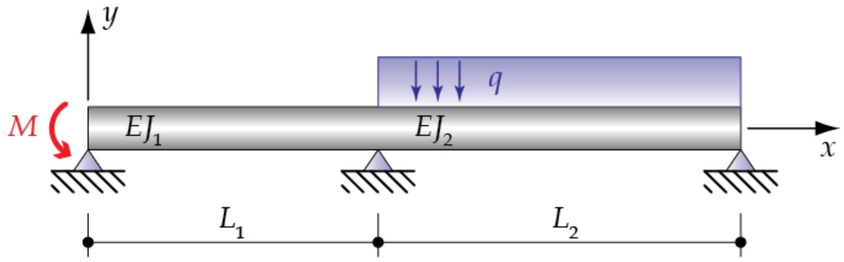
Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

Belka zginana



Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

$L1 := 6 \qquad J1 := 5\cdot10^{-5} \qquad h1 := 0.25$

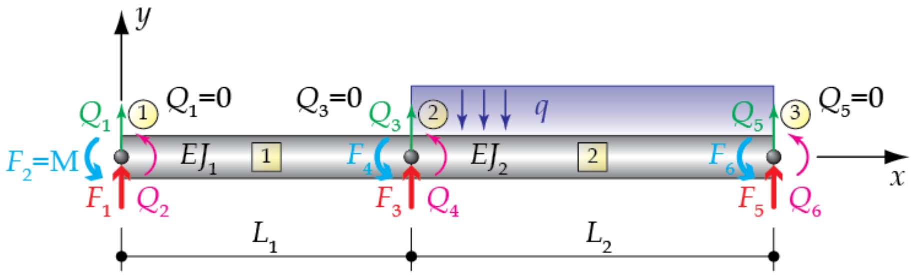
$L2 := 8 \qquad J2 := 1\cdot10^{-4} \qquad h2 := 0.32$

$q := -10\cdot10^{3} \qquad M := 20\cdot10^{3}$

$E := 200\cdot10^{9}$

(aby porównać naprężenia z systemem Abaqus odczytujemy je w środku półek - w punkcie całkowania numerycznego)

Dyskretyzacja belki



Definicja macierzy sztywności i wektora równowazników węzłowych obciążenia

$$Ke(EJ,L) := \begin{pmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{pmatrix} \qquad Pe(q,L) := \begin{pmatrix} \frac{q\cdot L}{2} \\ \frac{q\cdot L^2}{12} \\ \frac{q\cdot L}{2} \\ \frac{-q\cdot L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$ln := 3 \qquad lw := 2 \qquad lq := 2$

Budowa macierzy Boole'a

$i := 1..lw \cdot lq$ $j := 1..ln \cdot lq$

$B1_{i,j} := 0$ $B1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{i,j} := 0$ $B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B1_{1,1} := 1$ $B1_{2,2} := 1$

$B1_{3,3} := 1$ $B1_{4,4} := 1$ $B1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{1,3} := 1$ $B2_{2,4} := 1$

$B2_{3,5} := 1$ $B2_{4,6} := 1$ $B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obliczenie macierzy sztywności

$K1 := Ke(E \cdot J1, L1)$ $K1 = \begin{pmatrix} 5.556 \times 10^{5} & 1.667 \times 10^{6} & -5.556 \times 10^{5} & 1.667 \times 10^{6} \\ 1.667 \times 10^{6} & 6.667 \times 10^{6} & -1.667 \times 10^{6} & 3.333 \times 10^{6} \\ -5.556 \times 10^{5} & -1.667 \times 10^{6} & 5.556 \times 10^{5} & -1.667 \times 10^{6} \\ 1.667 \times 10^{6} & 3.333 \times 10^{6} & -1.667 \times 10^{6} & 6.667 \times 10^{6} \end{pmatrix}$

$K2 := Ke(E \cdot J2, L2)$ $K2 = \begin{pmatrix} 4.688 \times 10^{5} & 1.875 \times 10^{6} & -4.688 \times 10^{5} & 1.875 \times 10^{6} \\ 1.875 \times 10^{6} & 1 \times 10^{7} & -1.875 \times 10^{6} & 5 \times 10^{6} \\ -4.688 \times 10^{5} & -1.875 \times 10^{6} & 4.688 \times 10^{5} & -1.875 \times 10^{6} \\ 1.875 \times 10^{6} & 5 \times 10^{6} & -1.875 \times 10^{6} & 1 \times 10^{7} \end{pmatrix}$

Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$P1 := Pe(0, L1)$ $P1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P2 := Pe(q, L2)$

$$P2 = \begin{pmatrix} -4\times10^{4} \\ -5.333\times10^{4} \\ -4\times10^{4} \\ 5.333\times10^{4} \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$K := B1^{T}\cdot K1\cdot B1 + B2^{T}\cdot K2\cdot B2$

$$K = \begin{pmatrix} 5.556\times10^{5} & 1.667\times10^{6} & -5.556\times10^{5} & 1.667\times10^{6} & 0 & 0 \\ 1.667\times10^{6} & 6.667\times10^{6} & -1.667\times10^{6} & 3.333\times10^{6} & 0 & 0 \\ -5.556\times10^{5} & -1.667\times10^{6} & 1.024\times10^{6} & 2.083\times10^{5} & -4.688\times10^{5} & 1.875\times10^{6} \\ 1.667\times10^{6} & 3.333\times10^{6} & 2.083\times10^{5} & 1.667\times10^{7} & -1.875\times10^{6} & 5\times10^{6} \\ 0 & 0 & -4.688\times10^{5} & -1.875\times10^{6} & 4.688\times10^{5} & -1.875\times10^{6} \\ 0 & 0 & 1.875\times10^{6} & 5\times10^{6} & -1.875\times10^{6} & 1\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$P := B1^{T}\cdot P1 + B2^{T}\cdot P2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4\times10^{4} \\ -5.333\times10^{4} \\ -4\times10^{4} \\ 5.333\times10^{4} \end{pmatrix}$$

Budowa wektora sił węzłowych

$F_{j} := 0$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F_{2} := M$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\times10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Kw := K$ $\quad Fw := F$ $\quad Pw := P$

Na stopniu swobody o numerze 1

$Kw_{1,j} := 0$ $\quad Kw_{j,1} := 0$ $\quad Kw_{1,1} := 1$

$Fw_1 := 0$ $\quad Pw_1 := 0$

Na stopniu swobody o numerze 3

$Kw_{3,j} := 0$ $\quad Kw_{j,3} := 0$ $\quad Kw_{3,3} := 1$

$Fw_3 := 0$ $\quad Pw_3 := 0$

Na stopniu swobody o numerze 5

$Kw_{5,j} := 0$ $\quad Kw_{j,5} := 0$ $\quad Kw_{5,5} := 1$

$Fw_5 := 0$ $\quad Pw_5 := 0$

$$Kw = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \times 10^{6} & 0 & 3.333 \times 10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.333 \times 10^{6} & 0 & 1.667 \times 10^{7} & 0 & 5 \times 10^{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{6} & 0 & 1 \times 10^{7} \end{pmatrix}$$

$$Fw = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Pw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.333 \times 10^{4} \\ 0 \\ 5.333 \times 10^{4} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := Kw^{-1} \cdot (Pw + Fw) \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.6 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 8.933 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$R := K \cdot Q - P \qquad R = \begin{pmatrix} -1000 \times 10^{0} \\ 20 \times 10^{3} \\ 44.25 \times 10^{3} \\ 21.828 \times 10^{-12} \\ 36.75 \times 10^{3} \\ -14.552 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q1 := B1 \cdot Q \qquad Q1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.6 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Q2 := B2 \cdot Q \qquad Q2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 8.933 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Definicja wektora funkcji kształtu

$$N1(x, L) := 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N2(x, L) := x \cdot \left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$N3(x, L) := 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N4(x, L) := x \cdot \left[-\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

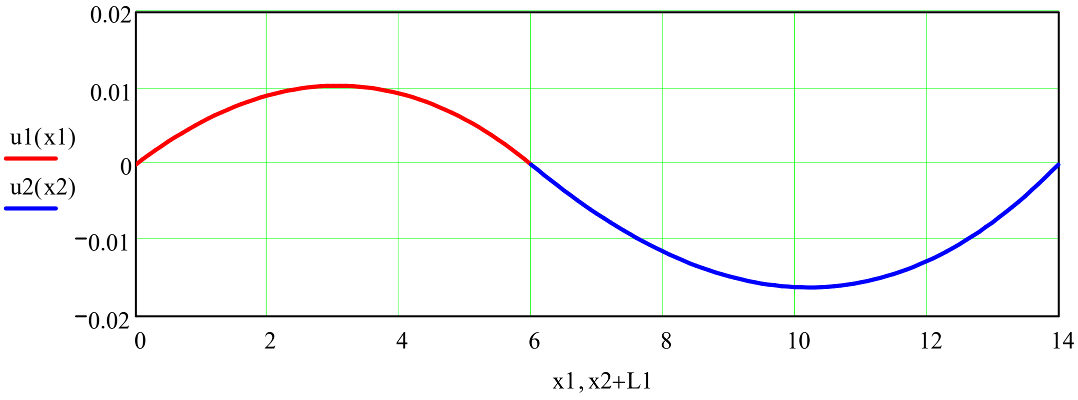
$$N(x, L) := \begin{pmatrix} N1(x, L) & N2(x, L) & N3(x, L) & N4(x, L) \end{pmatrix}$$

Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

$$u1(x) := N(x, L1) \cdot Q1 \qquad u2(x) := N(x, L2)\, Q2$$

Wykres przemieszczenia

$$x1 := 0, 0 + 0.1 .. L1 \qquad x2 := 0, 0 + 0.1 .. L2$$



Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach

$$F1 := K1 \cdot Q1 - P1 \qquad F1 = \begin{pmatrix} -1000 \times 10^{0} \\ 20 \times 10^{3} \\ 1000 \times 10^{0} \\ -26 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

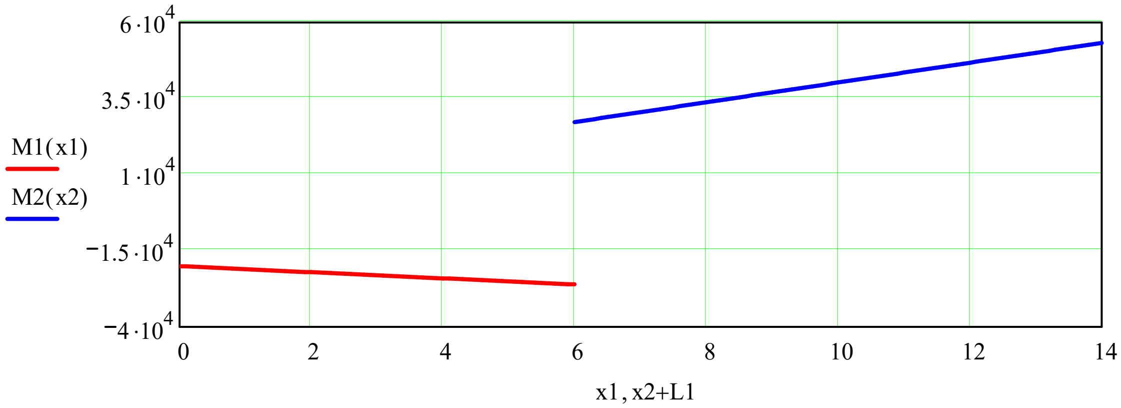
$$F2 := K2 \cdot Q2 - P2 \qquad F2 = \begin{pmatrix} 43.25 \times 10^{3} \\ 26 \times 10^{3} \\ 36.75 \times 10^{3} \\ -14.552 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

Obliczenie momentu gnącego

$$M1(x) := E \cdot J1 \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} u1(x)\right) \qquad M2(x) := E \cdot J2 \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} u2(x)\right)$$

$$M1(0) = -20 \times 10^{3} \qquad M2(0) = 27.333 \times 10^{3}$$

$$M1(L1) = -26 \times 10^{3} \qquad M2(L2) = 53.333 \times 10^{3}$$

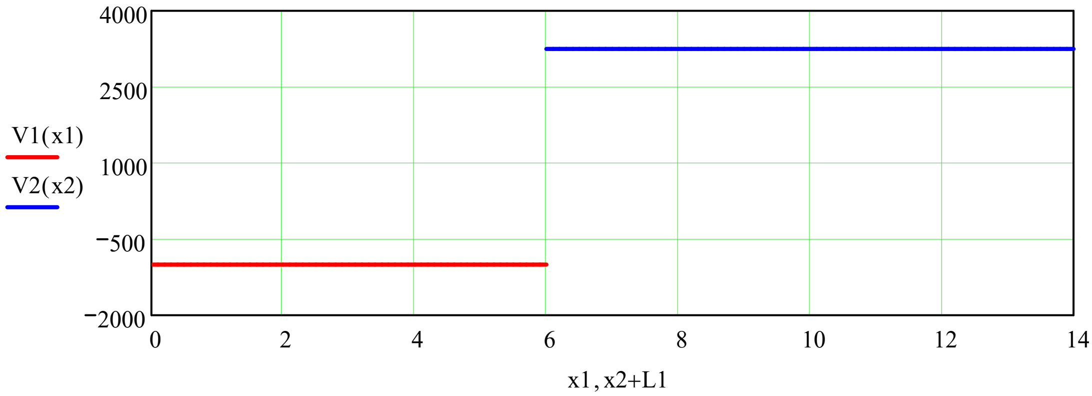


Obliczenie siły stycznej

$$V1(x) := E \cdot J1 \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} u1(x) \right) \qquad V2(x) := E \cdot J2 \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} u2(x) \right)$$

$V1(0) = -1 \times 10^3$ $\qquad V2(0) = 3.25 \times 10^3$

$V1(L1) = -1000 \times 10^0$ $\qquad V2(L2) = 3.25 \times 10^3$



Obliczenie naprężeń normalnych

$$w1 := \frac{J1}{0.5 \cdot h1} \qquad w2 := \frac{J2}{0.5 \cdot h2}$$

$$\sigma1(x) := \frac{M1(x)}{w1} \qquad \sigma2(x) := \frac{M2(x)}{w2}$$

$\sigma1(0) = -50 \times 10^6$ $\qquad \sigma2(0) = 43.733 \times 10^6$

$\sigma1(L1) = -65 \times 10^6$ $\qquad \sigma2(L2) = 85.333 \times 10^6$