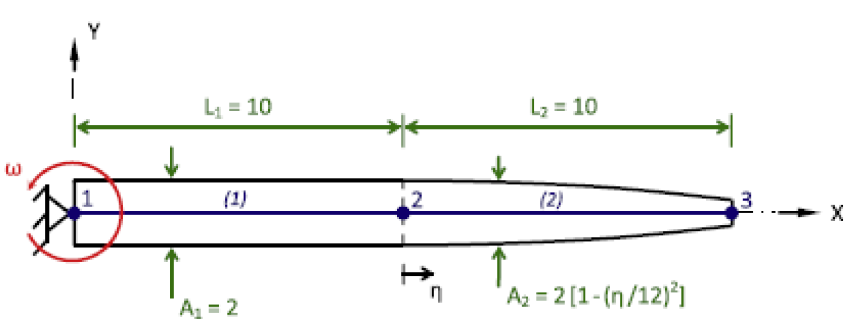
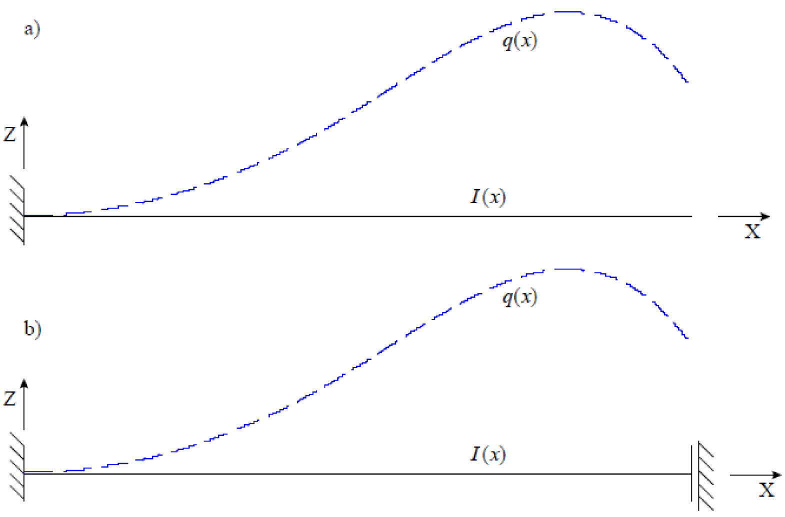
Przykład analizy wytrzymałościowej łopatki wirnika z użyciem metody elementów skończonych w systemie Mathcad
Część II
Opracował: dr inż. Paweł Stąpór

Sformułowanie problemu

Dla problemu zdefiniowanego w części I (rysunek 1) wykonać analizę naprężeń w wyniku działania siły nośnej. Model łopatki i modele zamocowania odpowiadające przypadkom konstrukcyjnym a) i b) (część I) przedstawione są na rysunku 2. Siła nośna działająca na łopatkę q(x) (siła działająca prostopadle do płaszczyzny x-y) zależna jest od prędkości obrotowej wirnika ϖ, gęstości ośrodka ρ (powietrza), przekroju łopatki A(x) oraz od współczynnika nośności aerodymicznej przekroju łopatki λ. W tym przypadku naprężenia będą wynikiem zginania łopatki w wyniku działania siły nośnej q(x).



Rysunek 1: Łopatka wirnika (źródło: Payen, D., J., Bathe, K., J., A stress improvement procedure, *Computers and Structures*, strony 311-326, 2012.)



Rysunek 2: Modele konstrukcyjne łopatki wirnika w aerodynicznej analizie siły nośnej.

