996.
- [23] Hunter, P., Pullan, A., *Introduction to Boundary Elements*, Springer-Verlag.
- [24] Kleiber, M. (red.), *Mechanika techniczna. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych (praca zbiorowa)*, PWN, Warszawa 1995.
- [25] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1989.
- [26] Liszka, T., Orkisz, J., *The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics*, Computer & Structures, 11:83–95, 1980.
- [27] Liu, W.K., Jun, S.J., Li, S., Zhang, Y.F., *Reproducing Kernel Particle Methods*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20:1081–1106, 1995.
- [28] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements*, Computational Mechanics, 10:307–318, 1992.
- [29] Onate, E., Idelson, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sacco, C., *A Stabilized Finite Point Method or Analysis of Fluid Mechanics Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:315–346, 1996.
- [30] Orkisz, J., *Finite Difference Method*, w: *Handbook of Computational Methods in Solid Mechanics*, M.Kleiber (red.), Springer, 1998.
- [31] Rakowski, G., *Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.
- [32] Stroboulis, T., Babuška, I., Kops, K., *The Design and Analysis of the Generalized Finite Element Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181:43–69, 2000.
- [33] Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T., *The Natural Element Method in Solid Mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 43:839–887, 1994.

- [34] Washizu, K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, 1982.
- [35] Waszczyszyn, Z., Cichoń, Cz., Radwańska, M., *Stability of structures by finite element methods*, Elsevier, 1994.
- [36] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The finite element method, sixth edition*, Elsevier, 2005.

Skorowidz

- Adaptacja siatki MES, 122
- Aproksymacja bezsiatkowa, 358
- Aproksymacja metodą ruchomych najmniejszych kwadratów, 280
- Aproksymacja UMRS:
 - w obszarze dwuwymiarowym, 376
 - w obszarze jednowymiarowym, 373
- Brzegowe równanie całkowite, 14, 18
- Całki niewłaściwe, 262
- Całkowanie przez części:
 - funkcja jednej zmiennej, 33
 - uogólnione całkowanie, 34
- Ciąg Cauchy'ego, 28
- Dopuszczalne funkcje, 37, 47
- Dyskretyzacja skończenie elementowa, 113
- Dystrybucja, 16
- Dywergencja, 34
- Dziedzina, 37
- Element skończony, 114
 - belkowy, 168, 171
 - kratowy, 156
 - liniowy, 128, (*patrz* kratowy)
 - ramowy, 179
 - trójkątny, 201
 - stałego odkształcenia, 223
- Elementowe stopnie swobody, 115
- Etapy procedury MES, 113–123
- Forma
 - dwuliniowa, 25
 - w przestrzeni skończenie wymiarowej, 25
 - kwadratowa, 27
 - liniowa, 23
 - Fouriera równanie, 12
 - Funkcje
 - bazowe, 21, 62, 82
 - interpolacyjne
 - dwuliniowe, 202
 - Hermita, 146
 - Lagrange'a, 128
 - kompletne, 107
 - kształtu, (*patrz* interpolacyjne)
 - lokalne, 115
 - próbne, (*patrz* testowe)
 - testowe, 16, 83
 - wagowe, 83
 - Funkcje kształtu, 258
 - globalne, 403
 - Funkcje testowe, 257
 - Funkcjonał
 - energii potencjalnej, 10
 - kwadratowy, (*patrz* Forma kwadratowa), 47, 62
 - liniowy, (*patrz* Forma liniowa)
 - w przestrzeni Hilberta, 37
- Globalny stopień swobody, 117
- Hilberta przestrzeń, (*patrz* Przestrzeń wektorowa)
 - $H^1(\Omega)$, 33
 - $H^m(\Omega)$, 33

