

# **Kinematyka i Dynamika Robotów**

## Instrukcja do zajęć laboratoryjnych

dr inż. Dawid Pietrala

[dpietrala@tu.kielce.pl](mailto:dpietrala@tu.kielce.pl)

# 1 Laboratorium 2: Reprezentacja pozycji i orientacji w przestrzeni

## 1.1 Cele zajęć

Celem laboratorium jest zapoznanie studentów z metodami opisu położenia i orientacji w przestrzeni, które są podstawą analizy kinematyki robotów manipulacyjnych.

Podczas zajęć studenci nauczą się:

- reprezentować punkty i wektory w przestrzeni,
- interpretować geometrycznie wektory w układzie współrzędnych,
- stosować macierze rotacji na płaszczyźnie,
- stosować macierze rotacji w przestrzeni trójwymiarowej,
- wizualizować rotacje wektorów i układów współrzędnych,
- stosować macierze transformacji jednorodnych.

## 1.2 Wprowadzenie

W robotyce położenie punktów w przestrzeni opisuje się za pomocą wektorów współrzędnych.

Na płaszczyźnie punkt zapisujemy jako

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Natomiast w przestrzeni trójwymiarowej

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Wektor można interpretować geometrycznie jako strzałkę prowadzącą z początku układu współrzędnych do danego punktu.

Zmiana orientacji układu współrzędnych opisywana jest przez macierze rotacji.

## 1.3 Ćwiczenie 1: Reprezentacja punktu i wektora

W pierwszym ćwiczeniu zobaczymy w jaki sposób punkt na płaszczyźnie można interpretować jako wektor.

Rozważmy punkt

$$p = \{2, 1\}$$

Współrzędne punktu określają jego położenie względem początku układu współrzędnych. Najpierw przedstawmy punkt na wykresie.

```
Graphics[
{
  Red, PointSize[Large], Point[p]
},
Axes -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotRange -> {{-3,3},{-3,3}}
]
```

Na wykresie:

- czerwony punkt – położenie punktu  $p$
- osie – układ współrzędnych
- siatka – ułatwia odczyt współrzędnych

Ten sam punkt można przedstawić jako wektor.

```
Graphics[
{
  Thick, Blue, Arrow[{{0,0},p}]
},
Axes -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotRange -> {{-3,3},{-3,3}}
]
```

Na wykresie:

- niebieska strzałka – wektor prowadzący z początku układu do punktu  $p$

## 1.4 Ćwiczenie 2: Rotacja punktu na płaszczyźnie

W robotyce bardzo często zachodzi potrzeba obrotu punktów lub wektorów.

Rotację punktu na płaszczyźnie opisuje macierz rotacji

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Macierz ta obraca punkt wokół początku układu współrzędnych.

Zaimplementujmy macierz rotacji w Mathematica.

```
R2[phi_] := {
  {Cos[phi], -Sin[phi]},
  {Sin[phi], Cos[phi]}
}
```

Obróćmy punkt o kąt  $45^\circ$ .

```
p = {2,1}
angle = Pi/4
p2 = R2[angle].p
```

Wizualizacja:

```
Graphics[
{
  Thick, Blue, Arrow[{{0,0},p}],
  Thick, Red, Arrow[{{0,0},p2}]
},
Axes -> True,
GridLines -> Automatic,
PlotRange -> {{-3,3},{-3,3}}
]
```

Na wykresie:

- niebieski wektor – punkt przed rotacją
- czerwony wektor – punkt po rotacji

### 1.5 Ćwiczenie 3: Animacja rotacji

Rotację można przedstawić jako proces ciągły.

```
p = {2,1};  
  
Animate[  
  Graphics[  
    {  
      Thick, Blue, Arrow[{{0,0},R2[t].p}]  
    },  
    Axes -> True,  
    GridLines -> Automatic,  
    PlotRange -> {{-3,3},{-3,3}}  
  ],  
  {t,0,2 Pi}  
]
```

Podczas animacji wektor obraca się wokół początku układu współrzędnych.