Rozwiązanie zadania metodą elementów skończonych

1. *Definicja parametrów fizycznych i geometrycznych zadania*

Ustalenie indeksowania elementów macierzy i wektorów: $ORIGIN := 1$

Całkowita długość łopatki wirnika: $L := 20$

Współrzędna określająca miejsce zmiany geometrii łopatki: $\xi := 10$

Prędkość kątowa obracającej się łopatki: $\omega := 10$

Funkcja definiująca współczynnik nośności aerodynamicznej przekroju: $\lambda(x) := 6$

Funkcja definiująca moduł Younga materiału: $E(x) := 110 \cdot 10^9$

Funkcja definiująca pole przekroju łopatki: $A(x) := \text{if}\left[x < \xi, 2, 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x-\xi}{12}\right)^2\right]\right]$

Gęstość ośrodka (powietrza) $\rho := 1.0$

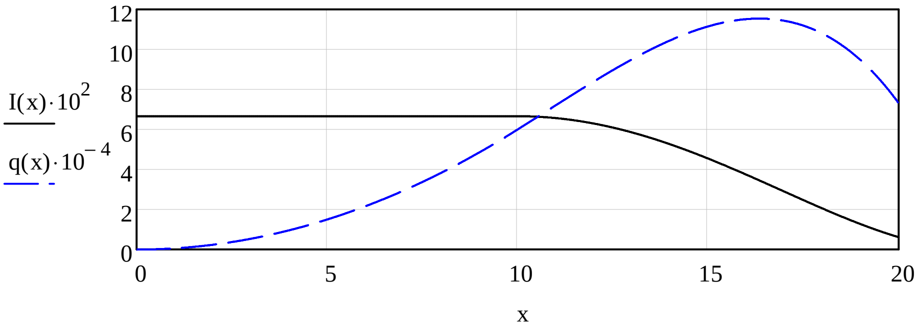
Funkcja definiująca siłę nośną: $q(x) := \frac{1}{2} \cdot A(x) \cdot \rho\, \lambda(x) \cdot (\omega \cdot x)^2$

Funkcja definiująca moment bezwładności przekroju: $I(x) := \frac{A(x)^2}{60}$

Funkcja definiująca wysokość przekroju: $w(x) := \sqrt{\frac{A(x)}{5}}$

2. *Wykres intensywności siły nośnej i momentu bezwładności łopatki wirnika*

Definicja współrzędnych: $x := 0, 0.01 .. L$



Rysunek 2: Wykres intensywności obciążenia w wyniku działania siły nośnej *q(x)* (skala x10^4) i momentu bezwładności przekroju łopatki *I(x)* (skala x10^{-2}) .

3. *Obliczenia*

Wyznaczenie sztywności przekroju na zginanie: $IE(x) := I(x) \cdot E(x)$

Definicja funkcji kształtu Hermite'a (dwu-węzłowy element skończony z dwoma stopniami swobody w węźle) i ich drugich pochodnych:

$$N1(x,h) := 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^3 \quad N2(x,h) := x\cdot\left[1 - 2\cdot\left(\frac{x}{h}\right) + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right] \quad N3(x,h) := 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^3 \quad N4(x,h) := x\cdot\left[-\frac{x}{h} + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right]$$

$$dN1(x,h) := \frac{d^2}{dx^2}N1(x,h) \quad dN2(x,h) := \frac{d^2}{dx^2}N2(x,h) \quad dN3(x,h) := \frac{d^2}{dx^2}N3(x,h) \quad dN4(x,h) := \frac{d^2}{dx^2}N4(x,h)$$

gdzie: *x* - współrzędna lokalna w elemencie skończonym, *h* - długość elementu.

Liczba elementów skończonych użytych do dyskretyzacji obszaru rozwiązania (zakłada się podział na równej długości elementy). Liczba elementów powinna być taka aby zapewnić położenie węzła w punkcie *ξ*.

$n := 32$

Definicja długość elementów skończonych (w przypadku równej długości elementów, (wpisz *e:1;n H[e:L/n D[e:(e-1)*L/n*):

$e := 1 .. n \qquad H_e := \frac{L}{n} \qquad D_e := \frac{(e-1)\cdot L}{n}$

Całkowita liczba stopni swobody: $NoF := 2(n+1)$

Utworzenie zerowych globalnych macierzy sztywności, wektora równoważników obciążenia i macierzy Boole'a (wpisz: *K[NoF,NoF:0 F[NoF:0 C[2,NoF:0*)