- $H_0^m(\Omega)$, 33
- Iloczyn
 kartezjański, 25
 skalarny, 31
- Jednoznaczność rozwiązania wariacyjnego, 58
- Klasyczna MRS, 287, 346
- Kompletność, 119
- Kryteria zbieżności MES, 219
- Lagrange'a mnożniki, 80
- Lagrangian, 80
- Macierz
 sztywności, 116
 transformacji
 elementu kratowego, 158
 elementu ramowego, 182
- Macierz aproksymacyjna, 360
- Metoda
 agregacji
 bezpośredniej, 131
 symbolicznej, 131
 Bubnowa–Galerkina, 83–85
 w sformułowaniu słabym, 85, (*patrz*
 Sformułowanie wariacyjne)
 elementów skończonych, 111
 kollokacji
 punktowej, 102–103, 148
 w podobszarze, 106
 komputerowa, 8
 mnożników Lagrange'a, 80
 najmniejszych kwadratów, 98–99,
 148
 Petrowa–Galerkina, 92
 Petrowa–Galerkina, 82
 Rayleigha–Ritza, 62–65
 residuów ważonych, 81
 Treffza, 106
- Metoda MEB:
- adaptacja, 271
- algorytm, 239
- całki niewłaściwe, 247
- element
 brzegowy, 239, 265
 wzorcowy, 265
- podejście wariacyjne, 257
- sformułowanie pośrednie, 276
- test zbieżności, 243
- Metoda różnic skończonych (MRS), 281,
 282
 sformułowanie globalne, 285
 sformułowanie lokalne, 284
- Metoda Treffza, 278
- Metoda ustalonych ważonych najmniejszych kwadratów, 396
- Metody bezsiatkowe
 bezelementowa metoda Galerkina,
 410
- Metody rozwiązań przybliżonych, 59
- Metryka
 naturalna
 generowana przez iloczyn skalarny, 31
 indukowana przez normę, 29
- Model
 matematyczny, 9
 numeryczny, 9
- Modele skończenie elementowe, (*patrz*
 Skończenie elementowa analiza)
 Bubnowa–Galerkina, 145, 209
 Rayleigha–Ritza, 123, 164, 197
- Nierówność Cauchy'ego-Schwarza, 31
- Nieredukowalne równanie, 14
- Niewiadome MES:
 pierwotne, 124
 wtórne, 125
- Norma
 L_2 , 29
 L_∞ , 29
 w przestrzeni wektorowej, 29

- Operator, (*patrz* Transformacja)
 agregacji, 133
 dodatni, 40
 dodatnio określony, 40
 normalny, 39
 samosprężony, 39
 sprężony, 38
 symetryczny, 40
- Operatorowe równanie, 36, 62, 82
- Pierwotne stopnie swobody, 115
- Pochodna dystrybucyjna, 15
- Poissona równanie, 36
- Przestrzeń
 skończenie elementowa, 117
 wektorowa
 Banacha, 28
 domknięta, 19, 30
 Hilberta, 32
 iloczynu skalarnego, unitarna, 31
 liniowa, 19
 metryczna, 28
 rozłączna, 31
 unormowana, 28
 zupełna, 28
- Pseudofunkcja delta, 15
- Rozwiązanie
 fundamentalne, 14
 przybliżone, 59
- Rozwiązanie fundamentalne, 249, 253, 263, 264
- Schematy (ilorazy) różnicowe, 288, 290, 293, 298, 299
- Sformułowanie
 globalne LPTS, 214
 lokalne LPTS, 211
 słabe, 13, 42, 85
 silne, 11
 wariacyjne, (*patrz* Sformułowanie słabe), 125, 165, 197, 213
- Sformułowanie brzegowe, 257
- Siatka elementów skończonych, 112
- Skończenie elementowa analiza:
 problemów dwuwymiarowych, 195–210
 problemów jednowymiarowych, 123
 układów prętowych, 156–195
- Tablica topologii, 112
- Tożsamość Somigliany, 17, 237, 250, 254
- Transformacja, (*patrz* Operator)
 liniowa, 20
 w przestrzeni skończenie wymiarowej, 21
- Twierdzenie
 Frecheta-Riesza, 38
 Gaussa, 34
 Greena-Gaussa, 34
 o minimum funkcjonału, 47
- Układ współrzędnych prostokątnych:
 globalny, 157
 lokalny, 125
- Uogólniona metoda różnic skończonych (UMRS), 347, 348
- Ustalony przepływ ciepła, 11, 203–209
- Węzeł elementu, 112
- Ważona forma całkowa równania różniczkowego, 41
- Warunek ciągłości międzyelementowej, 129
- Warunek kompletności, 108
- Warunki brzegowe
 Dirichleta, 53
 drugiego rodzaju, (*patrz* Neumana)
- kinematyczne, (*patrz* Dirichleta)
 mieszane, 55
 naturalne, (*patrz* Neumanna)
 Neumana, 53
 niejednorodne, 56
 pierwszego rodzaju, (*patrz* Dirichleta)

podstawowe, (*patrz* Dirichleta)
statyczne, (*patrz* Neumana)
trzeciego rodzaju, (*patrz* mieszane)
typy, 55
Warunki istnienia rozwiązania wariacyjnego, 58
Warunki kompletności aproksymacji, 405
Wektor obciążenia, 116
Wektory abstrakcyjne, 19
Zbieżność MES, 118