### 1.6 Ćwiczenie 4: Macierze rotacji w przestrzeni

W przestrzeni trójwymiarowej istnieją trzy podstawowe macierze rotacji:

- rotacja wokół osi  $X$
- rotacja wokół osi  $Y$
- rotacja wokół osi  $Z$

Implementacja macierzy rotacji:

```
Rx[a_] := {  
  {1,0,0},  
  {0,Cos[a],-Sin[a]},  
  {0,Sin[a],Cos[a]}  
}  
  
Ry[b_] := {  
  {Cos[b],0,Sin[b]},  
  {0,1,0},  
  {-Sin[b],0,Cos[b]}  
}  
  
Rz[c_] := {  
  {Cos[c],-Sin[c],0},  
  {Sin[c],Cos[c],0},  
  {0,0,1}  
}
```

## 1.7 Ćwiczenie 5: Rotacja wektora w przestrzeni

Rozważmy wektor

```
v = {1,1,0}
```

Obróćmy go wokół osi Z.

```
angle = Pi/4
```

```
v2 = Rz[angle].v
```

Wizualizacja:

```
Graphics3D[
{
  Thick, Blue, Arrow[{{0,0,0},v}],
  Thick, Red, Arrow[{{0,0,0},v2}],
  Black, Arrow[{{0,0,0},{0,0,2}}]
},
Axes -> True,
Boxed -> True,
PlotRange -> {{-2,2},{-2,2},{-2,2}}
]
```

Na wykresie:

- niebieski wektor – wektor przed rotacją
- czerwony wektor – wektor po rotacji
- czarna strzałka – oś rotacji

## 1.8 Ćwiczenie 6: Rotacja układu współrzędnych

W poprzednich przykładach obracaliśmy pojedyncze wektory. W robotyce bardzo często zachodzi jednak potrzeba opisanie orientacji całego układu współrzędnych.

Układ współrzędnych można przedstawić jako trzy wektory jednostkowe określające kierunki osi  $X$ ,  $Y$  oraz  $Z$ .

Zdefiniujmy funkcję rysującą układ współrzędnych.

```
axes[R_] :=
{
  Thick, Red, Arrow[{{0,0,0},R.{1,0,0}}],
  Thick, Green, Arrow[{{0,0,0},R.{0,1,0}}],
  Thick, Blue, Arrow[{{0,0,0},R.{0,0,1}}]
}
```

Kolory odpowiadają osiom układu współrzędnych:

- oś  $X$  – kolor czerwony
- oś  $Y$  – kolor zielony
- oś  $Z$  – kolor niebieski

Poniższa animacja przedstawia rotację układu współrzędnych wokół osi  $Z$ .

```
Animate[
Graphics3D[
{
  axes[IdentityMatrix[3]],
```

```

axes[Rz[t]]
},
Axes -> True,
Boxed -> True,
PlotRange -> {{-2,2},{-2,2},{-2,2}}
],
{t,0,2 Pi}
]

```

Na wykresie widoczne są dwa układy współrzędnych:

- pierwszy układ – układ bazowy
- drugi układ – układ po rotacji

Animacja pokazuje jak zmienia się orientacja układu w trakcie obrotu.

## 1.9 Ćwiczenie 7: Rotacja wokół dowolnej osi

W wielu zastosowaniach robotyki rotacja odbywa się wokół dowolnej osi w przestrzeni.

```
axis = Normalize[{1,1,1}]
```

```

Animate[
Graphics3D[
{
Thick, Black, Arrow[{{0,0,0},axis]},
axes[RotationMatrix[t,axis]]
},
Axes -> True,
Boxed -> True,
PlotRange -> {{-2,2},{-2,2},{-2,2}}
],
{t,0,2 Pi}
]

```

Czarna strzałka przedstawia oś rotacji.

## 1.10 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Poniższe zadania mają na celu utrwalenie sposobu reprezentacji punktów i wektorów w przestrzeni oraz zrozumienie działania macierzy rotacji.