$K_{NoF,NoF} := 0 \qquad F_{NoF} := 0 \qquad C_{4,NoF} := 0$

Program do obliczania macierzy sztywności i wektora równoważników od obciążenia ciągłego

$$
KF := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } e \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow H_e \\
d \leftarrow D_e \\
k \leftarrow \begin{pmatrix}
\int_0^h IE(x+d)\cdot dN1(x,h)\cdot dN1(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN1(x,h)\cdot dN2(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN1(x,h)\cdot dN3(x,h)\,dx \\
\int_0^h IE(x+d)\cdot dN2(x,h)\cdot dN1(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN2(x,h)\cdot dN2(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN2(x,h)\cdot dN3(x,h)\,dx \\
\int_0^h IE(x+d)\cdot dN3(x,h)\cdot dN1(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN3(x,h)\cdot dN2(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN3(x,h)\cdot dN3(x,h)\,dx \\
\int_0^h IE(x+d)\cdot dN4(x,h)\cdot dN1(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN4(x,h)\cdot dN2(x,h)\,dx & \int_0^h IE(x+d)\cdot dN4(x,h)\cdot dN3(x,h)\,dx
\end{pmatrix} \\
f \leftarrow \begin{pmatrix}
\int_0^h N1(x,h)\cdot q(x+d)\,dx \\
\int_0^h N2(x,h)\cdot q(x+d)\,dx \\
\int_0^h N3(x,h)\cdot q(x+d)\,dx \\
\int_0^h N4(x,h)\cdot q(x+d)\,dx
\end{pmatrix} \\
C \leftarrow 0\cdot C \\
C_{1,e\cdot 2-1} \leftarrow 1 \\
C_{2,2e} \leftarrow 1 \\
C_{3,2e+1} \leftarrow 1 \\
C_{4,2e+2} \leftarrow 1 \\
K \leftarrow K + C^T\cdot k\cdot C \\
F \leftarrow F + C^T\cdot f
\end{array}
\right. \\
(K \quad F)
\end{array}
\right.
$$

Globalna macierz sztywności i globalny wektor obciązenia ciągłego (wpisz *K:KF[1,1 F:KF[1,2*): $K := KF_{1,1}$ $F := KF_{1,2}$

K =

	1	2	3	4	5	6
1	$3.604\cdot10^{11}$	$1.126\cdot10^{11}$	$-3.604\cdot10^{11}$	$1.126\cdot10^{11}$	0	0
2	$1.126\cdot10^{11}$	$4.693\cdot10^{10}$	$-1.126\cdot10^{11}$	$2.347\cdot10^{10}$	0	0
3	$-3.604\cdot10^{11}$	$-1.126\cdot10^{11}$	$7.209\cdot10^{11}$	1.855	$-3.604\cdot10^{11}$	$1.126\cdot10^{11}$
4	$1.126\cdot10^{11}$	$2.347\cdot10^{10}$	1.855	$9.387\cdot10^{10}$	$-1.126\cdot10^{11}$	$2.347\cdot10^{10}$
5	0	0	$-3.604\cdot10^{11}$	$-1.126\cdot10^{11}$	$7.209\cdot10^{11}$	1.855
6	0	0	$1.126\cdot10^{11}$	$2.347\cdot10^{10}$	1.855	$9.387\cdot10^{10}$
7	0	0	0	0	$-3.604\cdot10^{11}$	$-1.126\cdot10^{11}$
8	0	0	0	0	$1.126\cdot10^{11}$	$2.347\cdot10^{10}$
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0

F =

	1
1	9.766
2	1.526
3	166.016
4	12.207
5	605.469
6	24.414
7	$1.338\cdot10^{3}$
8	36.621
9	$2.363\cdot10^{3}$
10	48.828
11	$3.682\cdot10^{3}$
12	61.035
13	$5.293\cdot10^{3}$
14	73.242
15	$7.197\cdot10^{3}$
16	85.449

Definicja warunków brzegowych dla przypadku pierwszego rozwiązania konstrukcyjnego a)

Utworzenie zerowych wektorów warunków statycznych (siły skupione) (wpisz: P*[NoF:0*)

$P_{NoF} := 0$

Wektor stopni swobody w których definiowane są podpory
Wartości stopni swobody w podporach=0

$R := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie układu równań z uwzględniem zerowych warunków brzegowych