W każdym zadaniu należy nie tylko wykonać obliczenia, ale również przygotować odpowiednie wizualizacje.

### Zadanie 1 – wizualizacja wektorów na płaszczyźnie

Zdefiniuj trzy wektory:

$$a = (2, 1), \quad b = (-1, 2), \quad c = (1, -2)$$

Następnie:

- narysuj wszystkie trzy wektory na jednym wykresie,
- użyj różnych kolorów dla każdego wektora,
- zaznacz punkty końcowe wektorów,
- ustaw zakres wykresu tak, aby wszystkie wektory były dobrze widoczne.

Spróbuj odpowiedzieć na pytanie: który z wektorów ma największą długość?

### Zadanie 2 – rotacja wektora na płaszczyźnie

Rozważ wektor

$$v = (3, 1)$$

Wykonaj rotację tego wektora o następujące kąty:

$$30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 120^\circ$$

Na jednym wykresie przedstaw:

- wektor początkowy,
- trzy wektory po rotacji.

Każdy wektor powinien mieć inny kolor.

Spróbuj odpowiedzieć na pytanie: czy długość wektora zmienia się podczas rotacji?

### Zadanie 3 – animacja rotacji wektora

Rozważ wektor

$$v = (2, 1)$$

Utwórz animację pokazującą jego rotację wokół początku układu współrzędnych. Animacja powinna pokazywać pełny obrót od

$$0 \text{ do } 2\pi$$

Na wykresie powinny być widoczne:

- obracający się wektor,
- siatka,
- układ współrzędnych.

Zastanów się, jaką krzywą opisuje końcówka obracającego się wektora.

### Zadanie 4 – rotacja wektora w przestrzeni

Rozważ wektor

$$v = (1, 2, 1)$$

Wykonaj jego rotację wokół osi  $Z$  o kąt  $45^\circ$ .

Następnie:

- narysuj wektor początkowy,
- narysuj wektor po rotacji,
- zaznacz oś rotacji.

Na podstawie wykresu spróbuj określić, jak zmieniły się współrzędne wektora.

**Zadanie 5 – animacja rotacji w przestrzeni**

Rozważ wektor

$$v = (1, 1, 1)$$

Utwórz animację jego rotacji wokół osi  $Z$ .

Na wykresie powinny być widoczne:

- wektor obracający się w przestrzeni,
- układ współrzędnych,
- oś rotacji.

Zwróć uwagę na tor ruchu końcówki wektora.

Jaką krzywą opisuje końcówka wektora?

**Zadanie 6 – rotacja wokół dowolnej osi**

Rozważ oś rotacji

$$u = (1, 1, 0)$$

Znormalizuj ten wektor i użyj go jako osi rotacji.

Następnie:

- zdefiniuj wektor  $v = (1, 0, 1)$ ,
- obróć go o kąt  $60^\circ$  wokół osi  $u$ ,
- narysuj oś rotacji oraz oba wektory.

Spróbuj zaobserwować, jak zmienia się orientacja wektora względem osi rotacji.

**Zadanie 7 – animacja rotacji układu współrzędnych**

W poprzednich ćwiczeniach obracaliśmy pojedyncze wektory.

W tym zadaniu należy przygotować animację rotacji całego układu współrzędnych wokół osi  $Z$ .

Animacja powinna pokazywać jednocześnie:

- układ bazowy,
- układ obracający się.

Zastanów się:

- czy zmienia się długość osi układu,
- które osie pozostają niezmienione podczas rotacji wokół osi  $Z$ .

**Zadanie 8 – trajektoria końcówki wektora**

Rozważ wektor

$$v = (2, 0, 1)$$

Utwórz animację jego rotacji wokół osi  $Z$ .

Następnie:

- zapisz kolejne pozycje końcówki wektora podczas rotacji,
- narysuj trajektorię tego punktu w przestrzeni.

Spróbuj odpowiedzieć na pytanie:  
jaką figurę geometryczną tworzy tor ruchu końcówki wektora?