$j := 1..\mathrm{rows}(R) \qquad i := 1..NoF$

$K_{i,R_j} := \mathrm{if}\left(R_j = i, -1, 0\right)$

$Q := \mathrm{lsolve}(K, F + P)$

Wektor reakcji (wpisz: *Q[R[j=*):

$Q_{R_j} =$

$-1.169\cdot10^{6}$
$-1.629\cdot10^{7}$

Wektor obliczonych stopni swobody (wpisz: *Q[R[j:Q.D[R[j*): $Q_{R_j} := 0$

Q =

	1
1	0
2	0
3	$4.274\cdot10^{-4}$
4	$1.357\cdot10^{-3}$
5	$1.684\cdot10^{-3}$
6	$2.652\cdot10^{-3}$
7	$3.73\cdot10^{-3}$
8	$3.885\cdot10^{-3}$
9	$6.527\cdot10^{-3}$
10	$5.056\cdot10^{-3}$
11	0.01
12	$6.164\cdot10^{-3}$
13	0.014
14	$7.211\cdot10^{-3}$
15	0.019
16	$8.195\cdot10^{-3}$

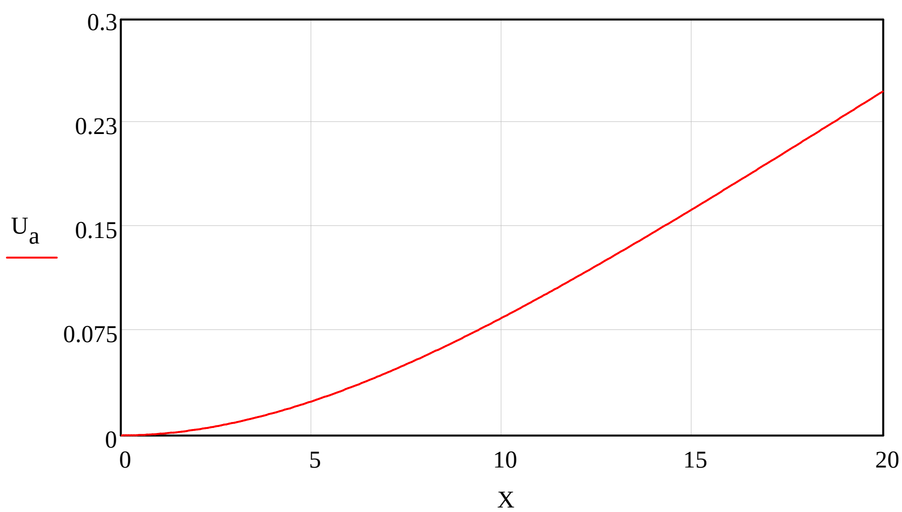
4. Postprocessing dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)

Definicja funkcji obliczającej przemieszczenia, moment gnący i naprężenia w elementach skończonych

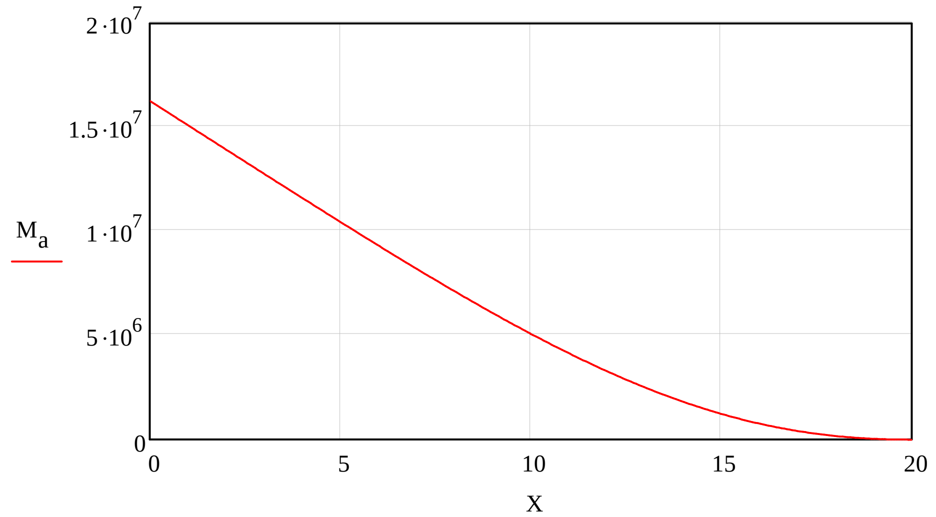
$$
\mathrm{funXUS}(Q) := \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow 1 \\
N \leftarrow 10 \\
\text{for } e \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow H_e \\
d \leftarrow D_e \\
\text{for } j \in 1..N \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x \leftarrow \dfrac{h}{N-1}\cdot(j-1) \\
X_i \leftarrow x + d \\
U_i \leftarrow \begin{pmatrix} N1(x,h) & N2(x,h) & N3(x,h) & N4(x,h) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Q_{2\cdot e-1} \\ Q_{2\cdot e} \\ Q_{2\cdot e+1} \\ Q_{2\cdot e+2} \end{pmatrix} \\
M_i \leftarrow \begin{pmatrix} dN1(x,h) & dN2(x,h) & dN3(x,h) & dN4(x,h) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Q_{2\cdot e-1} \\ Q_{2\cdot e} \\ Q_{2\cdot e+1} \\ Q_{2\cdot e+2} \end{pmatrix}\cdot IE\left(X_i\right) \\
S_i \leftarrow \dfrac{M_i\cdot w\left(X_i\right)}{2\cdot I\left(X_i\right)} \\
i \leftarrow i + 1
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} X & U & M & S \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$XUS := \mathrm{funXUS}(Q)$ $\quad X := XUS_{1,1}$ $\quad U_a := XUS_{1,2}$ $\quad M_a := XUS_{1,3}$ $\quad S_a := XUS_{1,4}$

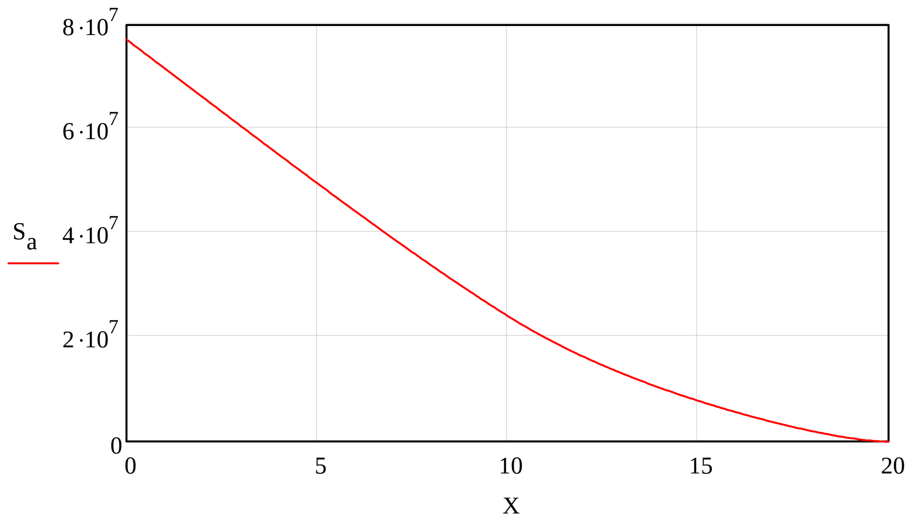
Wykres przemieszczeń dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)



Wykres momentu gnącego dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)



Wykres naprężeń maksymalnych w przekroju dla pierwszego przypadku konstrukcyjnego a)



Definicja warunków brzegowych dla przypadku drugiego rozwiązania konstrukcyjnego b)

Odtworzenie macierzy sztywności i wektora równoważników obciążenia ciągłego

$K := KF_{1,1} \qquad F := KF_{1,2}$

Wektor stopni swobody w których definiowane są podpory
(zerowe wartości stopni swobody)

$$R := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ NoF \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań z uwzględniem zerowych warunków kinematycznych

$j := 1 .. rows(R) \qquad i := 1 .. NoF$

$K_{i,R_j} := if\left(R_j = i, -1, 0\right)$

$Q := lsolve(K, F + P)$

$Q_{R_j} =$

Wektor reakcji (wpisz: *Q[R[j]=):*

-1.169·106
-1.254·107
-3.747·106

Wektor obliczonych stopni swobody (wpisz: *Q[R[j:0) :*

$Q_{R_j} := 0$

$Q =$

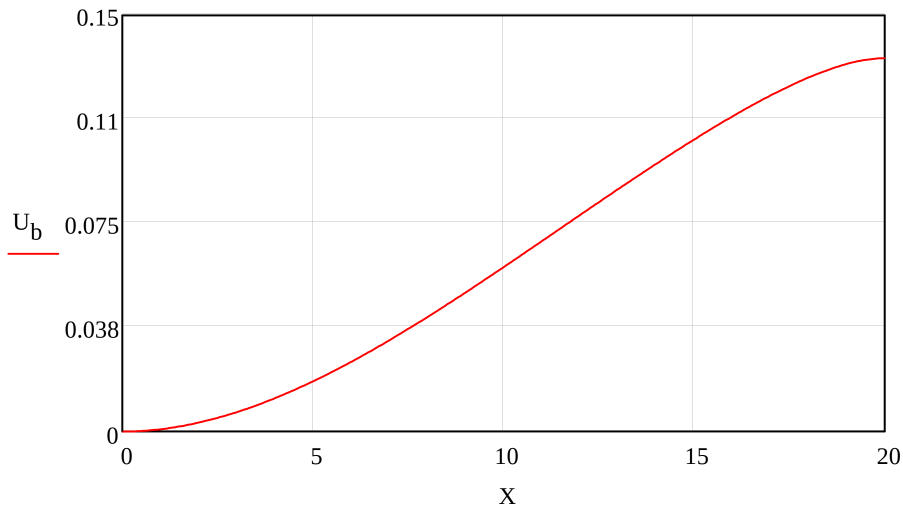
	1
1	0
2	0
3	$3.276 \cdot 10^{-4}$
4	$1.038 \cdot 10^{-3}$
5	$1.285 \cdot 10^{-3}$
6	$2.014 \cdot 10^{-3}$
7	$2.832 \cdot 10^{-3}$
8	$2.927 \cdot 10^{-3}$
9	$4.931 \cdot 10^{-3}$
10	$3.778 \cdot 10^{-3}$
11	$7.542 \cdot 10^{-3}$
12	$4.568 \cdot 10^{-3}$
13	0.011
14	$5.295 \cdot 10^{-3}$
15	0.014
16	$5.96 \cdot 10^{-3}$

5. Postprocessing dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)

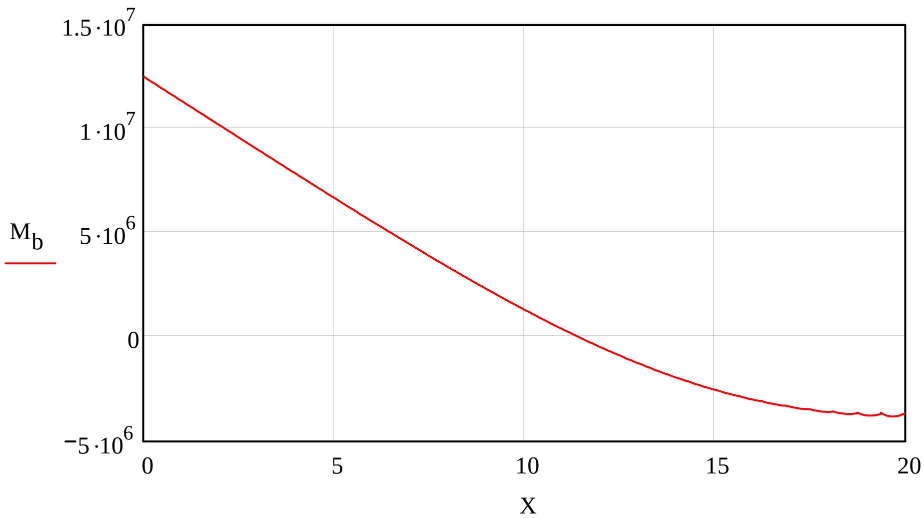
Obliczenie przemieszczeń, momentu gnącego i naprężeń w elementach skończonych

$XUS := \mathrm{funXUS}(Q) \quad X := XUS_{1,1} \quad U_b := XUS_{1,2} \quad M_b := XUS_{1,3} \quad S_b := XUS_{1,4}$

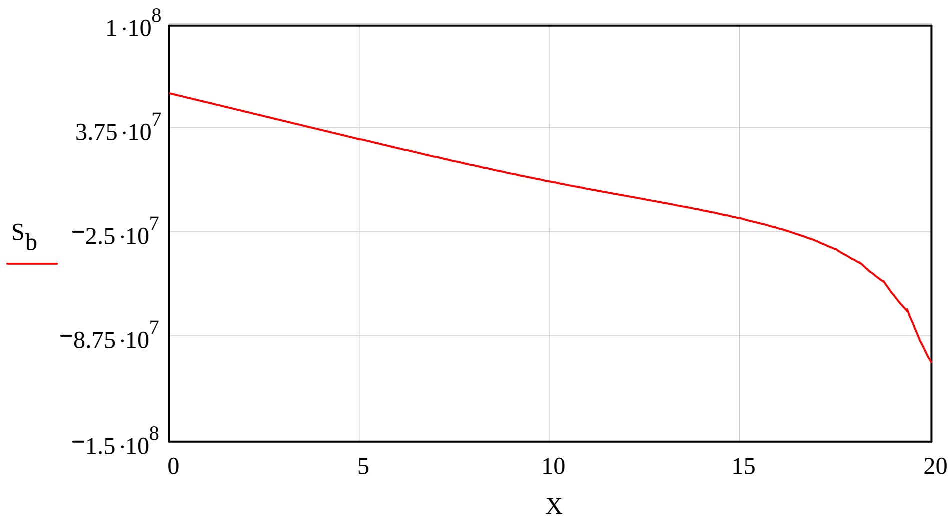
Wykres przemieszczeń dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)



Wykres momentu gnącego dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)

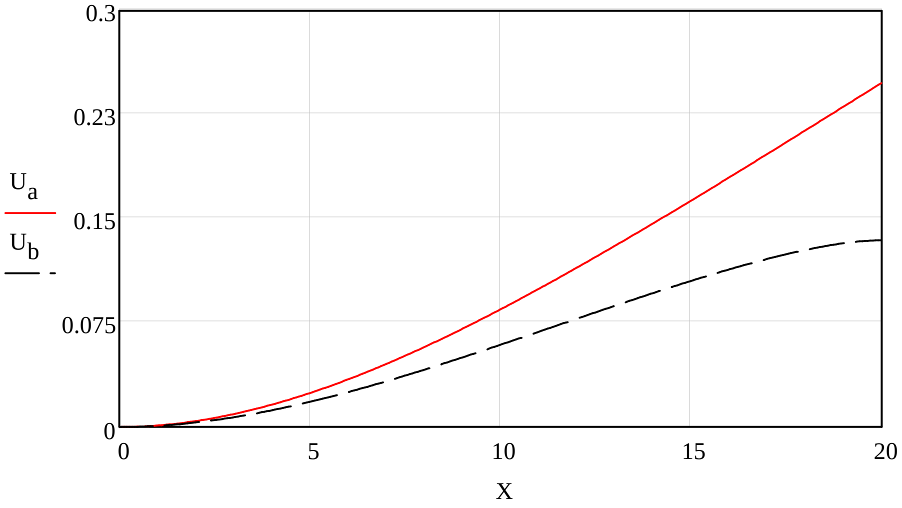


Wykres naprężeń maksymalnych w przekroju dla drugiego przypadku konstrukcyjnego b)

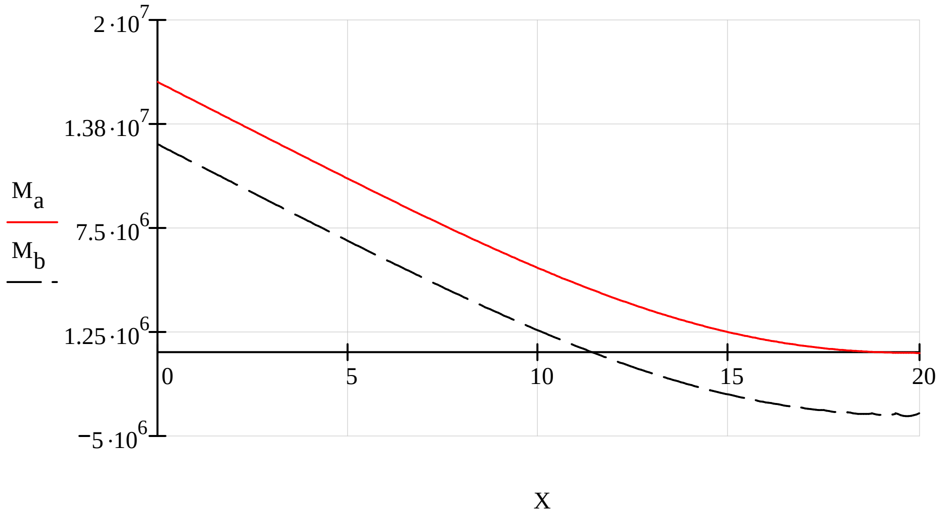


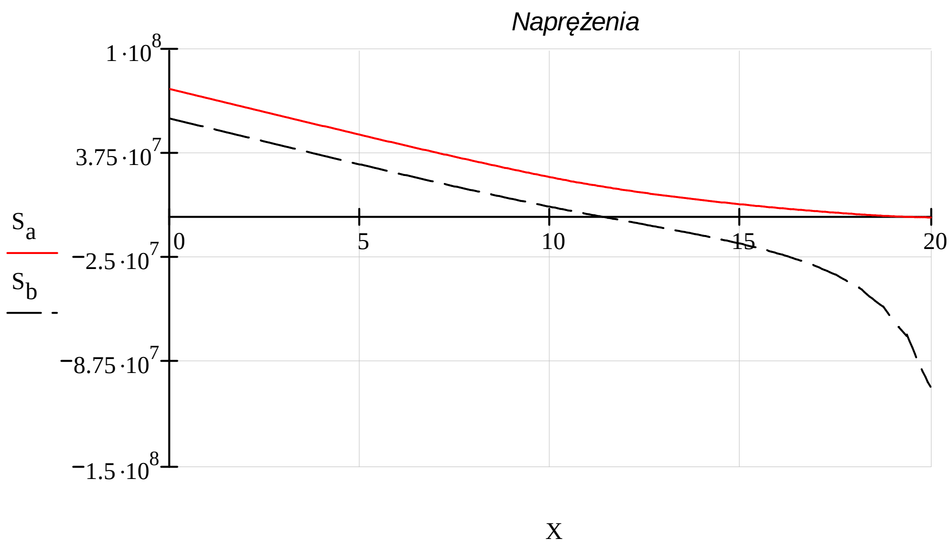
6. Porównanie wyników dla dwóch rozwiązań konstrukcyjnych

Przemieszczenia



Moment gnący





Wyznaczenie naprężeń ekstremalnych dla rozwiązania konstrukcyjnego a)

$\max(S_a) = 7.728 \times 10^7$ $\quad \min(S_a) = -4.324 \times 10^4$

Wyznaczenie naprężeń ekstremalnych dla rozwiązania konstrukcyjnego b)

$\max(S_b) = 5.951 \times 10^7$ $\quad \min(S_b) = -1.02 \times 10^8$

Wykonaj analizę zadania dla zwiększonej liczby elementów skończonych (n=64, 128 ...). Które z rozwiązań jest korzystniejsze ze względu na wielkość naprężeń w łopatce wirnika?

Zbadaj wpływ prędkosći obrotowej na rozwiązanie. W tym celu wykonaj analizę w zakresie prędkości kątowych ϖ= 5, 10, 15, 20.

Zbadaj wpływ parametrów materiału na wielkość naprężęń i wpływ współczynnika nośności earodynamicznej przekroju. Wykonaj analizę dla wartości modułu Younga E=80e9 i λ=3,6,9.

Jak zmieni się rozwiązanie kiedy łopatka wirnika będzie miała stały profil na całej długości A=const.?

Jaka jest całkowita siła nośna generowna przez łopatkę wirnika?